COHOMOLOGIE DES FIBRÉS EN DROITES SUR LES VARIÉTÉS MAGNIFIQUES DE RANG MINIMAL

par Alexis TCHOUDJEM

Résumé. — Le théorème de Borel-Weil-Bott décrit la cohomologie des fibrés en droites sur les variétés de drapeaux. On généralise ici ce théorème à une plus grande classe de variétés projectives : les variétés magnifiques de rang minimal.

Abstract (*Cohomology of line bundles over wonderful varieties of minimal rank*)
The Borel-Weil-Bott theorem describes the cohomology of line bundles over flag varieties. Here, one generalizes this theorem to a wider class of projective varieties : the wonderful varieties of minimal rank.

Table des matières

Villeurbanne, le 2 juillet 2007
Alexis TCHOUDJEM, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon I, Boulevard du Onze Novembre 1918, 69622 Villeurbanne, FRANCE
Adresse électronique : Alexis.Tchoudjem@math.univ-lyon1.fr
Classification mathématique par sujets (2000). — 14F10, 14F17, 14L40, 14M15, 17B10.
Mots clefs. — théorème de Borel-Weil-Bott, cohomologie à support, variétés sphériques, variétés magnifiques, variétés de drapeaux, complexe de Grothendieck-Cousin, cohomologie des fibrés en droites, modules de Verma.

Introduction

On se place sur un corps **k** algébriquement clos de caractéristique nulle et on considère un groupe linéaire G semi-simple et connexe sur **k**.

On se donne une variété projective X munie d'une action de G et un fibré en droites[(†)] $\pi : L \to X$. On suppose que π est $G-$linéarisé *i.e.* : G agit sur L, π est $G-$équivariant et l'action de G est linéaire dans les fibres de π.

La suite des groupes de cohomologie $H^d(X, L)$ ($d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) forme alors une suite de représentations de dimension finie du groupe G.

Quelles sont ces représentations du groupe G ?

En degré $d = 0$, *c-à-d* pour l'espace des sections globales, on trouve dans [Brion89] une description complète pour le cas où la variété X est *sphérique* (*i.e.* normale et avec une orbite ouverte d'un sous-groupe de Borel de G). Mais, en degré d quelconque, il n'y a pas de réponse dans un cadre aussi vaste.

Néanmoins, lorsque X est homogène, autrement dit une variété de drapeaux, il y a le théorème de Borel-Weil-Bott qui décrit très simplement les groupes de cohomologie $H^d(X, L)$: ils sont tous nuls sauf au plus en un degré, où l'on obtient une représentation irréductible de G.

On a aussi une description explicite dans le cas des compactifications de groupes (*i.e.* des compactifications de l'espace homogène $K \times K/K$ pour un groupe semi-simple K), *cf.* [Kato] et [T].

Le but de cet article est de généraliser le théorème de Borel-Weil-Bott à la classe des *variétés magnifiques de rang minimal*. Les variétés magnifiques ont été introduites dans [DeConcini-Procesi] et [Luna96]. D'après [Luna96], les variétés magnifiques sont toutes sphériques. Les variétés magnifiques de rang minimal sont particulièrement étudiées dans [Ressayre]. Cette classe de variétés, dont nous rappellerons la définition, comprend notamment les variétés de drapeaux et les compactifications magnifiques au sens de [DeConcini-Procesi] des espaces homogènes $K \times K/K$ (K est un groupe adjoint), PGL_{2n}/PSp_{2n}, E_6/F_4.

Afin d'obtenir la description des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur une variété X magnifique et de rang minimal, on utilise une décomposition de X en cellules de Bialynicki-Birula. On fait ensuite intervenir un complexe de Grothendieck-Cousin qui met en jeu des groupes de cohomologie à support.

(†) en fait, dans l'article on raisonnera plutôt avec des faisceaux inversibles

Si on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, ces groupes de cohomologie à support sont naturellement des $\mathfrak{g}-$modules. L'étude de ces $\mathfrak{g}-$modules et de la décomposition cellulaire de la variété X se trouve simplifiée quand on se place dans le cadre des variétés magnifiques de rang minimal. Et cela suffit pour arriver au résultat.

Cette méthode est celle utilisée dans [Kato] et [T] pour obtenir, pour chaque groupe adjoint K, la cohomologie des fibrés en droites sur la compactification de l'espace homogène $K \times K/K$. On ajoute ici l'étude de certaines courbes irréductibles sur la variété X (*cf.* les sections 9 et 10) et cela permet de traiter ensemble les cas de toutes les variétés magnifiques de rang minimal.

Avant d'énoncer le théorème principal (le théorème 3.1) de cet article on va introduire quelques notations et rappeler quelques définitions :

1. Notations concernant le groupe

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe et simplement connexe sur $\mathbf{k}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On choisit B un de ses sous-groupes de Borel et T un tore maximal de B ; on appelle B^- le sous-groupe de Borel opposé à B, relativement à T (*i.e.* tel que $B^- \cap B = T$). Soient Φ et W le système de racines et le groupe de Weyl de (G, T). Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on note $\alpha^\vee : \mathbf{k}^* \to T$ la coracine correspondante. On notera Φ^+ l'ensemble des racines positives relativement à B, ρ la demi-somme des racines positives, et, si $w \in W$, on pose $w * \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$ pour tout caractère λ de T. Soient Δ la base de Φ définie par B et l la fonction longueur correspondante sur W.

Soit $\mathfrak{X}$ le réseau des caractères de T. Étant donnés un caractère λ de T et un sous-groupe à un paramètre $\nu : \mathbf{k}^* \to T$, on notera $\langle \lambda, \nu \rangle$ l'unique entier tel que :

$$\forall\, s \in \mathbf{k}^*, \lambda(\nu(s)) = s^{\langle \lambda, \nu \rangle} \ .$$

On dira qu'un caractère λ de T est *dominant* si pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ et qu'il est *régulier* si pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \neq 0$.

Soit $(\omega_\delta)_{\delta \in \Delta}$ la base des poids fondamentaux ; elle est formée des caractères de T qui vérifient :

$$\forall\, \delta, \epsilon \in \Delta, \langle \omega_\delta, \epsilon^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = \epsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque λ est un caractère de T tel que $\lambda + \rho$ est régulier, il existe un unique $w_\lambda \in W$ tel que $w_\lambda * \lambda$ est un caractère dominant. Dans ce cas, on note $\lambda^+ := w_\lambda * \lambda$ ce poids dominant et on pose : $l(\lambda) := l(w_\lambda)$.

Pour tout caractère dominant λ de T, on note $L(\lambda)$ le $G-$module irréductible de plus haut poids λ.

Enfin, on notera $(\cdot,\cdot)$ un produit scalaire $W-$invariant sur $\mathfrak{X}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}$.

2. Variétés magnifiques

Suivant [Luna96], une variété algébrique X munie d'une action du groupe G est appelée *magnifique* si :

1) X est lisse et complète ;
2) G possède une orbite dense, X_G^0, dans X dont le bord, $X \setminus X_G^0$ est une réunion de diviseurs premiers D_i, $i \in \{1, ..., r\}$, lisses, à croisements normaux et d'intersection non vide ;
3) pour tous points $x, x' \in X$, si $\{i \;:\; x \in D_i\} = \{i \;:\; x' \in D_i\}$, alors $G.x = G.x'$.

*

En fait, la $G-$ variété X est entièrement déterminée par son orbite ouverte X_G^0. On dit aussi que X est la *compactification magnifique* de l'espace homogène X_G^0.

Dans le point 2) de la définition les D_i sont les *diviseurs limitrophes* de X et l'entier r est le *rang* de la variété magnifique X. La variété magnifique X a exactement 2^r orbites de G dont une seule est fermée. Nous noterons F cette orbite.

Par exemple, les variétés magnifiques de rang 0 sont les variétés de drapeaux G/P où P est un sous-groupe parabolique de G. Une autre famille de variétés magnifiques est formée par les compactifications magnifiques de groupes adjoints construites dans [DeConcini-Procesi, §3.4]. Dans ce cas le rang r est le rang du groupe.

Les variétés de drapeaux et les compactifications de groupes font partie d'une classe commune de variétés magnifiques : les *variétés magnifiques de rang minimal*. Nous rappelons leur définition ci-dessous.

2.1. Variétés magnifiques de rang minimal.

— Soit X une $G-$variété magnifique.

L'orbite ouverte de G dans X est isomorphe à l'espace homogène G/H où H est un sous-groupe fermé de G. Le rang de X vérifie toujours :

$$r \geq \mathrm{rang}(G) - \mathrm{rang}(H)$$

(où le rang d'un groupe est la dimension de ses tores maximaux)

Définition 1. — *Lorsque* $r = \mathrm{rang}(G) - \mathrm{rang}(H)$, *on dit que* X *est une variété magnifique de rang minimal.*

Il résulte de la classification de N. Ressayre (*cf.* [Ressayre]) que toutes les variétés magnifiques de rang minimal s'obtiennent par produit, par recouvrement fini ou par induction parabolique (*cf.* [Luna01, §3.4] ou la définition 7 p. 38) à partir des variétés de drapeaux et des compactifications magnifiques des espaces homogènes suivants :

$$K \times K/K \text{ pour un groupe } K \text{ adjoint } ;$$

$$PGL_{2n}/PSp_{2n}\ , ; n \geq 2\ ;$$
$$E_6/F_4\ ;$$
$$PSO_{2n}/PSO_{2n-1}\ ;$$
$$SO_7/G_2$$

(pour se ramener au cas simplement connexe, les compactifications de ces espaces homogènes sont munies de l'action du revêtement universel de G).

2.2. Racines sphériques. — Soit X une $G-$variété magnifique. Comme pour le groupe G, on va fixer quelques notations concernant la variété X : notamment un sous-groupe parabolique Q_X de G et un ensemble fini Σ_X de caractères de T : les *racines sphériques* de X.

Pour définir Q_X et Σ_X, on note $\mathbf{z}$ le *point-base* de X ; c'est l'unique point fixe du sous-groupe de Borel B^-. Le sous-groupe parabolique Q_X est le stabilisateur de $\mathbf{z}$ dans G.

Le point $\mathbf{z}$ est dans l'orbite fermée F de X et si on note $T_{\mathbf{z}}X$ et $T_{\mathbf{z}}F$ les espaces tangents en $\mathbf{z}$ de X et de F, Σ_X est l'ensemble des poids du tore $T \subseteq Q_X$ dans le quotient $T_{\mathbf{z}}X/T_{\mathbf{z}}F$.

Dorénavant, on notera $Q = Q_X$ le sous-groupe parabolique associé à X.

Remarque : en fait, l'ensemble des racines sphériques, Σ_X, est une base d'un système de racines (*cf.* [Brion90a, §3.4 et 3.5])

2.3. Groupe de Picard. — Soit X une $G-$variété magnifique.

Rappelons ici comment est associé un caractère du tore à chaque faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X.

Un tel faisceau admet une unique $G-$linéarisation sur X car le groupe G est simplement connexe (*cf.* [Knop-Kraft-Vust, lem. 2.2 et pro. 2.3]).

Le faisceau $\mathscr{L}$ étant $G-$linéarisé, le sous-groupe parabolique Q opère sur la fibre $\mathscr{L}|_{\mathbf{z}}$ (en le point-base $\mathbf{z}$) via un caractère λ : on appelle ce caractère le *poids du faisceau* $\mathscr{L}$.

On notera

$$\mathrm{pic}(X) \subseteq \mathfrak{X}$$

le sous-réseau des caractères de T qui sont le poids d'un faisceau inversible sur X.

