Représentation des groupes finis
préparation à l'agrégation

Alexis Tchoudjem

Université Lyon I

10 février 2016

1 Références

1. Vinberg, *Algebra*;
2. J. -P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*;
3. Guy Henniart, *Représentations linéaires des groupes finis, disponible ici : www.math.polytechnique.fr/xups/xups09-01.pdf*;
4. Alperin, *Groups and representations*;
5. Isaacs, *Character theory of finite groups*;
6. Fulton & Harris *Representation theory.*

Table des matières

2 Sous-espaces invariants

Soit k un corps.

Définition 1 *Une représentation $k-$linéaire d'un groupe G est un morphisme de groupes :*

$$G \to \mathrm{GL}(V) \ .$$

Si $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $S : G \to \mathrm{GL}(U)$ sont des représentations d'un groupe G, un morphisme de R vers S est une application $k-$linéaire $\phi : V \to$

U telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "R(g)"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[d, "\phi"] \\ U \arrow[r, "R(g)"] & U \end{tikzcd}$$

commute pour tout $g \in g$. Si ϕ est un isomorphisme, on dit que $R \simeq S$.

Les sous-espaces invariants jouent un rôle important dans la structure des représentations linéaires. De quoi s'agit-il ?

Définition 2 *Soit $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe G. On dit qu'un sous-espace $U \leq V$ est invariant s'il l'est vis à vis de tous les endomorphismes $R(g)$, $g \in G$.*

Si $U \leq V$ est un sous-espace invariant d'une représentation $R : G \to \mathrm{GL}(V)$, alors la *sous-représentation* $R_U : G \to \mathrm{GL}(U)$, $g \mapsto R(g)|_U$ et la *représentation quotient* $R_{V/U} : G \to \mathrm{GL}(V/U)$, $g \mapsto (v \bmod U \mapsto R(g)v \bmod U)$ sont aussi des représentations linéaires de G.

Définition 3 *Une représentation $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ est irréductible si $V \neq 0$ et s'il n'existe pas de sous-espace invariant $0 \neq U \overset{<}{\neq} V$.*

Exercice 1 *a) Les représentations de dimension 1 sont irréductibles.*

b) La représentation $R : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est irréductible.

c) La représentation $R : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ n'est pas irréductible.

d) L'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$ définit une représentation irréductible réelle de $\mathfrak{S}_4$ de dimension 3 (l'isomorphisme s'obtient en faisant agir $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$ sur ses quatre $3-$Sylow ou sur les quatre droites $\pm \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Cette dernière représentation est aussi irréductible sur $\mathbb{C}$! grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit $G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une représentation irréductible de dimension n* **impaire**. *Alors $R : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la « complexification » de R est aussi irréductible.*

Démonstration : Indication : soit $0 \neq W < \mathbb{C}^n$ un sous-espace invariant. Alors $W \cap \overline{W}$ est un sous-$\mathbb{R}-$espace invariant de $\mathbb{R}^n$ donc c'est 0. De même $W + \overline{W} \cap \mathbb{R}^n$ est un sous-espace invariant de $\mathbb{R}^n$ donc $W + \overline{W} = \mathbb{C}^n$. D'où $n = \dim W + \dim \overline{W} = 2 \dim W$ absurde ! *q.e.d.*

Exercice 2 *Soit V un $k-$espace vectoriel de base $e_1, ..., e_n$. La représentation de $\mathfrak{S}_n$ définie par $R(s)e_i := e_{s(i)}$, $s \in \mathfrak{S}_n$, est la représentation monomiale.*

a) La représentation monomiale n'est pas irréductible car elle a au moins deux sous-représentations non triviales : l'une de dimension 1 : $k(e_1 + ... + e_n)$ l'autre de dimension $n-1$: $V_0 := \{\sum_{i=1}^n x_i e_i \ : \ \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

b) La sous-représentation V_0 est irréductible en caractéristique nulle.

Remarque importante : si $\varphi : V \to U$ est un morphisme de représentations, alors $\ker \varphi$ est une sous-représentation de V et $\mathrm{Im}\varphi$ est une sous-représentation de U.

Voici une conséquence :

Théorème 2.2 *Tout morphisme entre deux représentations irréductibles est soit nul soit un isomorphisme.*

Dorénavant nous ne considérerons que les représentations de dimension finie.

