TD — *jeudi 26 janvier*

Exercice 1 *Soit* $H := \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}\}$. *Si* $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, *on pose* $M^* := {}^t\overline{M}$.

a) *Montrer que* H *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel de dimension* 4 *et que* dét : $H \to \mathbb{R}$ *est une forme quadratique définie positive sur* H. *Déterminer le produit scalaire associé.*

b) *Montrer que* SU_2 *est un sous-groupe fermé compact connexe de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. *Indication : penser à diagonaliser !*

c) *Montrer que l'action de* $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ *sur* H *via :*

$$^{\forall}g_1, g_2 \in \mathrm{SU}_2,\ ^{\forall}h \in H,\ (g_1, g_2).h := g_1 h g_2^{-1}$$

induit un morphisme $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to O_4(\mathbb{R})$.

d) *Montrer que l'image est contenue dans* $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. *Indication : montrer que* SU_2 *est connexe ou que tout élément de* SU_2 *est un carré ...*

e) *Déterminer le noyau.*

f) *Montrer que si* $g \in \mathrm{SU}_2$, *alors l'application* $H \to H$, $h \mapsto -gh^*g$ *est une réflexion orthogonale dont on déterminera l'hyperplan.*

g) *Quel est le déterminant d'une réflexion orthogonale ? En admettant que les réflexions orthogonales engendrent* $O_4(\mathbb{R})$, *montrer que* $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4$ *est surjectif.*

h) *En déduire que* $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/Z$ *n'est pas un groupe simple* ($Z = \{\pm I_4\}$).

Exercice 2 *Soit* $r \in O_n(\mathbb{R})$.

a) *On suppose que* r *est le produit de* k *réflexions orthogonales :* $r = r_1 ... r_k$. *Montrer que* $k \geq \dim(\ker r - I_n)$.

b) *Soit* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *une permutation et soit* P_σ *la matrice de permutation associée. Démontrer que* $\dim \ker(P_\sigma - I_n) = s$ *le nombre de cycles qui apparaissent dans la décomposition de* σ *en produit de cycles à supports disjoints (on compte aussi les cycles de longueur* 1 *!).*

c) *En déduire le nombre minimal de transpositions nécessaires pour obtenir une permutation* σ.

Exercice 3 *Soit* K *un corps (éventuellement de caractéristique* > 0).

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *on note* $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ *sa matrice de permutation associée. On note* $c_k(\sigma)$ *le nombre de cycles de longueur* k *qui apparaissent dans la décomposition de* σ *en produits de cycles à supports disjoints.*

a) *Montrer que* $\dim(\ker(P_\sigma^m - I_n)) = \sum_{k=1}^n \mathrm{pgcd}(k,m)c_k(\sigma)$. *indication : commencer par* $m = 1$.

b) *Soit* $S := (\mathrm{pgcd}(i,j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. *Montrer que* $\text{dét}\, S = \varphi(1)...\varphi(n)$ *indication : on pose* $d_{ij} := 1$ *si* $j|i$ *et* 0 *sinon ; vérifier que* $S = A\mathrm{diag}(\varphi(1), ..., \varphi(n))^t A$.

c) *En déduire que* σ *et* τ *sont conjuguées dans* $\mathfrak{S}_n$ *si et seulement si* P_σ *et* P_τ *le sont dans* $\mathrm{GL}_n(K)$.

Exercice 4 *Soient* $r, r' \geq 0$, $d_1|...|d_n$ *et* $d'_1|...|d'_{n'}$ *des entiers* > 1. *On suppose que les groupes :*

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/d_n \simeq Z^{r'} \oplus \mathbb{Z}/d'_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/d'_n \simeq$$

sont isomorphes. Montrer que $r = r'$, $n = n'$ *et* $d_i = d'_i$ *pour tout* i.

Exercice 5 *Soit* M *un* $A-$*module de type fini. Soit* $f : M \to M$ *un morphisme surjectif de* $A-$*modules. On suppose que* A *est un anneau commutatif unitaire .*

On veut montrer que f *est injectif.*

a) *On définit une structure de* $A[X]-$*module sur* M *par :* $R(X).m := R(f)(m)$. *Montrer que* $IM = M$ *où* $I = (X)$.

b) *Montrer qu'il esiste* $i \in I$ *tel que* $(1 - i)M = 0$ *indication utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.*

c) *Conclure.*

Exercice 6 Sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *Soit* $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *un sous-groupe fini. On considère l'action suivante de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *:*

$$^\forall g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),\ ^\forall[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\ g.[x:y] := [ax+by : cx+dy]\ .$$

a) *Soit* g *un élément d'ordre fini de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. *Montrer que si* $g \neq 1$, g *a exactement* 2 *points fixes dans* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

b) *On pose* $Z := \{(x,g) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times G \setminus \{1\} : gx = x\}$ *; Soit* $\mathcal{P}$ *a projection de* Z *sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. *Soit* $\mathcal{P} = O_1 \cup ... \cup O_k$ *la décomposion de* $\mathcal{P}$ *en* $G-$*orbites. On note* e_i *l'ordre du stabilisateur d'un point de* O_i. *Montrer que* $|O_i| = N/e_i$ *où* $N := |G|$.

c) *En comptant* $|Z|$ *de deux façons différentes, montrer que :*

$$|Z| = N\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{e_i})\ .$$

d) *En déduire que* $\sum_i \frac{1}{e_i} = k - 2 + \frac{2}{N}$ *et que* $k = 2$ *ou* 3.

Suposons $k = 2$.

e) *Montrer que* G *fixe* 2 *points de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. *Notons-les* z_1, z_2. *Montrer qu'il existe* $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *tel que* $gz_1 = 0 := [1 : 0]$, $gz_2 = \infty := [0 : 1]$. *Montrer que* $gGg^{-1} = \langle \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$ *où* ζ *est une racine primitive* $N-$*ième de l'unité.*

On suppose que $k = 3$. *On suppose aussi* $e_1 \leq e_2 \leq e_3$.

f) *Montrer que* $(e_1, e_2, e_3; N) =$

- *i)* $(2, 2, n; 2n)$ *;*
- *ii)* $(2, 3, 3; 12)$ *;*
- *iii)* $(2, 3, 4; 24)$ *;*
- *iv)* $(2, 3, 5; 60)$.

g) *Montrer que l'action de* SU_2 *sur* H *par conjugaison induit un morphisme surjectif* $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *indication : restreindre l'action à l'orthogonal de* $\mathbb{R}I_2$ *dans* H *et pour la surjectivité, considérer les applications* $x \mapsto -gx^*g$, $g \in \mathrm{SU}_2$, *sur* $\mathbb{R}I_2^\perp$ ...

h) *Cas* $(2, 2, n; 2n)$. *Montrer qu'il existe* $g \in G$ *tel que* $gGg^{-1} = \langle \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$.

i) *Cas* $(2, 3, 3; 12)$. *Montrer qu'il existe* $g \in G$ *tel que* $gGg^{-1} = \langle \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle \simeq A_4$.

j) *Cas* $(2, 3, 4; 24)$. *Montrer qu'il existe* $g \in G$ *tel que* $gGg^{-1} = \langle \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rangle \simeq S_4$.

k) *Cas* $(2, 3, 5; 60)$. *Montrer qu'il existe* $g \in G$ *tel que* $gGg^{-1} = \langle \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Delta & -1 \end{bmatrix} \rangle \simeq A_5$. *Avec* δ *une racine primitive* $5-$*ième de l'unité et* $\Delta := 1 - \delta - \delta^{-1}$.