*

Remarques :

1^o) Notons $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Pic}(F)$ les groupes de Picard de la variété X et de son orbite fermée F. Si on note $\mathfrak{X}_Q \subseteq \mathfrak{X}$ le réseau des caractères de Q, comme F est isomorphe à la variété de drapeaux G/Q, on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}(F) \simeq \mathfrak{X}_Q$$

et $\mathrm{pic}(X)$ est l'image de $\mathrm{Pic}(X)$ par la restriction :

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(F) \simeq \mathfrak{X}_Q \subseteq \mathfrak{X} \ .$$

De plus, d'après [DeConcini-Procesi, pro. 8.1], la restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(F)$ et donc $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{pic}(X)$ sont injectives, autrement dit un faisceau inversible sur X est uniquement déterminé par son poids.

2^o) Si H est le groupe d'isotropie d'un point de la $G-$orbite ouverte de X alors, d'après [Brion-Luna-Vust, lemme 2.2], $\mathrm{pic}(X)$ est le sous-réseau de $\mathfrak{X}$ engendré par les caractères dominants λ tels que le $G-$module simple $L(\lambda)$ ait au moins un $H-$vecteur propre.

*

3. Cohomologie des fibrés en droites

Maintenant que sont fixées les notations concernant le groupe G, la variété magnifique X et les faisceaux inversibles sur X, on va énoncer le théorème principal de ce texte. Il décrit, pour toutes les variétés magnifiques de rang minimal, les groupes de cohomologie de tous les faisceaux inversibles.

Théorème 3.1. — *Soit X une variété magnifique de rang minimal. En tout degré $d \geq 0$ et pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}_\lambda$ sur X de poids $\lambda \in \mathrm{pic}(X)$, on a un isomorphisme de $G-$modules :*

$$H^d(X, \mathscr{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{J \subseteq \Sigma_X} \ \bigoplus_{\substack{\mu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \mu + \rho \ \textit{régulier} \\ l(\mu) + |J| = d}} L(\mu^+)$$

où Σ_X est l'ensemble (fini) des racines sphériques de X et pour toute partie J de Σ_X,

$$R_J := \sum_{\gamma \in J} \mathbb{Z}_{>0}\gamma + \sum_{\gamma \in \Sigma_X \setminus J} \mathbb{Z}_{\leq 0}\gamma$$

$$\textit{et } \Omega_J := \Big\{ \ \mu \in \mathrm{pic}(X) \ : \ \{\gamma \in \Sigma_X \ : \ (\mu + \rho, \gamma) < 0\} = J \ \Big\} \ .$$

*

Remarques :

Ce théorème généralise un des résultats de [Kato] et [T] qui concerne les compactifications de groupes adjoints. On retrouve aussi quelques résultats déjà connus (dans le cadre plus géneral des variétés sphériques) :

– en degré 0 :
$$H^0(X, \mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_\mu L(\mu)$$
où μ décrit les poids dominants de l'ensemble $\lambda + \sum_{\gamma \in \Sigma_X} \mathbb{Z}_{\leq 0}\gamma$ (*cf.* [Brion89, pro. 2.4]) ;

– lorsque λ est dominant tous les groupes de cohomologie supérieure (*i.e.* en degré $d > 0$) sont nuls (*cf.* [Brion90b, §2.1, cor. 1]) ;

– les multiplicités des $G-$modules irréductibles qui apparaissent dans les groupes de cohomologie $H^d(X, \mathscr{L}_\lambda)$ peuvent être > 1 (*cf.* [T, §2.2, rem. 6]) ;

– les multiplicités sont bornées par $|W|$, indépendamment du faisceau $\mathscr{L}_\lambda$ (en effet, si μ_0 est un caractère dominant, les caractères μ tels que $\mu^+ = \mu_0$ sont tous dans l'orbite $W * \mu_0$) (*cf.* aussi [Brion94, th. 3.4]).

*

(*Dualité de Serre*)

Notons $2\rho_X := \sum_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha \text{ non racine de } Q_X}} \alpha$ et posons : $J^* := \Sigma_X \setminus J$ et $\mu^* := -\mu - 2\rho_X$, pour toute partie J de Σ_X et tout $\mu \in \mathrm{pic}(X)$. On vérifie la dualité de Serre grâce à l'involution :
$$(J, \mu) \mapsto (J^*, \mu^*)$$
de l'ensemble $\mathcal{P}(\Sigma_X) \times \mathrm{pic}(X)$.

3.1. Cas particuliers. —

3.1.1. Variétés de drapeaux. — Dans le cas des variétés de drapeaux $X = G/Q$, où Q est un sous-groupe parabolique de G, il n'y a pas de racines sphériques : $\Sigma_X = \emptyset$ et donc :
$$H^d(X, \mathscr{L}_\lambda) = \begin{cases} L(\lambda^+) & \text{si } l(\lambda) = d\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On retrouve donc le théorème de Borel-Weil-Bott.

3.1.2. Exemples de base. — On appelle ainsi les compactifications magnifiques des espaces homogènes cités à la page 5. Pour ces variétés, on a explicité dans les tableaux ci-après la plupart des éléments qui apparaissent dans la formule du théorème (on note G_{ad} la partie adjointe de G, *i.e.* le quotient de G par son centre) :

X	$\overline{G_{ad}}$
G	G
$G-$ orbite ouverte	$G_{ad} \times G_{ad}/G_{ad}$
$\dim X$, $\mathrm{rang}(X)$	$\dim G, \mathrm{rang}(G)$
Σ_X	$\{(\alpha, -\alpha) \ : \ \alpha \in \Delta\}$
$\mathrm{pic}(X)$	$\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)$
$\{\mu \in \mathrm{pic}(X) \ : \ \mu + \rho$ régulier$\}$	$\left\{ \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha(\omega_\alpha, -\omega_\alpha) \ : \ \sum_{\alpha\in\Delta}(m_\alpha+1)\omega_\alpha \text{ régulier} \right\}$
longueur	$l(\sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha(\omega_\alpha, -\omega_\alpha)) = 2l(\sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha\omega_\alpha)$

TABLE 1

X	$\overline{PGL_{2n}/PSp_{2n}}$, $n\geq 2$ « variété des $2-$formes alternées complètes »
G	SL_{2n}
$G-$ orbite ouverte	PGL_{2n}/PSp_{2n}
$\dim X$, $\mathrm{rang}(X)$	$2n^2-n-1, n-1$
Σ_X	$\{\alpha_{2i-1} + 2\alpha_{2i} + \alpha_{2i+1} \ : \ 1 \leq i \leq n-1\}$
$\mathrm{pic}(X)$	$\bigoplus_{1\leq i\leq n-1} \mathbb{Z}\omega_{2i}$
$\{\mu \in \mathrm{pic}(X) \ : \ \mu + \rho$ régulier$\}$	$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i\omega_{2i} \ : \ \sum_{i=1}^{n-1}(m_i+1)\omega_i \text{ régulier} \right\}$
longueur	$l(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\omega_{2i}) = 4l(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\omega_i)$

TABLE 2. (dans les 2 dernières lignes de ce tableau, $\sum_{i=1}^{n-1}(m_i+1)\omega_i$ et $\sum_{i=1}^{n-1} m_i\omega_i$ sont des combinaisons linéaires des poids fondamentaux du système de racine de type A_{n-1})

Dans chacun de ces tableaux, les racines simples et leurs poids fondamentaux sont numérotés comme dans [Bourbaki, planches I,II,IV,V].

*

X	$\overline{E_6/F_4}$
G	E_6
$G-$ orbite ouverte	E_6/F_4
$\dim X$, rang(X)	$26, 2$
Σ_X	$\{2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5, \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6\}$
pic(X)	$\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_6$
$\{\mu \in$ pic(X) : $\mu+\rho$ régulier$\}$	$\{m_1\omega_1+m_6\omega_6 \;:\; m_1+1, m_6+1, m_1+m_6+2 \neq 0\}$
longueur	$l(m_1\omega_1+m_6\omega_6) = 8l(m_1\omega_1+m_6\omega_2)$

TABLE 3. (dans la dernière ligne de ce tableau, $m_1\omega_1+m_6\omega_2$ est une combinaison linéaire des poids fondamentaux du système de racines de type A_2)

X	$\mathbb{P}^{2n-1}$, $n \geq 3$	$\mathbb{P}^7$
G	$Spin_{2n-1}$	$Spin_7$
$G-$ orbite ouverte	$\mathbb{P}^{2n-1}$, $n \geq 3$	$\mathbb{P}^7$
$\dim X$, rang(X)	$2n-1, 1$	$7, 1$
Σ_X	$2\omega_1$	$2\omega_3$
pic(X)	$\mathbb{Z}\omega_1$	$\mathbb{Z}\omega_3$
$\{\mu \in$ pic(X) : $\mu+\rho$ régulier$\}$	$\left\{m\omega_1 \;:\; \begin{matrix} m \leq -2n+2 \\ \text{ou } m \geq 0 \end{matrix}\right\}$	$\left\{m\omega_3 \;:\; \begin{matrix} m \leq -6 \\ \text{ou } m \geq 0 \end{matrix}\right\}$
longueur	$l(m\omega_1) = \begin{cases} 2n-2 \text{ si } m \leq -2n+2, \\ 0 \text{ si } m \geq 0 \end{cases}$	$l(m\omega_3) = \begin{cases} 6 \text{ si } m \leq -6, \\ 0 \text{ si } m \geq 0 \end{cases}$

TABLE 4

On en déduit, pour les groupes de cohomologie $H^d(X, \mathscr{L}_\lambda)$, de tous les faisceaux inversibles $\mathscr{L}_\lambda$, les annulations suivantes :

$X = \overline{G_{ad}}$	d ou $\dim G - d = 1, 2, 4$	$H^d(X, \mathscr{L}_\lambda) = 0$
$X = \overline{PGL_{2n}/PSp_{2n}}$	d ou $2n^2 - n - 1 - d = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$	
$X = \overline{E_6/F_4}$	$d \neq 0, 9, 17, 26$	
$X = \mathbb{P}^{2n-1}$	$d \neq 0, 2n - 1$	
$X = \mathbb{P}^7$	$d \neq 0, 7$	

Remarque : les 2 dernières lignes ne sont pas surprenantes.

*

Pour obtenir ces annulations, on montre que certains entiers d ne sont jamais de la forme $l(\mu) + |J|$ pour une partie J de Σ_X et un poids $\mu \in \Omega_J$.

En effet, d'après les tableaux $1, 2, 3, 4$, les entiers $l(\mu)+|J|$ sont de la forme : :

$$\begin{array}{rl} 2l'(\mu) + |J| & \text{si } X = \overline{G_{ad}}, \\ 4l'(\mu) + |J| & \text{si } X = \overline{PGL_{2n}/PSp_{2n}}, \\ 8l'(\mu) + |J| & \text{si } X = \overline{E_6/F_4}, \\ (2n-2)l'(\mu) + |J| & \text{si } X = \mathbb{P}^{2n-1}, \\ 6l'(\mu) + |J| & \text{si } X = \mathbb{P}^7, \end{array}$$

pour certains entiers $l'(\mu)$ qui ont pour valeurs maximales :

$$l'_{\max} = \begin{cases} \frac{\dim G - \mathrm{rang}(G)}{2} & \text{si } X = \overline{G_{ad}}, \\ \frac{n(n-1)}{2} & \text{si } X = \overline{PGL_{2n}/PSp_{2n}}, \\ 3 & \text{si } X = \overline{E_6/F_4}, \\ 1 & \text{si } X = \mathbb{P}^{2n-1} \text{ ou } \mathbb{P}^7 \ . \end{cases}$$

Enfin on utilise que pour une partie J de Σ_X et pour un $\mu \in \Omega_J$, on a les inégalités :

$$|J| \leq l'(\mu) \leq l'_{\max} - |\Sigma_X \ \setminus \ J|$$

et les équivalences :

$$l'(\mu) = 0 \Leftrightarrow |J| = 0 \text{ et } l'(\mu) = l'_{\max} \Leftrightarrow |J| = |\Sigma_X| \ .$$

Q.e.d.