Théorème 2.3 (Lemme de Schur) *Sur un corps algébriquement clos, tout endomorphisme d'une représentation irréductible est soit nul soit un multiple de l'identité.*

Corollaire 2.3.1 *Toute représentation irréductible d'un groupe abélien sur un corps algébriquement clos est de dimension 1.*

Démonstration : (exo) *q.e.d.*

Définition 4 *Une représentation linéaire $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ est complètement réductible si tout sous-espace invariant $U \leq V$ admet un supplémentaire invariant.*

Exercice 3 *a) La représentation* $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ *est complètement réductible.*

b) La représentation $S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est réductible mais non complètement.*

Théorème 2.4 *Chaque sous-représentation et chaque quotient d'une représentation complètement réductible restent complètement réductibles.*

Démonstration : (*exo*) <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 2.5 *Soit* $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ *une représentation linéaire.*
Si R *est une représentation complètement réductible, alors* V *se décompose en somme directe de sous-espaces invariants minimaux*[†].

(ii) Réciproquement, si V *est une somme* $\sum_i V_i$ *(non nécessairement directe) de sous-espaces invariants minimaux, alors* R *est une représentation complètement réductible. De plus, si* $U \leq V$ *est un sous-espace invariant, alors on peut choisir comme supplémentaire invariant une somme de certains* V_i.

Démonstration : (i) : (*exo*)
(ii) Si $V = \sum_{i=1}^n V_i$. Si $U \leq V$ est invariant. On choisit $I \leq \{1, ..., n\}$ un sous-ensemble de cardinal maximal tel que $\sum_{i \in I} V_i \cap U = 0$. Alors $U \oplus (\sum_{i \in I} V_i) = V$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 4 *a) En caractéristique nulle, la représentation monomiale est complètement réductible.*

b) En caractéristique nulle, la représentation $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(K))$, $A \mapsto (X \mapsto AXA^{-1})$ *est complètement réductible (indication : vérifier que* $\langle I_n \rangle$ *et* $\{X \in \mathcal{M}_n(K) \ : \ \mathrm{tr} M = 0\}$ *sont des sous-espaces invariants minimaux).*

Corollaire 2.5.1 *Une représentation est complètement réductible si et seulement si elle est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles.*

†. *i.e.* minimaux parmi les sous-espaces invariants non nuls

Corollaire 2.5.2 *Soit $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complètement réductible isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles $\oplus_{i=1}^n R_i$. Alors toute sous-représentation et toute représentation quotient de R est isomorphe à une somme directe $\oplus_{i\in I} R_i$ pour une partie $I \subseteq \{1, ..., n\}$.*

Théorème 2.6 (de Burnside) *Soit $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible sur un corps algébriquement clos k. Alors la sous-algèbre de $\mathrm{End}_k(V)$ engendré par les $R(g)$, $g \in G$, coïncide avec $\mathrm{End}_k(V)$.*

Démonstration : cf. Les Maths en tête, algèbre , X. Gourdon, problème IV . 7 <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 5 *Montrer que si $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible sur un corps de algébriquement clos, alors :*

a) toute forme bilinéaire non nulle invariante sur V est non dégénérée ;

b) deux telles formes sont proportionnelles ;

c) si une telle forme existe, alors elle est symétrique ou antisymétrique.

3 Complète réductibilité des représentations linéaires des groupes finis

Théorème 3.1 (théorème de Maschke) *Soit $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation $k-$linéaire d'un groupe fini G d'ordre premier à la caractéristique de k. Alors tout sous-espace invariant $U \leq V$ a un supplémentaire $G-$invariant.*

Démonstration : Soit $p : V \to U$ une projection linéaire surjective (ça existe toujours !). On pose $\pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} R(g) \circ p \circ R(g)^{-1}$. C'est un endomorphisme de V, on a $\pi \circ R(g) = R(g) \circ \pi$ pour tout $g \in G$. Donc $\ker \pi$ et π sont des sous-espaces $G-$invariants. De plus $\pi^2 = \pi$ (*exo*) Donc π est une projection et $\mathrm{Im}\pi \oplus \ker \pi = V$ avec $\mathrm{Im}\pi = U$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 6 *Démontrer que la représentation $\mathbb{C}-$ linéaire de $\mathfrak{S}_4$ induite par l'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$ est irréductible (indication : il suffit de vérifier qu'il n'y a pas de droite invariante !)*

