Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien de dimension finie

Plan

À PROPOS DES MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES ...

Définition d'une matrice symétrique positive : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, M est positive si ${}^tXMX \geq 0$ pour tout vecteur colonne X. Définition équivalente : les valeurs propres de M sont ≥ 0.

Matrices de Gram

Soient $v_1, ..., v_N \in E$ un espace euclidien. La matrice $G(v_1, ..., v_N) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq N}$ est symétrique positive. Définie positive si et seulement si les v_i sont indépendants.

en effet ${}^tXGX = (\sum_i x_i v_i, \sum_i x_i v_i) \geq 0$ si $X = {}^t(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Réciproquement si G est symérique positive $N \times N$, il existe E, euclidien, et $v_1, ..., v_N \in E$ tels que $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq N}$.

En effet, $G = B^2$ pour une certaine matrice symétrique B. il suffit de prendre pour v_i les colonnes de B (car $G = B^2 = {}^tBB$).

Application : si E est euclidien, si $x \in E$, si F est un sous-espace de E de base $v_1, ..., v_n$ (non nécessairement orthonormée), alors $d(x, F) = \frac{\text{dét}\, G(v_1,...,v_n,x)}{\text{dét}\,(G(v_1,...,v_n)}$.

Dans le plan ne pas oublier le théorème de réduction simultanée :

Théorème 0.1 *Soient M, N deux matrices* **symétriques réelles** $n \times n$. *Si M est définie positive, alors il existe P inversible telle que :*

$$ {}^tPMP = I_n \text{ et } {}^tPNP = D $$

où D est diagonale. Les coefficients de la diagonale sont les racines du polynôme $\text{dét}\,(xM - N)$.

Remarque : si ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$, alors $\text{dét}\,(xI_n - D) = \text{dét}\,({}^tP(xM - N)P) = \text{dét}\, P^2 \text{dét}\,(xM - N)$ d'où l'assertion sur les coefficients diagonaux de D ...

Et la classification des formes quadratiques réelles :

Théorème 0.2 *Si M est une matrice symétrique réelle $n \times n$ alors $M = {}^tPDP$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D est diagonale avec des 0, des 1 et des -1 sur la diagonale. Le nombre de coefficients non nuls de Dest le rang de M et la forme quadratique associée à M :*

$$ x \mapsto {}^txMx $$

est de signature (p,q) avec p = nombre de 1 et q = nombre de -1 sur la diagonale D.

À PROPOS DES MATRICES ANTISYMÉTRIQUES RÉELLES :

Proposition 0.3 *Soit A une matrice antisymétrique réelle $n \times n$ Alors A^2 est symétrique positive et donc le spectre de A est dans $i\mathbb{R}$.*

Démonstration : En effet pour tout vecteur X, ${}^tXA^2X = -{}^t(AX)(AX) \leq 0$.
<u>*q.e.d.*</u>

Proposition 0.4 *L'application $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ $M \mapsto \exp M$ est surjective. Image réciproque de I_n : les matrices antisymétriques de spectre contenu dans $i2\pi\mathbb{Z}$.*

Pour la surjectivité, on peut utiliser la réduction des endomorphismes normaux et donc la *forme réduite* des rotations et utiliser le cas 2×2 :

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

À PROPOS DES PROJECTEURS ORTHOGONAUX ...

Soir E un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur *i.e.* $p^2 = p$. Alors $|||p||| \geq 1$. Et p orthogonal si et seulement si $|||p||| = 1$. (Ici $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne.

À propos des matrices orthogonales réelles ...

Elles sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et leurs valeurs propres sont de module 1. (On eut se ramener au cas 2×2 via la réduction des endomorphismes normaux ...)

À PROPOS DES ROTATIONS ....

Dans le plan on peut ajouter les formules de Rodrigues (*cf.* citePra) :

Si $\vec{k}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de norme 1, alors la rotation R d'axe $\vec{k}$ et d'angle t est donnée par la formule :

$$R(\vec{v}) = \cos t\vec{v} + (1-\cos t)\langle\vec{v},\vec{k}\rangle\vec{k} + \sin t\vec{k} \wedge \vec{v} \ .$$

En effet, $v = v_1 + v_2$ *avec* $v_1 = \langle v, \vec{k} \rangle \vec{k}$ *et* v_2 *orthogonal à* $\vec{k}$*. dans le plan orthogonal à* $\vec{k}$*, la rotation est la rotation usuelle du plan d'angle* t *...*

Autre formule :

$$R = \exp(t\widetilde{k})$$

où $\widetilde{k} = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\vec{k} = {}^t(k_1, k_2, k_3)$. (En effet par le théorème de Cayley Hamilton, on a :

$$\widetilde{k}^3 + \widetilde{k} = 0$$

donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \widetilde{k}^{2p} = (-1)^p \widetilde{k}^2 \text{ et } \widetilde{k}^{2p+1} = (-1)^p \widetilde{k} \ \ ;$$

d'où

$$\exp(t\widetilde{k}) = \sum_{l \geq 0} \frac{t^l}{l!} \widetilde{k}^l = 1 + (\cos t - 1)\widetilde{k}^2 + \sin t \widetilde{k} \ \ .$$

Questions

1) Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors montrer que $M = O_1 D o_2$ où O_1, O_2 sont des matrices orthogonales et D une matrice diagonale à coefficients > 0.

   Réponse : on utilise la décomposition polaire : $M = OS$ *où* S *est symétrique définie positive et la réduction des matrices symétriques :* $S = O'DO'^{-1}$*. Conclusion :* $M = OO'DO'^{-1}$*.*

2) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle $n \times n$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est orthogonale.

   embryon de réponse : A^2 *est symétrique négative donc diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs proprs* ≤ 0*. donc si* λ *est une valeur propre (complexe) de* A*,* $\lambda^2 \leq 0$*. Donc* 1 *n'est pas valeur propre de* A *donc* $I_n - A$ *est inversible* ...

3) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne de norme 1. Montrer que $I_n - 2v^tv$ est une matrice orthogonale. Quel est son déterminant ?

   Réponse : c'est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$ *(car* v *est envoyé sur* $-v$ *et si* $u \perp v$*,* u *est envoyé sur* u*. Donc de déterminant* -1

Développements possibles

Développement 1 *Toute matrice $M \in O_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme un produit de r réflexions orthogonales où $r = \mathrm{rg}\,(M - I_n)$ mais non moins.*

Si $n \geq 2$, toute rotation $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme un produit de r renversements où $r = \mathrm{rg}\,(M - I_n)$.

Application amusante : *si $s = (12...n) \in \mathfrak{S}_n$, (permutation circulaire qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3, etc, n sur 1), alors s s'écrit comme un produit de $n-1$ transpositions mais non moins !*

Pour l'application : $s = (12)...(n-1n)$ et on peut identifier s à sa matrice de permutation dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: $P_s = (\delta_{is(j)})_{1\leq i,j\leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Une transposition a une matrice de permutation qui est une réflexion orthogonale ! et $\ker(P_s - I_n)$ est de dimension 1 car $P_s - I_n$ a pour polynôme minimal $X^n - 1$ (c'est une matrice compagnon !) donc $\mathrm{rg}\,(P_s - I_n) = n-1$ ...

***Développement 2** (cf. **[6]** ou **[4]**)*

$$\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{R})/\langle (I_2, -I_2)\rangle$$

où $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) = \Big\{ M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{M}M = I_2 \Big\}$.

En particulier, le groupe SO_4/Z n'est pas simple ! (où $Z = \{\pm I_4\}$ désigne le centre). Pour ce théorème on utilise les quaternions : $\mathbb{H}$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4 : $\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ muni du produit :

$$11 = 1, 1i = i1 = i, 1j = j1 = j, 1k = k1 = k,$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

étendu par $\mathbb{R}-$bilinéarité.

On peut aussi définir $\mathbb{H}$ comme la sous-$\mathbb{R}-$algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ formée des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} .$$

Version un peu plus courte mais qui fait aussi un excellent développement : $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}_2(\mathbb{R})/\pm 1$.

***Développement 3** (cf. **[2]**) Réductions des endomorphismes normaux. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice normale au sens où $A^tA = {}^tAA$, alors il existe* *une matrice orthogonale O telle que ${}^tOAO$ est diagonale par blocs : un bloc diagonal réel et des blocs réels 2×2 de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$

où les b_k sont non nuls.

Dans le cas symétrique, on a une diagonale, dans le cas antisymétrique la diagonale est nulle (ou vide) et les $a_k = 0$, dans le cas orthogonal, la diagonale est constituée de ± 1 et les blocs 2×2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(t_k) & -\sin(t_k) \\ \sin(t_k) & \cos(t_k) \end{pmatrix}$$

***Développement 4** (cf. [4]) Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.*

On utilise que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements (i.e. *les rotations d'angle π. Si on fait ce développement, le jury posera certainement la question $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est-il simple ? Réponse non car $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq S^1$ le groupe des nombres complexes de module 1. Ou bien $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/Z$ est-il simple ? Réponse : non cf. ci-dessus*

***Développement 5** (cf. [4]) Le groupe $SO_n(\mathbb{R})/\pm 1$ est simple si $n \geq 5$.*

***Développement 6** (cf. [1]) Si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$* i.e. *il existe P inversible tel que $G \leq PO_n(\mathbb{R})P^{-1}$.*

Dans ce cas il faut savoir faire rapidement le cas où G est fini : dans ce cas il suffit de prendre q une forme quadratique définie positive et de considérer $\sum_{g \in G} q^g$ qui est clairement une forme quadratique définie positive et non dégénérée et donc $G \leq O(q)$.

***Développement 7** (cf. [4]) Les automorphismes du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont intérieurs. I.e. : si $\phi : \mathrm{SO}_3 \to \mathrm{SO}_3$ est un automorphisme de groupe, alors il existe $r \in \mathrm{SO}_3$ tel que $^\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\phi(g) = rgr^{-1}$.*

La démonstration utilise que les éléments d'ordre 2 de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont les renversements, qu'ils engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et qu'ils sont tous conjugués ...

***Développement 8** (cf. [3])* *Les groupes des isométries du cube et du tétraèdre sont respectivement S_4 et A_4.*

Définir le cube comme le cube de sommets $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et son groupe d'isométrie comme

$$G_C = \{g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \ : \ g\Big(\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1\} \Big) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1\} \ .$$

Pour le tétraèdre prendre par exemple le tétraèdre de sommets

$$\{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\} \ .$$

***Développement 9** ([5])* *Inégalités de Weyl : si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, on note*

$$l_1(M) \geq l_2(M) \geq \ldots \geq l_n(M)$$

ses valeurs propres. Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles. On a :

$$l_{i+j-1}(A+B) \leq l_i(A) + l_j(B) \ .$$

Références

[1] Alessandrini. Thèmes de géométrie. *Dunod.*

[2] X. Gourdon. Les maths en tête, algèbre. *Ellipses.*

[3] Fulton & Harris. Representation theory, a first course. *Springer, 2004.*

[4] Daniel Perrin. Cours d'algèbre.

[5] Viktor V. Prasolov. Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire. *Cassini, 2007.*

[6] E. B. Vinberg. A course in algebra*, volume 56 of* Graduate text in mathematics. *American mathematical society, 2003.*