***

3.2. Quelques figures en rang petit. — On traite ici le cas des variétés magnifiques X, de rang ≤ 2, suivantes :

– (de rang 1) l'espace projectif $\mathbb{P}^{2n-1}$ vu comme compactification magnifique de l'espace homogène PSO_{2n}/PSO_{2n-1} et $\mathbb{P}^7$ vu comme compactification magnifique de l'espace homogène SO_7/G_2.

– (de rang 2) les compactifications magnifiques des variétés symétriques : $PGL_3 \times PGL_3/PGL_3$, PGL_6/PSp_6 et E_6/F_4.

Sur les figures qui suivent, sont représentés les poids des ensembles Ω_J et R_J de l'énoncé du théorème principal avec les notations suivantes ([Wasserman]) :

– pour les cas de rang 1, on a noté γ la racine sphérique de X et $\widetilde{\omega}$ le générateur de pic(X) tel que $\gamma = 2\widetilde{\omega}$. On a posé $\lambda_0 := -\left(\frac{(\rho,\gamma)}{(\widetilde{\omega},\gamma)} + 1\right)\widetilde{\omega} \in$ pic(X) de sorte que si $n \in \mathbb{Z}$ on ait :

$$\lambda_0 + n\widetilde{\omega} \in \Omega_{\Sigma_X} \Leftrightarrow n \leq 0 \ \ ;$$

– pour les cas de rang 2, on a noté γ_1, γ_2 les racines sphériques de X et $\widetilde{\omega_1}, \widetilde{\omega_2}$ la base de pic(X) telle que $(\widetilde{\omega}_i, \gamma_i) > 0$ et $(\widetilde{\omega}_i, \gamma_j) = 0$ si $i \neq j$ sinon. Enfin, on a posé $\lambda_0 := -\left(\frac{(\rho,\gamma_1)}{(\widetilde{\omega_1},\gamma_1)} + 1\right)\widetilde{\omega_1} - \left(\frac{(\rho,\gamma_2)}{(\widetilde{\omega_2},\gamma_2)} + 1\right)\widetilde{\omega_2} \in$ pic(X) de sorte que si $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, on ait :

$$\lambda_0 + n_1\widetilde{\omega_1} + n_2\widetilde{\omega_2} \in \Omega_J \Leftrightarrow J = \{\gamma_i \ : \ n_i \leq 0\} \ \ .$$

Pour les compactifications de

$$PSO_{2n}/PSO_{2n-1},\ SO_7/G_2,\ PGL_3 \times PGL_3/PGL_3,\ PGL_6/PSp_6 \text{ et } E_6/F_4,$$

et avec les notations des tableaux $1, 2, 3, 4$, λ_0 désigne respectivement les poids :

$$-n\omega_1\ ,\ -4\omega_3\ ,\ -2(\omega_1, -\omega_1) - 2(\omega_2, -\omega_2)\ ,\ -3\omega_2 - 3\omega_4\ ,\ -5\omega_1 - 5\omega_6\ \ .$$

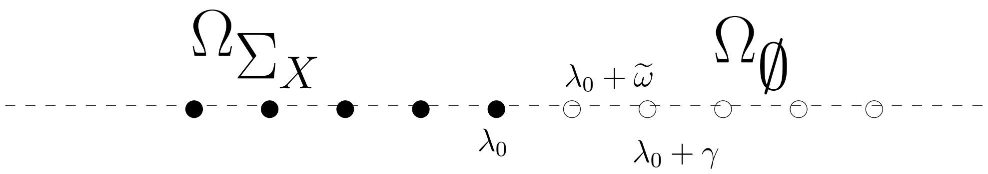

FIGURE 1. Les ensembles de poids Ω_J pour les compactifications magnifiques de PSO_{2n}/PSO_{2n-1} et SO_7/G_2

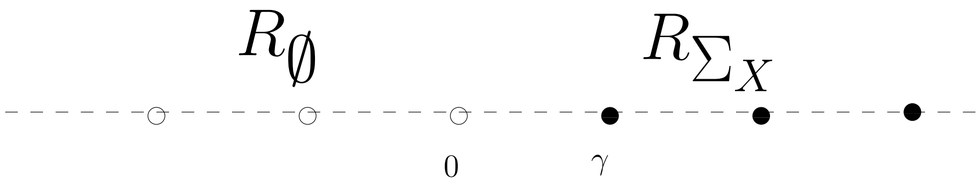

FIGURE 2. Les ensembles de poids R_J pour les compactifications magnifiques de PSO_{2n}/PSO_{2n-1} et SO_7/G_2

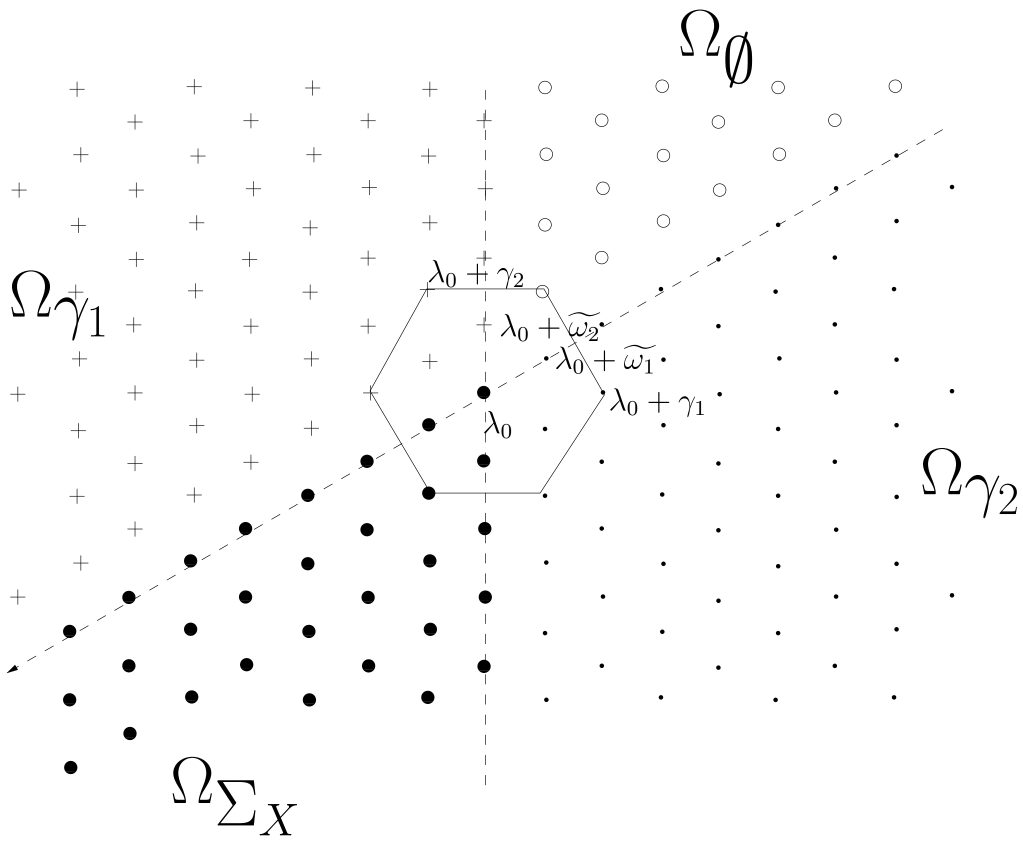

FIGURE 3. Les ensembles de poids Ω_J pour les compactifications magnifiques de $PGL_3 \times PGL_3/PGL_3$, PGL_6/PSp_6 et E_6/F_4

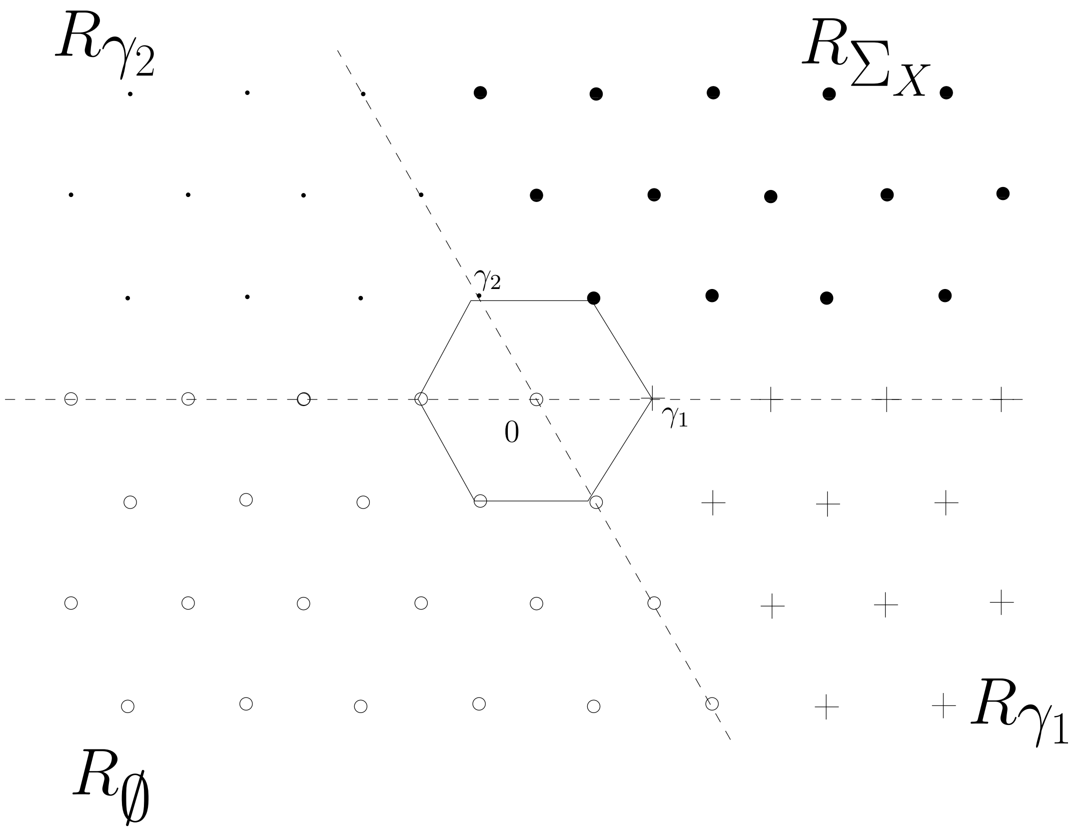

FIGURE 4. Les ensembles de poids R_J pour les compactifications magnifiques de $PGL_3 \times PGL_3/PGL_3$, PGL_6/PSp_6 et E_6/F_4

On a noté sur chaque figure par des $\bullet$ les poids de Ω_{Σ_X} et R_{Σ_X}, par des $\circ$ les poids de $\Omega_\emptyset$ et $R_\emptyset$, par des $+$ les poids de Ω_{γ_1} et R_{γ_1} et par des $\cdot$ les poids de Ω_{γ_2} et R_{γ_2}.

***

Fixons maintenant et jusqu'à la fin une $G-$variété magnifique X de rang minimal et un faisceau inversible $\mathscr{L}_\lambda$ de poids λ.

*

Les grandes étapes de la démonstration du théorème principal, sont, d'abord, la décomposition de la variété X en cellules de Bialynicki-Birula (*cf.* la section 5.1) et des cellules en orbites du Borel, ensuite, le calcul de groupes de cohomologie à support dans les cellules et dans les orbites du Borel, et enfin, pour passer, de la cohomologie à support à la cohomologie usuelle, la décomposition d'un complexe : le complexe de Grothendieck-Cousin (*cf.* la partie 8.1).