Exercice 7 *Si p est un nombre premier, alors la sous-représentation $\{\sum_{i=1}^p x_i e_i : \sum_{i=1}^p x_i = 0\}$ de la représentation monomiale de $\mathfrak{S}_p$ est indécomposable mais n'est pas irréductible.*

On s'intéresse dorénavant aux représentations sur $\mathbb{C}$.

4 Caractères des représentations de groupes finis

Définition 5 *Soit $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation, son caractère χ_R est la fonction $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \mathrm{trace}(R(g))$.*

Remarques :

i) La terminologie est traditionnelle mais peut prêter à confusion si le groupe G est abélien !

ii) Deux représentations isomorphes ont le même caractère (*et réciproquement ? patience ...).*

iii) La fonction χ_R est clairement constante sur les classes de conjugaison.

iv) Si G est fini, alors pour tout $g \in G$, $\chi_R(g^{-1}) = \overline{\chi_R(g)}$ (*exo*)

v) Si R est la somme directe de deux sous-représentations R_1 et R_2, alors $\chi_R = \chi_{R_1} + \chi_{R_2}$.

Exercice 8 *$\chi_R(1)$ est la dimension de la représentation R.*

5 L'espace hermitien des fonctions centrales

Soit G un groupe fini. On note $\mathcal{FC}(G)$ le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des « *fonctions de classe* » *i.e.* des fonctions $G \to \mathbb{C}$ constantes sur les classes de conjugaison *i.e.* des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ telles que $f(gh) = f(hg)$ pour tous $g, h \in G$.

On munit $\mathbb{C}^G$ du produit scalaire hermitien :

$$^\forall f, \varphi \in \mathbb{C}^G,\ \langle f, \varphi\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f(g)}\varphi(g)\ .$$

On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G.

À l'aide du lemme de Schur, on peut démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 5.1 *La famille $(\chi_R)_{R\in \mathrm{Irr}(G)}$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathcal{FC}(G)$.*

En particulier, le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G est aussi le nombre de classes de conjugaison de G !

Remarque : pour toute fonction $f \in \mathcal{FC}(G)$, $f = \sum_{R\in\mathrm{Irr}(G)}\langle\chi_R, f\rangle\chi_R$.

Les χ_R, $R \in \mathrm{Irr}(G)$, sont appelés les *caractères irréductibles* de G.

Les valeurs des $(\chi_R)_{R\in\mathrm{Irr}(G)}$ sont présentées sous forme de tableau, appelé *table des caractères de* G, dont la première ligne indique les classes de conjugaison de G (chaque classe est représentée par un de ses éléments et on indique aussi le cardinal de la classe ; et la première colonne indique la liste des χ_R. On inscrit le coefficient $\chi_R(g)$ à l'intersection de la colonne g et de la ligne χ_R).

Exercice 9 (table des caractères de $\mathfrak{S}_3$)

	$1:1$	$(12):3$	$(123):2$
χ_1	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1
χ_{R_0}	2	0	-1

Exercice 10 *Déterminer la table des caractères de D_4, groupe diédral d'ordre 8.*

Nombreuses et considérables sont les conséquences du théorème précédent. Par exemple :

(1) Deux représentations R et R' de G sont isomorphes si et seulement si leurs caractères sont égaux *(ce qui justifie le terme caractère).*

(2) Si R est une représentation de G, alors R est somme directe de sous-repreésentations irréductibles R_i. Dans cette décomposition, le nombre de R_i dans une classe $\rho \in \mathrm{Irr}(G)$ donnée est $\langle R, \rho\rangle$.

(3) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation R soit irréductible est $\langle \chi_R, \chi_R\rangle = 1$.

(4) Plus généralement, si une fonction $f \in \mathcal{FC}(G)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères irréductibles de G, alors f est un caractère irréductible si $\chi(1) \geq 0$ et $\langle \chi, \chi\rangle = 1$.