Au cours de cette démonstration, on utilisera notamment deux propriétés importantes des variétés magnifiques de rang minimal :

— **propriété 1 :** *La variété X n'a qu'un nombre fini de points fixes du tore T.*

En effet, X n'a qu'un nombre fini de $G-$orbites et chaque $G-$orbite contient un nombre fini de points fixes.

— **propriété 2 :** *La variété X n'a qu'un nombre fini de courbes $T-$invariantes* (*cf.* la partie 10 et le lemme 10.1).

Mais avant cela, nous allons établir un résultat sur les racines sphériques des variétés magnifiques de rang minimal.

4. Racines et racines sphériques

Il peut arriver qu'une racine sphérique d'une variété magnifique soit un multiple d'une racine de (G,T). Nous allons montrer, dans cette section, que cela est impossible lorsque la variété est de rang minimal. En effet, on a d'abord :

Proposition 4.1. — *Il existe un point y de la $G-$orbite ouverte de X, de groupe d'isotropie $G_y =: H$ et P un sous-groupe parabolique de G tel que :*

1) le groupe $N_G(H)/H$ est fini ;
2) $H \subseteq P$ et $R_u(H) = R_u(P)$;
3) $T \subseteq P$;
4) l'orbite $B.y$ est ouverte dans X ;
5) la composante neutre $(T \cap H)^\circ$ est un tore maximal de H.

Démonstration : Soient y un point de la $G-$orbite ouverte de X et H son groupe d'isotropie.

Comme X est magnifique, d'après [Brion-Pauer, cor. 5.3], le quotient $N_G(H)/H$ est fini.

D'un autre côté, d'après [Borel-Tits, cor. 3.9], il existe un sous-groupe parabolique P de G tel que :

$$H \subseteq P \text{ et } R_u(H) \subseteq R_u(P) \ .$$

Comme X est aussi de rang minimal, d'après [Ressayre], on peut choisir P pour que :

$$R_u(H) = R_u(P) \ .$$

Ainsi, on a obtenu les propriétés 1) et 2). Mais a priori P ne contient pas T.

Or, il existe $g \in G$ tel que le sous-groupe parabolique gPg^{-1} contienne B^-.

En remplaçant y par $g.y$, H par gHg^{-1}, P par gPg^{-1}, 1),2),3) sont vérifiées et PB est ouvert dans G.

Puisque la variété homogène G/H est sphérique de rang minimal, il existe $x \in G/B$ fixé par un tore maximal de H, appelons-le T_H, tel que :

$$H.x \text{ est ouvert dans } G/B \ .$$

Puisque PB/B est un ouvert de G/B stable par H, x est de la forme : $x = p^{-1}B/B$ pour un $p \in P$.

Cette fois, en remplaçant y par $p.y$, H par pHp^{-1}, T_H par pT_Hp^{-1} et en gardant P, 1), 2), 3), 4) sont vérifiées avec de plus $T_H \subseteq P \cap B$.

Il existe alors $a \in P \cap B$ tel que $aT_Ha^{-1} \subseteq T$.

Finalement, en remplaçant y par $a.y$, H par aHa^{-1} et en gardant P, 1), 2) 3), 4), 5) sont vérifiées.

Q.e.d.

On garde H et $T_H = (T \cap H)^\circ$ comme dans l'énoncé de la proposition ci-dessus. En particulier, T_H est non trivial (sauf si G est trivial). On va démontrer :

LEMME 4.2. — *i) Si α est une racine de (G,T), alors $\alpha|_{T_H} \neq 0$;*
ii) Si γ est une racine sphérique de X, relativement à B, alors : $\gamma|_{T_H} = 0$.

Il résulte immédiatement de ce lemme qu'aucune racine n'est combinaison linéaire de racines sphériques.

Démonstration du lemme :

i)

1er cas : si H est réductif :

Dans ce cas, $T_H = C_{H^\circ}(T_H)$ le centralisateur du tore T_H dans la composante neutre H° de H.

Donc, pour tout $x \in G/B$, d'après [Richardson, th. A], le tore T_H agit transitivement sur les composantes connexes de l'ensemble de points fixes :

$$(H^\circ xB/B)^{T_H} \ .$$

L'ensemble $(H^\circ xB/B)^{T_H}$ est par conséquent fini.

Or, puisque H est un sous-groupe de G sphérique et de rang minimal, il existe $x \in (G/B)^{T_H}$ tel que $H^\circ xB/B$ est ouvert dans G/B.

L'ensemble fini $(H^\circ xB/B)^{T_H}$ est alors un ouvert non vide de $(G/B)^{T_H}$. On en déduit qu'au moins une composante connexe de $(G/B)^{T_H}$ est un point.

Ce point est forcément laissé fixe par le centralisateur $C_G(T_H)$ qui est connexe. Le groupe $C_G(T_H)$ est en conséquence résoluble. Mais cela n'est possible que si, pour toute racine α de (G,T), $\alpha|_{T_H} \neq 0$.

2ème cas : si H est quelconque :

On choisit d'abord un sous-groupe parabolique P de G tel que :

$$T \subseteq P, H \subseteq P, R_u(H) = R_u(P)$$

(*cf.* la proposition 4.1). On pose ensuite :

$$L := P/R_u(P) \text{ et } K := H/R_u(P) \ .$$

L'espace homogène L/K est encore sphérique et de rang minimal mais de plus, L et K sont réductifs.

Le radical de L, $R(L)$, est son centre connexe donc : $R(L) \subseteq N_G(H)/R_u(P)$. Remarquons que l'on peut considérer $R(L)$ comme un sous-tore de T vu que $T \cap R_u(P) = \{1\}$; on a donc aussi $(R(L) \cap H)^\circ \subseteq T_H/R_u(P)$.

Or, le quotient $N_G(H)/H$ est fini, donc $R(L)/(R(L) \cap H)^\circ$ est fini.

Étant donnée une racine α de (G,T), deux possibilités se présentent :

- soit $\alpha\big|_{R(L)} \neq 0$,

  mais alors, $R(L)$ étant connexe, avec $N := |R(L)/(R(L) \cap H)^\circ|$, on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha\big|_{R(L)} \neq 0 &\Rightarrow N\alpha\big|_{R(L)} \neq 0 \\ &\Rightarrow \alpha\big|_{(R(L)\cap H)^\circ} \neq 0 \\ &\Rightarrow \alpha|_{T_H} \neq 0 \quad ; \end{aligned}$$

- soit $\alpha\big|_{R(L)} = 0$,

  mais alors α est en fait une racine de (L,T) et donc $\alpha|_{T_H} \neq 0$ grâce au premier cas traité.

ii)

Une racine sphérique γ de X, relativement à B, est en particulier un poids de B opérant dans l'espace $\mathbf{k}(X)$ des fonctions rationnelles sur X (*cf.* [Luna01, §1.3]). Autrement dit, il existe une fonction f, non nulle, régulière sur un ouvert $B-$ stable, V, de X telle que :

$$\forall\, b \in B, \forall\, v \in V, f(b^{-1}.v) = \gamma(b)f(v) \ .$$

En choisissant $v = y$ comme dans l'énoncé de la proposition 4.1, on a $f(y) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in T_H,\ f(y) = f(t^{-1}.y) = \gamma(t)f(y) \\ \Rightarrow \forall\, t \in T_H, \gamma(t) = 1 \\ \Rightarrow \gamma|_{T_H} = 0 \ . \end{aligned}$$

Q.e.d.

Remarque : Dans le i), lorsque H est semi-simple, pour toute racine α de (G,T), $\alpha|_{T_H}$ est en fait une racine de (H,T_H) (*cf.* [Ressayre, lem. 4.2]).

5. Décomposition cellulaire

Du fait que la variété X est projective et n'a qu'un nombre fini de points fixes du tore T, on déduit que X s'écrit comme une réunion disjointe finie d'espaces affines centrés en les points fixes du tore T, les cellules de Bialynicki-Birula :

5.1. Cellules. — Soit $x \in X^T$ un point fixe du tore T.

Étant donné un sous-groupe à un paramètre $\zeta : \mathbf{k}^* \to T$, on notera :

$$X^+(x) := \{y \in X \ : \ \lim_{a\to 0} \zeta(a)y = x\}$$

c'est la *cellule centrée en* x.

D'après [Bialynicki], $X^+(x)$ est une sous-variété localement fermée de X qui est isomorphe à un espace affine.

Plus précisément, l'espace tangent en x, T_xX est un $T-$module et donc un $\mathbf{k}^*-$module via ζ ; il en résulte une décomposition en $\mathbf{k}^*-$espaces propres :

$$T_xX = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (T_xX)_n$$

avec $(T_xX)_n := \{v \in T_xX \ : \ \forall\, a \in \mathbf{k}^*,\ \zeta(a).v = a^n v\}$. On pose alors :

$$(T_xX)_+ := \bigoplus_{n>0} (T_xX)_n \text{ et } (T_xX)_- := \bigoplus_{n<0} (T_xX)_n \ .$$

Avec ces notations, la sous-variété $X^+(x)$ est $T-$isomorphe à l'espace affine $(T_xX)_+$.

On utilisera surtout des sous-groupes à un paramètre qui ont le moins de points fixes possibles :

Définition 2. — *On dira d'un sous-groupe à un paramètre ζ qu'il est $X-$régulier si :*

$$X^{\zeta(\mathbf{k}^*)} = X^T$$

et qu'il est dominant si pour toute racine positive α, $\langle\alpha,\zeta\rangle > 0$.

Remarques :

1°) Dans le réseau $\mathrm{Hom}(\mathbf{k}^*,T)$, le complémentaire de l'ensemble des sous-groupes à un paramètre $X-$réguliers est une réunion de sous-groupes stricts. En particulier, il existe toujours des sous-groupes à un paramètre $X-$réguliers et dominants.

2^{o}) si, par exemple, X est la variété de drapeaux G/B^-, alors ζ est un sous-groupe à un paramètre $X-$régulier si et seulement si $\langle\alpha,\zeta\rangle \neq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Phi$.

Si ζ est un sous-groupe à un paramètre dominant et $X-$régulier, on obtient une décomposition cellulaire finie de X :

$$X = \bigsqcup_{x\in X^T} X^+(x)$$

dont les *cellules* $X^+(x)$ sont $B-$invariantes (car si $b \in B$, alors :

$$\lim_{a\to 0} \zeta(a)b\zeta(a)^{-1} \in T\ ).$$

Remarquons que cette décomposition dépend en général du choix du sous-groupe à un paramètre dominant et $X-$régulier ζ.

On va paramétrer l'ensemble X^T :

5.2. L'ensemble des points fixes du tore. — Rappelons pour commencer une caractérisation remarquable des variétés magnifiques de rang minimal :

Proposition 5.1 ([Ressayre, pro. 2.3]). — *Une $G-$variété magnifique X est de rang minimal si et seulement si les points fixes du tore T sont tous dans la $G-$orbite fermée* $\square$

On peut donc paramétrer l'ensemble X^T par une partie du groupe de Weyl W. En effet, soit W_Q le groupe de Weyl de (Q,T) ; on pose :

$$W^Q := \{w \in W\ :\ \forall\, v \in W_Q,\ l(wv) = l(w) + l(v)\}\ .$$

L'ensemble W^Q est un système de représentants du quotient W/W_Q et paramètre l'ensemble des points fixes de l'orbite fermée $F \simeq G/Q$:

$$X^T = \{w\mathbf{z}\ :\ w \in W^Q\}$$

où $\mathbf{z}$ est l'unique point fixe de Q dans X.

Pour tout $w \in W^Q$, on notera $X^+_w := X^+(w\mathbf{z})$ la cellule centrée en $w\mathbf{z} \in X^T$. Alors :

$$X = \bigsqcup_{x\in X^T} X^+(x) = \bigsqcup_{w\in W^Q} X^+_w\ .$$

Désormais, un sous-groupe à un paramètre ζ, dominant et $X-$régulier, est fixé et lorsqu'on considérera une cellule C, on sous-entendra que $C = X^+_w$ pour un certain $w \in W^Q$. En particulier les cellules considérées sont stables par B.

5.3. Codimension des cellules. — C'est le moment de rappeler (*cf.* [Luna96]) que l'ensemble Σ_X des racines sphériques de X (*cf.* page 5) est en bijection avec l'ensemble des diviseurs limitrophes D_i (les composantes irréductibles de $X \setminus X_G^0$).

Plus précisément, pour chaque $1 \leq i \leq r$, le poids γ_i du faisceau inversible $G-$linéarisé $\mathcal{O}_X(D_i)$ est une des racines sphériques ; on les obtient toutes ainsi et les γ_i sont deux à deux distincts.

Définition 3. — *On notera D_γ le diviseur limitrophe de X correspondant à la racine sphérique γ (le tore maximal T agit donc via le caractère γ sur la fibre $\mathcal{O}_X(D_\gamma)_{\mathbf{z}}$).*

La proposition qui suit donne en particulier la codimension des cellules X_w^+ :

Proposition 5.2. — *Si $w \in W^Q$, alors :*
i) pour toute racine sphérique $\gamma \in \Sigma_X$,

$$X_w^+ \subseteq D_\gamma \Leftrightarrow \langle w\gamma, \zeta\rangle < 0 \ ;$$

ii)

$$\operatorname{codim}_X X_w^+ = l(w) + |\{\gamma \in \Sigma_X \ : \ \langle w\gamma, \zeta\rangle < 0\}| \ .$$

Démonstration : Posons $x := w\mathbf{z}$ et fixons une racine sphérique $\gamma_0 \in \Sigma_X$.

i) L'espace tangent en le point fixe $x \in X^T$ est un $T-$module qui se décompose :

$$\begin{aligned} T_xX &= T_xD_{\gamma_0} \oplus T_xX/T_xD_{\gamma_0} \\ &= T_xD_{\gamma_0} \oplus \mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})_x \ . \end{aligned}$$

La $T-$droite propre $\mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})_x = \mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})_{w\mathbf{z}}$ a pour poids $w\gamma_0$ selon T car $\mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})_{\mathbf{z}}$ a pour poids γ_0 et le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})$ est $G-$linéarisé sur X.

Par conséquent :

$$(T_xX)_+ = \begin{cases} (T_xD_{\gamma_0})_+ & \text{si } \langle w\gamma_0, \zeta\rangle < 0 \\ (T_xD_{\gamma_0})_+ \oplus \mathcal{O}_X(D_{\gamma_0})_x & \text{si } \langle w\gamma_0, \zeta\rangle > 0 \ . \end{cases}$$

Comme $X^+(x)$ est $T-$ isomorphe à l'espace affine $(T_xX)_+$, on en déduit que :

$$X_w^+ = X^+(x) \subseteq D_{\gamma_0} \Leftrightarrow \langle w\gamma_0, \zeta\rangle < 0 \ .$$

ii) La codimension de la cellule X_w^+ est donnée par :

$$\operatorname{codim}_X X_w^+ = \operatorname{codim}_X X^+(x)$$

$$= \dim T_xX - \dim(T_xX)_+ = \dim(T_xX)_- \ .$$

Or :

$$(T_xX)_- = (T_xF)_- \oplus (T_xX/T_xF)_- \ .$$

Mais d'une part : $(T_xF)_- = (T_{w\mathbf{z}}F)_-$ est un $T-$module de dimension $l(w)$ et d'autre part, T_xX/T_xF est un $T-$module dont les poids sont exactement les $w\gamma$, γ décrivant l'ensemble Σ_X des racines sphériques de X. Donc :

$$\dim(T_xX)_- = l(w) + |\{\gamma \in \Sigma_X \ : \ \langle w\gamma, \zeta\rangle < 0\}| \ .$$

Q.e.d.

Pour calculer la cohomologie des fibrés en droites sur X, on va utiliser une stratification de X. Malheureusement, en général, la décomposition cellulaire de X n'est pas une stratification au sens où l'adhérence d'une cellule n'est pas toujours une union d'autres cellules. C'est pourquoi on aura besoin d'une décomposition plus fine de la variété X.

6. Décomposition en orbites du sous-groupe de Borel

6.1. Filtration par une suite de fermés emboîtés. — On utilise la décomposition de X en $B-$orbites. La variété X ne possède qu'un nombre fini de $B-$orbites (*cf.* par exemple [Luna96]). De plus, chaque $B-$orbite est une sous-variété affine.

On pose ensuite pour tout entier i :

$$Z_i := \bigcup_{\substack{\mathscr{B}\ B-\text{orbite}\\ \operatorname{codim}_X(\mathscr{B})\geq i}} \mathscr{B} \ .$$

Puisque le bord $\overline{\mathscr{B}} \setminus \mathscr{B}$ d'une orbite $\mathscr{B}$ est une réunion (finie) d'orbites de codimension strictement supérieure, les Z_i sont des sous-variétés fermées de X telles que :

$$X = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq ...$$

et pour tout i, $Z_i \setminus Z_{i+1}$ est une réunion disjointe finie de sous-variétés affines de même codimension : i.

6.2. Lien entre les cellules et les orbites du sous-groupe de Borel. — Comme les cellules de Bialynicki-Birula (pour un sous-groupe à un paramètre dominant et $X-$régulier fixé) sont stables par B, chaque $B-$orbite est contenue dans une unique cellule.

De plus, on a une paramétrisation des points fixes du tore et donc des cellules par W^Q. Il en résulte aussi une paramétrisation des $B-$orbites car d'après [Brion-Luna, §2.1 p. 219 et pro. 2.3], l'intersection d'une cellule et d'une $G-$orbite est soit vide soit une $B-$orbite ; on obtient ainsi, de façon unique, toutes les $B-$orbites de X. En résumé, les $B-$orbites de X sont les intersections non vides parmi les

$$\mathscr{O} \cap X_w^+ ,$$

où $\mathscr{O}$ est une $G-$orbite et $w \in W^Q$.

7. Étude de certains groupes de cohomologie à support

Avant de déterminer les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathscr{L}_\lambda)$, on s'intéresse d'abord, en guise d'approximation, aux groupes de cohomologie à support :

$$H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) \text{ et } H^i_C(\mathscr{L}_\lambda)$$

dans une $B-$orbite $\mathscr{B}$ et une cellule C (*cf.* [Grothendieck] pour la définition des groupes de cohomologie à support dans une sous-variété localement fermée).

Comme le faisceau $\mathscr{L}_\lambda$ est $G-$linéarisé sur X, les groupes de cohomologie à support $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)$ et $H^i_C(\mathscr{L}_\lambda)$ sont des $\mathfrak{g} - B-$*modules*, *c-à-d* des $\mathfrak{g}-$modules dont l'action de l'algèbre de Lie de B s'intègre en une action rationnelle du groupe B, (*cf.* [Kempf, lem. 11.1]). On peut définir et calculer leurs multiplicités selon les $\mathfrak{g}-$modules simples de dimension finie.

En effet, soient $\mu \in \mathfrak{X}$ un caractère dominant, $L(\mu)$ le $\mathfrak{g}-$ module simple de plus haut poids μ et $\chi_\mu : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbf{k}$ son caractère central (l'anneau $Z(\mathfrak{g})$ est le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$). Si M est un $\mathfrak{g}-$module, on note M_{χ_μ} le sous-espace propre généralisé associé à χ_μ (*cf.* [Dixmier, §7.8.15]). Si M_{χ_μ} est de longueur finie, on définit la multiplicité de $L(\mu)$ selon M par :

$$[M : L(\mu)] := [M_{\chi_\mu} : L(\mu)] \ .$$

D'après [T, pro. 4.6], les groupes de cohomologie $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)$ et $H^i_C(\mathscr{L}_\lambda)$ ont leur sous-espace propre généralisé associé à χ_μ de longueur finie. De plus, leur multiplicité selon le $\mathfrak{g}-$module simple $L(\mu)$ est 0 ou 1 d'après le lemme 7.1 qui suit.

Rappelons que pour chaque racine sphérique $\gamma \in \Sigma_X$, D_γ désigne le diviseur limitrophe associé.

Avec ces notations :

Lemme 7.1. — *Soient $\mu \in \mathfrak{X}$ un caractère dominant et $L(\mu)$ le $\mathfrak{g}-$module simple de plus haut poids μ. Soient C une cellule de Bialynicki-Birula et $\mathscr{B}$ une $B-$orbite de X.*

i) Si $i \neq \operatorname{codim}_X(C)$, alors $H^i_C(\mathscr{L}_\lambda) = 0$.

Si $i = \operatorname{codim}_X(C)$, alors la multiplicité de $L(\mu)$ dans le $\mathfrak{g}-$module $H^i_C(\mathscr{L}_\lambda)$ est :

$$\left[H^i_C(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right]$$

$$= \begin{cases} 1 \quad si\ w^{-1}(\mu+\rho) \in \lambda+\rho+\sum_{\substack{\gamma\in\Sigma_X \\ C\subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}_{>0}\gamma + \sum_{\substack{\gamma\in\Sigma_X \\ C\not\subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}_{\leq 0}\gamma \\ \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

où w est l'élément de W^Q tel que $C = X_w^+$.

ii) Si $i \neq \operatorname{codim}_X(\mathscr{B})$, alors $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) = 0$.

Si $i = \operatorname{codim}_X(\mathscr{B})$, alors la multiplicité de $L(\mu)$ dans le $\mathfrak{g}-$module $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)$ est :

$$\left[H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right]$$

$$= \begin{cases} 1 \quad si\ w^{-1}(\mu+\rho) \in \lambda+\rho+\sum_{\substack{\gamma\in\Sigma_X \\ \mathscr{B}\subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}_{>0}\gamma + \sum_{\substack{\gamma\in\Sigma_X \\ \mathscr{B}\not\subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}\gamma \\ \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

où w est l'élément de W^Q tel que $\mathscr{B} \subseteq X_w^+$.

Le point i) découle de [T, th. 4.1 et th 4.4]. Le point ii) découle de [T, pro. 4.6 et th. 4.4] et du fait que dans une variété magnifique de rang minimal, tous les points fixes du tore T sont dans l'orbite fermée F de G (*cf.* la proposition 5.1).

Maintenant, il s'agit de passer des groupes de cohomologie à support dans les $B-$orbites aux groupes de cohomologie usuels

$$H^i(X, \mathscr{L}_\lambda)\ .$$

C'est l'objet de la prochaine partie :

8. De la cohomologie à support à la cohomologie usuelle

8.1. Complexe de Grothendieck-Cousin. — Reprenons la filtration

$$X = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq ...$$

introduite au paragraphe 6.1 ; on va considérer les groupes de cohomologie à support dans les sous-variétés localement fermées $Z_i \setminus Z_{i+1}$: $H^i_{Z_i \setminus Z_{i+1}}(\mathscr{L}_\lambda)$, $i \geq 0$. Le résultat suivant est dû à Kempf :

Théorème 8.1 ([Kempf, th. 8.7 (b)]). — *Il existe un complexe de $\mathfrak{g}-$modules :*

$$(1) \qquad ... \to H^i_{Z_i \setminus Z_{i+1}}(\mathscr{L}_\lambda) \xrightarrow{d^i} H^{i+1}_{Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}}(\mathscr{L}_\lambda) \to ...$$

dont le $i-$ème groupe d'homologie est $H^i(X, \mathscr{L}_\lambda)$.