(5) Avec un peu de théorie des nombres *(les $\chi_R(g)$ sont des entiers algébriques pour toute représentation R et tout $g \in G$!)*, la dimension de toute représentation irréductible de G divise $\frac{|G|}{|Z(G)|}$ (*cf.* Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*).

(6) le théorème de Burnside ! i.e. *: tout groupe fini d'ordre $p^a q^b$, où p, q sont des nombres premiers et $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ est résoluble !*

On note $\mathbb{C}G$ le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}^G$ de base $e_g : G \to \mathbb{C}$, $h \mapsto \delta_{g,h}$, $g \in G$, muni du produit $\mathbb{C}-$bilinéaire $e_g e_h := e_{gh}$.

Exercice 11 *En considérant la représentation régulière de G : $R_G : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}G)$, $^{\forall}g \in G$, $R_G(g)(e_h) = e_{gh}$. Montrer que :*

$$\sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \dim^2 R = |G|$$

$$^{\forall}1 \neq g \in G, \sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \dim R \chi_R(g) = 0 \ .$$

Lemme 5.2 *Si $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation, on note $R^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$, $g \mapsto {}^tR(g^{-1})$ la représentation duale . On a $\chi_R = \overline{\chi_{R^*}}$ et R est irréductible $\Leftrightarrow$ R^* l'est !*

Démonstration : (exo) *q.e.d.*

Démonstration du résultat fondamental :

1) Soient $R : G \to \mathrm{GL}(V)$, $R' : G \to \mathrm{GL}(V')$ deux représentations irréductibles non isomorphes. Soit $f : V \to V'$ une application $\mathbb{C}-$linéaire. Alors $\sum_{g \in G} R'(g) f R(g)^{-1} : V \to V'$ est $G-$équivariante donc nulle d'après le lemme de Schur.
   Soit $e_1, ..., e_n$ une base V et soit $e'_1, ..., e'_{n'}$ une base de V'. Soit f l'endomorphisme élémentaire « $E_{i,j}$ » pour $1 \leq i \leq n'$, $1 \leq j \leq n$.
   Alors dans les bases e, e' le k, lème coefficient de la matrice $\sum_{g \in G} R'(g) f R(g)^{-1}$ est $\sum_{g \in G} R'(g)_{ki} R(g^{-1})_{jl} = 0$ (pour tous i, j, k, l). Donc :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_R(g)} \chi_{R'}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^{n} R(g^{-1})_{j,j} \sum_{i=1}^{n'} R'(g)_{i,i}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n'} \underbrace{\sum_{g \in G} R(g^{-1})_{j,j} R'(g)_{i,i}}_{=0} = 0 \ .$$

2) De même, on montre que $\langle \chi_R, \chi_R \rangle = 1$ si $R \in \mathrm{Irr}(G)$.
3) Pour montrer que les χ_R, $R \in \mathrm{Irr}(G)$ engendrent $\mathcal{FC}(G)$, il suffit de montrer que si f est une fonction centrale orthogonale à tous les χ_R, $R \in \mathrm{Irr}(G)$, alors f est nulle. Soit f une telle fonction.
   Posons $F_R := \sum_{g \in G} f(g) R(g)$ pour toute représentation R de G. On a :

$$^{\forall}h \in G, \ F_R R(h) = \sum_{g \in G} f(g) R(gh) = \sum_{g \in G} f(gh^{-1}) R(g)$$

$$= \text{(car } f \text{ est une fonction centrale !)} \sum_{g \in G} f(h^{-1}g) R(g) = \sum_{g \in G} f(g) R(hg)$$

$$= R(h)F_R \ .$$

Donc si R est irréductible F_R est une homothétie. Or, $\mathrm{trace(F_R)} = |G|\langle \chi_{R^*}, f\rangle = 0$. Donc $F_R = 0$. Or toute représentation est somme directe d'irréductibles donc $F_R = 0$ pour toute représentation R. En particulier pour la représentation régulière R_G. En particuleir, dans $\mathbb{C}G$, $F_{R_G}(e_1) = \sum_{g \in G} f(g)e_g = 0 \Rightarrow f = 0$.

q.e.d.

Exercice 12 *Trouver la table des caractères de* $\mathfrak{S}_4$.