De plus, pour chaque i, le i−ème terme du complexe se décompose :

$$H^i_{Z_i \setminus Z_{i+1}}(\mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{\mathscr{B}} H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) \tag{2}$$

(somme directe sur les $B-$orbites $\mathscr{B}$ de X telles que $\mathrm{codim}_X(\mathscr{B}) = i$*)* □

Remarque : *Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux $B-$orbites de X de codimensions i et $i+1$, alors :*
– *la réunion $\mathscr{B} \sqcup \mathscr{B}'$ est localement fermée dans X,*
– *dans $\mathscr{B} \sqcup \mathscr{B}'$, $\mathscr{B}$ est ouvert et $\mathscr{B}'$ est fermé.*
On en déduit donc une suite exacte longue :

$$... \to H^i_{\mathscr{B}\sqcup\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda) \to H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) \overset{d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}{\to} H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda) \to ... \tag{3}$$

(cf. [Grothendieck, pro. 1.9]*). Avec ces notations, dans le théorème ci-dessus, chaque différentielle*

$$d^i : \bigoplus_{\mathscr{B}} H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) \to \bigoplus_{\mathscr{B}'} H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)$$

est donné par une « matrice » :

$$\left(d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ décrivent, respectivement, les $B-$orbites de codimensions i et $i+1$ dans X (en fait lorsque $\mathscr{B}'$ n'est pas contenue dans l'adhérence $\overline{\mathscr{B}}$, $d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = 0$).

8.2. La partie finie du complexe de Grothendieck-Cousin. — Les $\mathfrak{g}-$modules $H^d(X, \mathscr{L}_\lambda)$ sont en fait des $G-$modules car le faisceau $\mathscr{L}_\lambda$ est $G-$linéarisé sur X. C'est pourquoi, dans le complexe de Grothendieck-Cousin :

$$\mathcal{G}C^* : ... \to \bigoplus_{\mathscr{B}} H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda) \to ... \tag{4}$$

il suffit de ne prêter attention qu'aux multiplicités selon les $G-$modules simples *i.e.* selon les $\mathfrak{g}-$modules simples de dimension finie.

8.2.1. Décomposition du complexe suivant les caractères centraux. — Comme précédemment, soient $\mu \in \mathfrak{X}$ un caractère dominant, $L(\mu)$ le $G-$module simple de plus haut poids μ et χ_μ son caractère central.

Si M est un $\mathfrak{g} - B-$module, alors on note $M_{(\mu)}$ le sous-$T-$espace propre associé au caractère μ du sous-espace propre généralisé M_{χ_μ} (†).

Le foncteur ainsi défini :

$$M \mapsto M_{(\mu)}$$

vérifie :

(†)Par définition : $M_{(\mu)} = \left\{m \in \bigcup_{n>0} \bigcap_{c\in Z(\mathfrak{g})} \ker(c - \chi_\mu(c))^n \ : \ \forall\, t \in T, t.m = \mu(t)m\right\}$

Proposition 8.2. — *Si $M' \to M \to M''$ est une suite exacte de $\mathfrak{g}-B-$modules alors :*

i) la suite d'espaces vectoriels

$$M'_{(\mu)} \to M_{(\mu)} \to M''_{(\mu)}$$

est encore exacte ;

ii) Si M_{χ_μ} est de longueur finie alors l'espace vectoriel $M_{(\mu)}$ a pour dimension :

$$\dim_{\mathbf{k}} M_{(\mu)} = [M : L(\mu)]$$

la multiplicité de M selon $L(\mu)$.

Démonstration : i) cela résulte du fait que $M \mapsto M_{\chi_\mu}$ est un foncteur exact sur les $\mathfrak{g} - B-$modules (*cf.* [Dixmier, §7.8.15])

ii) Les $\mathfrak{g}-$modules simples qui apparaissent dans une suite de Jordan-Hölder de M_{χ_μ} sont tous de la forme $L(w * \mu)$, $w \in W$, le $\mathfrak{g}-$module simple de plus haut poids $w * \mu$.

Or, comme le caractère μ est dominant, parmi les $\mathfrak{g}-$modules $L(w*\mu)$, seul $L(\mu)$ a une multiplicité non nulle suivant le poids μ ; en outre cette multiplicité vaut 1. D'où : $\dim_{\mathbf{k}}(M_{(\mu)}) = \dim(M_{\chi_\mu})_\mu = [M_{\chi_\mu} : L(\mu)]$. **Q.e.d.**

Par exemple, comme les faisceaux $\mathscr{L}_\lambda$ sont $G-$linéarisés sur X, les groupes de cohomologie à support $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)$ sont bien des $\mathfrak{g}-B-$modules. En appliquant $M \mapsto M_{(\mu)}$ au complexe de Grothendieck-Cousin, $\mathcal{G}C^*$, on obtient un nouveau complexe :

$$\mathcal{G}C^*_\mu : ... \to \bigoplus_{\mathscr{B}} H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to ... \tag{5}$$

qui est plus simple : on va voir en effet que ce nouveau complexe se décompose en une somme directe de sous-complexes dont on sait calculer l'homologie. De plus, la dimension du $d-$ième groupe d'homologie du complexe $\mathcal{G}C^*_\mu$ est exactement la multiplicité du module simple $L(\mu)$ dans $H^d(X, \mathscr{L}_\lambda)$.

8.2.2. Décomposition du complexe suivant les cellules. — Pour qu'un morphisme :

$$d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mu) : H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)}$$

soit non nul, il y a au moins deux conditions nécessaires :

$$\mathscr{B}' \subseteq \overline{\mathscr{B}} \text{ et } \operatorname{codim}_X(\mathscr{B}') = \operatorname{codim}_X(\mathscr{B}) + 1 = i + 1 \tag{6}$$

car $d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \neq 0$; et :

$$H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \neq 0 \text{ et } H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \neq 0 \tag{7}$$

(cela se transforme en une condition combinatoire sur les poids λ et μ d'après le lemme 7.1).

En fait, ces deux conditions obligent les deux orbites $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ à être dans une même cellule ; autrement dit :

LEMME 8.3. — *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux $B-$orbites de X. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont dans deux cellules de Bialynicki-Birula distinctes* [(†)]*, alors l'application :*

$$d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mu) : H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)}$$

est nulle (pour chaque i).

*

Ce lemme 8.3 est en fait le lemme clef pour calculer la cohomologie du faisceau $\mathscr{L}_\lambda$; admettons-le pour le moment. Sa démonstration, que l'on donne en la section 11.2, repose sur l'étude des courbes irréductibles et $T-$invariantes, dans la variété X (*cf.* les sections 9, 10 et 11).

Un sous-groupe à un paramètre ζ, dominant et $X-$régulier, étant fixé et :

$$X = \bigsqcup_{x \in X^T} X^+(x)$$

étant la décomposition cellulaire correspondante, pour chaque i, soit :

$$Z_i^x := Z_i \cap X^+(x) \tag{8}$$

(c'est la réunion des $B-$orbites $\mathscr{B}$ contenues dans la cellule $X^+(x)$ et telles que $\mathrm{codim}_X(\mathscr{B}) \geq i$).

On a alors pour tout i une décomposition :

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{x \in X^T} H^i_{Z_i^x/Z_{i+1}^x}(\mathscr{L}_\lambda)\ . \tag{9}$$

Or, le lemme 8.3 affirme que pour chaque entier i, pour chaque point fixe $x \in X^T$ et pour chaque caractère dominant $\mu \in \mathfrak{X}$:

$$d^i(\mu)\left(H^i_{Z_i^x/Z_{i+1}^x}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)}\right) \subseteq H^{i+1}_{Z_{i+1}^x/Z_{i+2}^x}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \tag{10}$$

autrement dit, le complexe :

$$\mathcal{G}C^*_\mu \ : ... \to H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \stackrel{d^i(\mu)}{\to} H^{i+1}_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to ...$$

se décompose en une somme directe de complexes :

$$\mathcal{G}C^*_\mu = \bigoplus_{x \in X^T} \mathcal{G}C^*_{\mu,x} \tag{11}$$

où pour chaque $x \in X^T$, on définit le complexe :

$$\mathcal{G}C^*_{\mu,x} \ : ... \to H^i_{Z_i^x/Z_{i+1}^x}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \stackrel{d^i(\mu)}{\to} H^{i+1}_{Z_{i+1}^x/Z_{i+2}^x}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to ...$$

[(†)] pour n'importe quelle décomposition cellulaire donnée par un sous-groupe à un paramètre dominant et $X-$régulier.

Mais, c'est aussi, pour chaque $x \in X^T$, la composante suivant le caractère dominant μ du complexe :

$$\mathcal{G}C_x^* \ : ... \to H^i_{Z_i^x/Z_{i+1}^x}(\mathscr{L}_\lambda) \stackrel{d_x^i}{\to} H^{i+1}_{Z_{i+1}^x/Z_{i+2}^x}(\mathscr{L}_\lambda) \to ...$$

correspondant à la filtration :

$$X^+(x) = Z_0^x \supseteq Z_1^x \supseteq ...$$

Remarque : *Chaque complexe $\mathcal{G}C^*{}_x$ a donc pour homologie :*

$$H^*(\mathcal{G}C^*{}_x) = H^*_{X^+(x)}(\mathscr{L}_\lambda) \tag{12}$$

et ces groupes de cohomologie à support sont donnés par le lemme 7.1.

8.3. Calcul de la cohomologie usuelle. — Étant donné que les groupes de cohomologie $H^d(X, \mathscr{L}_\lambda)$ sont non seulement des $\mathfrak{g}-$modules mais aussi des $G-$modules, il résulte de (11) et (12), en tout degré d et pour tout poids dominant μ, l'égalité :

$$\left[H^d(X, \mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right] = \sum_{w \in W^Q} \left[H^d_{X_w^+}(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right] \ . \tag{13}$$

Par conséquent, pour terminer la démonstration du théorème 3.1, il s'agit maintenant de calculer la multiplicité selon le $\mathfrak{g}-$module simple $L(\mu)$ des $\mathfrak{g}-B-$modules

$$H^d_{X_w^+}(\mathscr{L}_\lambda) \ .$$

Fixons un poids μ dominant. Rappelons que ρ désigne la demi-somme des racines positives.

D'après le lemme 7.1, si on choisit $w \in W^Q$, *c-à-d* un point fixe $x = w\mathbf{z} \in X^T$, alors, d'une part :

$$\left[H^d_{X_w^+}(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right] = 1$$

si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\mathrm{codim}_X(X_w^+) = d \tag{14}$$

et

$$w^{-1}(\mu + \rho) \in \lambda + \rho + \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma_X \\ X_w^+ \subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}_{>0}\gamma + \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma_X \\ X_w^+ \not\subseteq D_\gamma}} \mathbb{Z}_{\leq 0}\gamma \tag{15}$$

et d'autre part, dans tous les autres cas :

$$\left[H^d_{X_w^+}(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu)\right] = 0 \ .$$

*

Au passage, notons que la condition (15) entraîne que $w = w_\nu$ avec :

$$\nu := w^{-1}(\mu+\rho) - \rho \in \mathrm{pic}(X) \ .$$

A priori, suivant la proposition 5.2, la codimension de la cellule X_w^+ et l'inclusion (ou non) $X_w^+ \subseteq D_\gamma$ dépendent du sous-groupe à un paramètre dominant et $X-$régulier ζ choisi pour définir la décomposition cellulaire. Mais, en fait, ce n'est pas le cas lorque w est de la forme w_ν pour un poids $\nu \in \mathrm{pic}(X)$.