Réponse :

	$1:1$	$(12):6$	$(12)(34):3$	$(123):8$	$(1234):6$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	1	-1	0	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	-1
χ_{sign}	1	-1	1	1	-1

Exercice 13 *Le groupe des quaternions d'ordre* 8 *a la même table de caractères que* D_4 *bien que non isomorphe. Jusitifer cette affirmation.*

Exercice 14 *Démontrer cette autre formule d'orthogonalité :*

$$^\forall g \in G, \sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \chi_R(g)\chi_R(g^{-1}) = \frac{|G|}{|C|}$$

où C *est la classe de conjugaison de* g*, et :*

$$^\forall g, h \in G \textit{ non conjugués }, \sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \chi_R(g)\chi_R(h^{-1}) = 0 \ .$$

Indication : soit C *une classe de conjugaison ; on considère la fonction centrale* $1_C : g \mapsto 1$ *si* $g \in C$*,* 0 *sinon. On a* $1_C = \sum_{R \in irr(G)} x_R \chi_R$ *où* $x_R = \langle \chi_R, 1_C\rangle = \frac{|C|}{|G|}\overline{\chi_R(C)}$ *où* $\chi_R(C)$ *est la valeur de* χ_R *sur* C *...*

Exercice 15 *Soit* G *un groupe fini et* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *une représentation irréductible (sur* $\mathbb{C}$ *de dimension* d*. Alors nous allons montrer que* $d||G|$*. On note* χ *le caractère de* ρ*.*

a) Soit C une classe de conjugaison de G. Alors l'élément $\sum_{g\in C} g$ est dans le centre de l'algèbre $\mathbb{C}G$.

b) En déduire qu'il existe un scalaire λ tel que pour tout $v \in V$, $\sum_{g\in C} \rho(g)v = \lambda v$ indication : le lemme de Schur !

c) Montrer que $\lambda = \frac{|C|\chi(C)}{d}$ où $\chi(C)$ est la valeur de χ sur la classe de conjugaison C.

d) Déduire du fait que $\sum_{g\in C} g$ induit un endomorphisme du $\mathbb{Z}-$module de type fini $\mathbb{Z}G$ que λ est un entier algébrique (indication : V est un sous-espace stable de $\mathbb{C}G$ donc λ est une valeur propre de $\sum_{g\in C} g$)..

e) En utilisant que $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, montrer que $\frac{|G|}{d}$ est un entier algébrique et conclure.

Exercice 16 *Trouver la table des caractères du groupe alterné A_4. Existe-t-il des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ dont la restriction à A_4 est réductible ?*

6 Table des caractères de A_5

cf. Alperin, Groups and representations

1. Déterminer les classes de conjugaison de A_5 et donner leur cardinal.
2. Il y a un unique caractère irréductible de A_5 de degré 1, noté χ_1.
3. Donner un caractère irréductible de A_5 de degré 4. On le note χ_2.
4. Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des parties de cardinal 2 de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pour chaque $I \in P_2$ on note e_I un le Iième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{P_2}$. On définit une représentation $\rho : A_5 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{P_2})$ par $\rho(g)(e_I) := e_{g(I)}$.
   Donner le caractère χ_ρ associé.
5. Montrer que $\chi_\rho = \chi_1 + \chi - 2 + \chi_3$ où χ_3 est un caractère irréductible de degré 5.
6. Montrer qu'il reste à trouver deux caractères irréductibles de degré 3.
7. Compléter la table des caractères de A_5 :

χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	-2	1	-1	-1
χ_3	5	3	-1	0	0
χ_4	3	a	c	e	e'
χ_5	3	b	d	f	f'

7 Théorème de Burnside

cf. Alperin, groups and representations

Théorème 7.1 *Soit G un groupe d'ordre $p^a q^b$ où $a, b \geq 1$ et p, q sont des nombres premiers. Alors G est résoluble.*

Exercice 17 *Donner des exemples de groupes simples non abéliens dont l'ordre a trois facteurs premiers.*

Démonstration : (sous forme d'exercice) Par récurrence sur $a+b$. On peut bien sûr supposer $p \neq q$.