En effet :

Proposition 8.4. — *Pour toute racine sphérique γ et pour tout $\nu \in \mathrm{pic}(X)$, on a :*

$$\langle w_\nu \gamma, \zeta \rangle > 0 \Leftrightarrow (\nu+\rho, \gamma) > 0 \ .$$

Démonstration : Nous verrons plus loin qu'il existe deux racines positives orthogonales α et β telles que $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}_{>0}\gamma$ et $\langle \nu+\rho, \alpha^\vee\rangle = \langle \nu+\rho, \beta^\vee \rangle$ pour tout $\nu \in \mathrm{pic}(X)$ (*cf.* la remarque qui suit le lemme 10.2 page 37). D'un côté, on en déduit que :

$$\langle w_\nu\gamma, \zeta\rangle \text{ et } \langle w_\nu(\alpha), \zeta\rangle + \langle w_\nu(\beta), \zeta\rangle$$

sont de même signe.

D'un autre côté, comme le sous-groupe à un paramètre ζ est dominant et $X-$régulier, on a les équivalences :

$$\langle w_\nu(\alpha), \zeta \rangle > 0 \Leftrightarrow w_\nu(\alpha) > 0 \tag{16}$$

$$\langle w_\nu(\beta), \zeta \rangle > 0 \Leftrightarrow w_\nu(\beta) > 0 \ . \tag{17}$$

Mais par définition de w_ν, $w_\nu(\nu+\rho) \in \mathcal{X}$ est un poids dominant régulier et donc :

$$w_\nu(\alpha) > 0 \Leftrightarrow (w_\nu(\nu+\rho), w_\nu(\alpha)) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\nu+\rho, \alpha) > 0 \ . \tag{18}$$

De même :

$$w_\nu(\beta) > 0 \Leftrightarrow (\nu+\rho, \beta) > 0 \ . \tag{19}$$

Puisque $\langle \nu+\rho, \alpha^\vee\rangle = \langle \nu+\rho, \beta^\vee\rangle$, on a : $w_\nu(\alpha) > 0 \Leftrightarrow w_\nu(\beta) > 0$. Il résulte alors de (16), (17), (18), (19) que :

$$\langle w_\nu\gamma, \zeta\rangle > 0 \Leftrightarrow \langle w_\nu(\alpha), \zeta\rangle + \langle w_\nu(\beta), \zeta \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow (\nu+\rho,\alpha) + (\nu+\rho,\beta) > 0 \Leftrightarrow (\nu+\rho,\gamma) > 0 \ .$$

Q.e.d.

*

Un poids dominant μ et un élément w de W^Q étant toujours fixés, on garde la notation $\nu := w^{-1}(\mu+\rho)-\rho$.

D'une part $\nu+\rho$ est un caractère régulier et d'autre part, si les conditions (14) et (15) sont remplies alors, d'après la proposition 8.4 et avec les notations de l'énoncé du théorème principal 3.1, on trouve :

$$\nu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \text{ et } l(\nu) + |J| = d$$

avec $J := \{\gamma \in \Sigma_X \ : \ (\nu+\rho, \gamma) < 0\}$.

Réciproquement, si $\nu \in \mathfrak{X}$ (tel que ν^+ existe, *i.e.* tel que $\nu+\rho$ soit régulier) est dans un ensemble de poids :

$$(\lambda + R_J) \cap \Omega_J$$

pour une certaine partie J de Σ_X, alors le $\mathfrak{g}-$module :

$$H^d_{X_w^+}(\mathscr{L}_\lambda)$$

avec $d := l(\nu) + |J|$ et $w := w_\nu \in W^Q$ a pour multiplicité 1 selon le $\mathfrak{g}-$module simple $L(\nu^+)$.

La formule du théorème principal 3.1 :

$$H^d(X, \mathscr{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{J \subseteq \Sigma_X} \bigoplus_{\substack{\mu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \mu+\rho \text{ régulier} \\ l(\mu)+|J|=d}} L(\mu^+)$$

découle alors de (13), au début de cette section.

Le théorème 3.1 est presque démontré.

Il ne reste plus, en effet qu'à vérifier le lemme clef 8.3.

Pour cela, on va, dans les deux sections suivantes, d'une part, relier certains points fixes du tore T par des chaînes de courbes $T-$invariantes contenues dans la variété X ; et d'autre part étudier ces courbes $T-$invariantes.

Cela permettra de démontrer le lemme 8.3, dans la section 11.

9. Chaînes de courbes qui relient deux points fixes du tore

Dans cette section 9, on suppose seulement que X est une variété projective munie d'une action « linéaire » du tore T au sens suivant : il existe un $T-$module V tel que $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ et tel que l'action de T sur X provienne de celle de T sur $\mathbb{P}(V)$.

On rappelle qu'un sous-groupe à un paramètre $\nu : \mathbf{k}^* \to T$ est $X-$régulier si les ensembles de points fixes

$$X^\nu = \{x \in X \ : \ \forall\, a \in k^*,\ \nu(a).x = x\}$$

et

$$X^T = \{x \in X \ : \ \forall\, t \in T,\ t.x = x\}$$

sont les mêmes.

9.1. Orientation des courbes. — Soit ν un sous-groupe à un paramètre de T qui est $X-$régulier.

DÉFINITION 4. — *Si $x, x' \in X^T$ sont deux points fixes de T, on notera*

$$x \xrightarrow{c} x' \text{ ou simplement } x \to x'$$

si la variété X contient une courbe c fermée, irréductible, stable par T, « allant de x à x' » i.e. *: il existe $y \in c$ tel que :*

$$\lim_{a \to 0} \nu(a).y = x \text{ et } \lim_{a \to \infty} \nu(a).y = x' .$$

Dans cette situation, on notera :

$$c(0) := x \text{ et } c(\infty) := x' .$$

Ces notations dépendent du sous-groupe à un paramètre $X-$régulier, ν, choisi : si on remplace ν par $-\nu$, on échange $c(0)$ et $c(\infty)$.

Exemple : Si on prend pour X la variété de drapeaux G/B^-, les points fixes du tore T sont les wB^-/B^- où $w \in W$. Pour un sous-groupe à un paramètre ν, *dominant* et $X-$régulier (*i.e.* régulier), et pour $w, w' \in W$, on a l'équivalence :

$$wB^-/B^- \to w'B^-/B^-$$

$$\Leftrightarrow w' = ws_\alpha$$

pour une racine positive α telle que $w(\alpha) > 0$ ($s_\alpha \in W$ désigne la réflexion associée à la racine α). En particulier, si $wB^-/B^- \to w'B^-/B^-$ alors $w' > w$ pour l'ordre de Bruhat sur W.

En effet, les courbes irréductibles et $T-$invariantes de G/B^- qui passent par wB^-/B^- sont de la forme $\overline{wU_\alpha B^-/B^-}$ où α est une racine positive et U_α le sous-groupe unipotent de dimension 1 associé. Or, les $T-$points fixes de la courbe $\overline{wU_\alpha B^-/B^-}$ sont wB^-/B^- et $ws_\alpha B^-/B^-$. De plus, si $w(\alpha) > 0$, alors $wB^-/B^- \to ws_\alpha B^-/B^-$, tandis que si $w(\alpha) < 0$, alors $ws_\alpha B^-/B^- \to wB^-/B^-$.

9.2. Liaison entre deux points fixes du tore. — Avec les notations de la section précedente, on a le résultat suivant :

LEMME 9.1. — *Soient V un $T-$module de dimension finie et X une sous-variété fermée $T-$stable de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. On munit X de l'action de T induite et on suppose que X n'a qu'un nombre fini de points fixes pour cette action.*

On fixe un sous-groupe à un paramètre $X-$régulier, ν. Soient x', x deux points fixes de X.

Si x' est dans l'adhérence de la cellule $X^+(x)$ alors il existe des points fixes $x_0, ..., x_N$ dans X tels que :

$$x = x_0 \to x_1 \to ... \to x_N = x' \ .$$

Remarque : Si X est la variété de drapeaux G/B^- et si on choisit un sous-groupe à un paramètre ν, dominant et régulier, alors :

$$w'B^-/B^- \in \overline{X_w^+} \Leftrightarrow w \leq w' \text{ pour l'ordre de Bruhat}$$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \Phi^+ \,, w < ws_{\alpha_1} < ... < ws_{\alpha_1} ... s_{\alpha_n} = w'$$

et on a bien une chaîne de courbes :

$$wB^-/B^- \to ... \to w'B^-/B^- \ .$$

*

Démonstration du lemme : Toute composante irréductible de $\overline{X^+(x)}$ est l'adhérence d'une composante irréductible de $X^+(x)$. En particulier, toutes les composantes irréductibles de $\overline{X^+(x)}$ contiennent x. On peut donc supposer que $X = \overline{X^+(x)}$, quitte à remplacer X par une composante irréductible de $\overline{X^+(x)}$ qui contient x'.

Si z est un point fixe de X, on pose :

$$X^-(z) := \{y \in X \ : \ \lim_{a \to \infty} \nu(a).y = z\} \ .$$

Étant donnés deux points fixes distincts z, z', on écrira :

$$z \rightsquigarrow z' \text{ si } X^+(z) \cap X^-(z') \neq \emptyset \ .$$

Via le sous-groupe à un paramètre ν, le groupe $\mathbf{k}^*$ agit sur l'espace vectoriel V avec des poids entiers que l'on peut ordonner.

Pour un point fixe x de T, notons ν_x le poids d'un vecteur propre $v \in V$ tel que $x = [v]$ (la classe du vecteur v dans l'espace projectif).

On s'aperçoit que si $x \rightsquigarrow x'$, alors $\nu_x < \nu_{x'}$ (il suffit de le vérifier dans $\mathbb{P}(V)$).

On en déduit que dans la sous-variété X de $\mathbb{P}(V)$, il n'y a pas de « boucles » *i.e.* : s'il existe une chaîne $x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow x_N = x_0$, alors $N = 0$.

En particulier, puisque X n'a qu'un nombre fini de points fixes, il existe une chaîne aboutissant à x' :

$$x_0 \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow x_N = x' \tag{20}$$

avec un entier N maximal.

On va montrer que $x_0 = x$:

si $y \in X^-(x_0) \setminus \{x_0\}$, alors $x_0 \neq \lim_{a \to 0} \nu(a).y \rightsquigarrow x_0$ ce qui contredit la maximalité de N. Ainsi, $X^-(x_0) = \{x_0\}$. Or, d'après [Konarski][th. 3 et bas de la p. 299] :

$$\dim X^-(x_0) + \dim X^+(x_0) \geq \dim X \ .$$

Il s'ensuit que $\dim X^+(x_0) = \dim X$ et donc que $\overline{X^+(x_0)} = X$. Comme $X^+(x_0)$ et $X^+(x)$ sont ouverts, cela entraîne que $X^+(x_0)$ rencontre $X^+(x)$ et par conséquent que $x_0 = x$.

Montrons maintenant que dans la chaîne maximale (20), $x_i \to x_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq N-1$. La courbe $\overline{\mathbf{k}^*.y}$ pour un $y \in X^+(x_i) \cap X^-(x_{i+1})$ est bien une courbe allant de x_i à x_{i+1} mais a priori elle n'est que $\mathbf{k}^*-$invariante.

Cependant, si z est un point fixe du tore T dans $\overline{X^+(x_i) \cap X^-(x_{i+1})}$ alors, comme $z \in \overline{X^+(x_i)}$, il existe une chaîne partant de x_i et aboutissant à z :

$$x_i \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow z$$

et, de même, comme $z \in \overline{X^-(x_{i+1})}$, il existe une chaîne aboutissant à x_{i+1} et partant de z :

$$z \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow x_{i+1} \quad .$$

Par maximalité de la chaîne $x_0 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow x_i \rightsquigarrow x_{i+1} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow x_N$, il est nécessaire que $z = x_i$ ou x_{i+1}. En particulier, il n'y a que deux points fixes dans $\overline{X^+(x_i) \cap X^-(x_{i+1})}$. D'après [Rosenlicht] ou [Bialynicki, cor. 1 p. 497], la sous-variété fermée $\overline{X^+(x_{i+1}) \cap X^-(x_i)}$ est donc irréductible et de dimension 1. C'est donc une courbe fermée allant de x_i à x_{i+1} qui, de plus, est $T-$invariante ; ainsi $x_i \to x_{i+1}$. **Q.e.d.**

On revient maintenant au cas où la variété X est magnifique et de rang minimal.