C'est évident si $a+b \geq 1$. Supposons $a+b \geq 2$ et que le théorème est vrai pour a', b' tels que $a'+b' < a+b$.

a) *Soit Q un $q-$Sylow de G. Justifier qu'il existe $1 \neq g \in G$ tel que $Q \leq C(g)$ le centralisateur de g.*
b) *Montrer que $[G : C(g)] = p^n$ pour un certain $n \geq 0$.*
c) *Conclure si $n = 0$.*
d) *Supposons $n > 0$. Soit C la classe de conjugaison de g. Montrer que $\frac{|C|\chi(g)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique pour tout caractère irréductible de G.*
e) *Montrer, à l'aide d'une formule d'orthogonalité, qu'il existe un caractère irréductible χ de G tel que $p \not| \chi(1)$ et $\chi(g) \neq 0$.*
f) *Montrer que $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique de module ≤ 1.*
g) *Montrer que tous les conjugués algébriques de $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ sont de module ≤ 1.*
h) *En faisant un produit, montrer que $|\chi(g)| = \chi(1)$.*
i) *Montrer que si ρ est la représentation irréductible de G correspondant à ρ, $\rho(g)$ est une homothétie.*
j) *Montrer que $g \in Z(G)$ et conclure !*

q.e.d.

Exercice 18 *Montrer que les tables de caractères des groupes S_n sont à coefficients entiers.*

Indication :

a) *Montrer que si $g \in \mathfrak{S}_n$ est d'ordre m, alors g et g^k sont conjugués pour tout k premier avec m.*

b) *On note ζ_m une racine primitive mième de l'unité. Montrer que si g est d'ordre m, alors $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ et en déduire que les conjugés algébriques de $\chi(g)$ sont de la forme $\chi(g^k)$ pour un k premier à m*

c) *Conclure. Remarque, on peut construire directement les représentations irréductibles de S_n sur $\mathbb{Q}$ (cf. Fulton & Harris).*

Exercice 19 *cf. Isaacs. Soit Q_8 le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

a) *Montrer que Q_8 est d'ordre 8 et que sa table de caractères est à coefficients entiers.*

b) *Montrer que néanmoins, l'unique représentation irréductible de Q_8 de degré 2 n'est pas réalisable sur $\mathbb{R}$ i.e. si $\rho : Q_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation irréductible, alors $\rho(Q_8) \not\subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.*

8 Représentations induites

Soient $H \leq G$. Soit $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ une représentation du sous-groupe H. Comment construire des représentations (éventuellement irréductibles) de G à partir de ρ ?

Définition 6 *On note $\mathrm{Ind}_H^G(W) := \mathrm{Ind}_H^G(\rho) := \{f : G \to W \ : \ ^\forall h \in H, ^\forall g \in G, f(hg) = \rho(h)(f(g))\}$. C'est une représentation de G pour l'action :*

$$^\forall x \in G,\ ^\forall g \in G,\ ^\forall F \in \mathrm{Ind}_H^G(W),\ g.F(x) := F(xg^{-1}) \ .$$

En général, si ρ est irréductible, la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ n'est pas forcément irréductible mais on peut souvent analyser ses composantes irréductibles.

Exercice 20 *Vérifier que $\mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, W)$ où $\mathbb{C}H$ agit sur $\mathbb{C}G$ par multiplication à gauche et $\mathbb{C}G$ sur lui même par multiplication à droite.*

Proposition 8.1 *Il existe un morphisme de $\mathbb{C}H-$modules : $\varphi : W \to \mathrm{Ind}_H^G(W)$,* $w \mapsto \begin{cases} g.w & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{si } g \notin H \end{cases}$ *Ce morphisme induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G(V))$$

pour tout $G-$module V.

Exercice 21 *Vérifier que si χ est le caractère de ρ, alors le caractère de* $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ *est :*

$$^{\forall}x \in G,\ Ind_H^G(\chi_\rho)(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ gxg^{-1} \in H}} \chi_\rho(gxg^{-1}) \ .$$

Exercice 22 *Décrire les représentations induites* $\mathrm{Ind}_{C_n}^{D_n}(\rho_h)$ *où* $C_n \leq D_n$ *est le sous-groupe distingué cyclique d'indice* 2 *dans le groupe diédral, et* ρ_h *sont les représentations de* C_n *de dimension* 1*.*

Index