10. Étude de quelques courbes invariantes par le tore

Dans la variété magnifique de rang minimal, X, il n'y a, en fait, qu'un nombre fini de courbes $T-$invariantes (*cf.* le lemme 10.1 ci-dessous). Parmi ces courbes, celles qui sont incluses dans la $G-$orbite fermée F sont des courbes $T-$invariantes d'une variété de drapeaux (courbes bien connues : *cf.* [Springer97], *cf.* aussi l'exemple de la section 9.1). On va plutôt s'intéresser aux courbes $T-$invariantes de X qui sortent de l'orbite fermée F ; on associera de telles courbes aux racines sphériques $\gamma \in \Sigma_X$. Après avoir donné des exemples en rang 1, on établira quelques propriétés des racines sphériques, importantes pour démontrer le lemme clef 8.3.

10.1. Finitude des courbes invariantes par le tore. — La variété magnifique X étant de rang minimal, ses racines sphériques ne sont pas des multiples de racines (*cf.* le lemme 4.2 (section 4)). En particulier, les poids de l'espace tangent $T_{\mathbf{z}}X$ sont deux à deux non proportionnels (en effet, ces poids sont les racines sphériques $\gamma \in \Sigma_X$ et certaines racines positives $\alpha \in \Phi$).

Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de courbes irréductibles et $T-$invariantes passant par $\mathbf{z}$; plus précisément :

LEMME 10.1. — *Soit λ un poids de l'espace tangent $T_{\mathbf{z}}X$. Il existe une unique courbe C_λ dans X irréductible et $T-$invariante telle que :*

$$\mathbf{z} \in C_\lambda \text{ et } T_{\mathbf{z}}C_\lambda = (T_{\mathbf{z}}X)_\lambda$$

l'espace propre de $T_{\mathbf{z}}X$ de poids λ.

De plus, la courbe C_λ est la composante connexe de $X^{(\ker\lambda)^\circ}$ qui contient $\mathbf{z}$. Enfin, toute courbe $T-$invariante C de X qui contient $\mathbf{z}$ est l'une des courbes C_λ, en particulier est lisse.

Remarques :

i) On a donc une bijection entre les poids de l'espace tangent $T_{\mathbf{z}}X$ et les courbes irréductibles et $T-$invariantes de X passant par $\mathbf{z}$.

ii) Comme tous les points fixes du tore T sont dans la $G-$orbite fermée F, toute courbe irréductible et $T-$invariante de X est conjuguée par un $w \in W^Q$ à une courbe irréductible et $T-$invariante passant par $\mathbf{z}$.

iii) Dans le cadre des variétés de drapeaux, ce résultat est bien connu (*cf.* par exemple [Springer97]) : si X est la variété de drapeaux G/B^-, alors les courbes $T-$invariantes de X passant par $\mathbf{z} = B^-/B^-$ sont les adhérences $\overline{U_\alpha B^-/B^-}$, où α décrit l'ensemble des racines positives (U_α désigne le sous-groupe unipotent de G associé à la racine α). En effet, les poids de l'espace tangent $T_{\mathbf{z}}G/B^-$ sont exactement les racines positives et, pour toute racine positive α, la variété $U_\alpha B^-/B^-$ est de dimension 1 et contenue dans $(G/B^-)^{(\ker\alpha)^\circ}$.

Démonstration : Soit $S := (\ker\lambda)^\circ$; c'est un sous-tore de T de codimension 1.

existence : D'après [Bialynicki], la sous-variété fermée X^S des points fixes de S est lisse et pour tout $x \in X^S$:

$$T_x(X^S) = (T_xX)^S = \{v \in T_xX \ : \ \forall\, s \in S,\ s.v = v\} \quad .$$

Donc la composante connexe C de X^S qui contient $\mathbf{z}$ est une variété lisse, irréductible et $T-$invariante vérifiant :

$$T_{\mathbf{z}}C = T_{\mathbf{z}}X^S = (T_{\mathbf{z}}X)^S = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}} (T_{\mathbf{z}}X)^S_\mu$$

mais, comme $S = (\ker\lambda)^\circ$, pour un caractère $\mu \in \mathfrak{X}$:

$$(T_{\mathbf{z}}X)^S_\mu = \{0\}$$

si μ n'est pas proportionnel à λ ; comme de plus, λ est le seul poids de $T_{\mathbf{z}}X$ proportionnel à λ, on trouve :

$$T_{\mathbf{z}}C = (T_{\mathbf{z}}X)_\lambda$$

qui est de dimension 1. Par conséquent, C est bien une courbe.

unicité : Si C est une courbe irréductible et $T-$invariante qui contient $\mathbf{z}$ et si $T_{\mathbf{z}}C = (T_{\mathbf{z}}X)_\lambda$, alors :

$$\begin{aligned}(T_{\mathbf{z}}C^S) = (T_{\mathbf{z}}C)^S &= (T_{\mathbf{z}}X)_\lambda^S \\ &= (T_{\mathbf{z}}X)_\lambda = T_{\mathbf{z}}C \ .\end{aligned}$$

Mais alors, $C^S = C$ et $C \subseteq X^S$: *c-à-d* C est la composante connexe de X^S passant par $\mathbf{z}$.

En fait, si C est une courbe irréductible et $T-$invariante de X, alors C est fixée point par point par un sous-tore S de T de codimension 1. Donc si la courbe C passe par le point $\mathbf{z}$, on a l'inclusion d'espaces tangents :

$$T_{\mathbf{z}}C \subseteq T_{\mathbf{z}}X^S = (T_{\mathbf{z}}X)^S \ .$$

Comme les poids de T dans $T_{\mathbf{z}}X$ sont deux à deux non proportionnels, $T_{\mathbf{z}}C$ est forcément de dimension 1 et en conséquence, C est lisse. **Q.e.d.**

10.2. Courbes et réflexions associées aux racines sphériques. — Grâce au lemme 10.1, on peut poser la définition suivante :

Définition 5. — *Pour toute racine sphérique $\gamma \in \Sigma_X$, soit C_γ l'unique courbe irréductible, $T-$invariante, contenant $\mathbf{z}$, contenue dans X telle que :*

$$T_{\mathbf{z}}C_\gamma = (T_{\mathbf{z}}X)_\gamma \ .$$

$*$

D'après le lemme 10.1, les courbes C_γ sont exactement les courbes irréductibles, $T-$invariantes, passant par $\mathbf{z}$ et qui sortent de F.

D'un autre côté, chaque courbe C_γ est lisse, isomorphe à $\mathbb{P}^1$ et contient deux points fixes du tore. Cette remarque permet d'associer un élément de W à chaque racine sphérique :

Définition 6 (l'élément s_γ). — *Pour chaque racine sphérique $\gamma \in \Sigma_X$, soit s_γ l'unique élément de W^Q tel que :*

$$\mathbf{z} \ \textit{et} \ s_\gamma\mathbf{z}$$

sont les 2 points fixes du tore dans la courbe C_γ. On appellera s_γ une réflexion sphérique.

Remarque : En fait, l'élément s_γ n'est pas une réflexion dans W ; c'est seulement une réflexion comme transformation du réseau pic(X). Effectivement : nous verrons plus tard (*cf.* le lemme 10.2) que $s_\gamma^2 = 1$ et d'un autre côté :

$$s_\gamma\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}\gamma \tag{21}$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}(X)$.

En effet, d'après [Brion93, pro. p. 377], la différence des poids des fibres en $\mathbf{z}$ et $s_\gamma \mathbf{z}$ du faisceau inversible $\mathscr{L}_\lambda$ est un multiple de γ, le poids associé à la courbe C_γ reliant $\mathbf{z}$ à $s_\gamma \mathbf{z}$. Or, les droites

$$\mathscr{L}_\lambda|_{\mathbf{z}} \text{ et } \mathscr{L}_\lambda\big|_{s_\gamma \mathbf{z}}$$

ont pour poids respectifs λ et $s_\gamma\lambda$, d'où (21).

10.3. Exemples en rang un. — On utilisera certaines propriétés des racines sphériques γ et des éléments s_γ associés (*cf.* le lemme 10.2 de la section 10.4). Pour établir ces propriétés, on se ramènera au cas où X est une variété magnifique de rang 1, et même une des variétés magnifiques étudiées en exemple ci-dessous.

10.3.1. Diagrammes. — Parmi les variétés magnifiques de rang 1 de [Akhiezer, table 2 p. 67], celles qui sont de rang minimal correspondent, avec les notations de [Akhiezer], aux diagrammes :

$$D_n \ : \overset{\alpha_1}{\bullet} - \overset{\alpha_2}{\circ} - \ldots - \overset{\alpha_{n-2}}{\circ} < \begin{matrix} \circ^{\alpha_n} \\ \circ_{\alpha_{n-1}} \end{matrix} \ (n \geq 3) \text{ ou } D_2 \ : \overset{\alpha}{\bullet} \ \overset{\alpha'}{\bullet}$$

$$B_3 \ : \overset{\alpha_1}{\circ} - \overset{\alpha_2}{\circ} \Rightarrow \overset{\alpha_3}{\bullet}$$

Elles sont munies respectivement de l'action de $Spin_{2n}(\mathbf{k})$ et de $Spin_7(\mathbf{k})$.

Remarque : Les « ronds blancs » des diagrammes correspondent aux racines simples du groupe réductif $Q/R_u(Q)$ ($R_u(Q)$ étant le radical unipotent de Q). En particulier, les ensembles W^Q sont respectivement :

$$\{w \in W \ : \ \forall\, i \geq 2, w(\alpha_i) > 0\} \text{ et } W \ ;$$

$$\{w \in W \ : \ w(\alpha_1) > 0, w(\alpha_2) > 0\} \ .$$

10.3.2. Description de l'action. — Les variétés magnifiques associées aux diagrammes ci-dessus sont données dans [Akhiezer, pp. 66-67]. Dans le cas du diagramme D_n, il s'agit de l'espace projectif $\mathbb{P}^{2n-1}$ ($n \geq 2$) et de la quadrique de dimension $2n-1$:

$$\mathscr{Q}_{2n-1} = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^{2n} \ : \ z_0^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i z_{n+i} \right\}$$

munies d'une action du groupe $Spin_{2n}(\mathbf{k})$.

Dans le cas du diagramme B_3, il s'agit de l'espace projectif $\mathbb{P}^7$ et de la quadrique $\mathscr{Q}_7$ (*cf.* ci-dessus) munies d'une action du groupe $Spin_7(\mathbf{k})$.

Pour décrire les actions, on note J_{2n} la matrice carrée d'ordre $2n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

et $SO(J_{2n})$ le groupe :

$$\left\{g \in SL(2n, \mathbf{k}) \ : \ {}^t g J_{2n} g = J_{2n}\right\}$$

qui est isomorphe à $SO(2n, \mathbf{k})$. Le groupe $SO(J_{2n})$ agit sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{2n-1}$ via l'action naturelle de $SL(2n, \mathbf{k})$ et sur la quadrique $\mathscr{Q}_{2n-1}$ par :

$$\forall\, g \in SO(J_{2n}),\ \forall\, [z_0 : z] \in \mathbb{P}(\mathbf{k} \times \mathbf{k}^{2n}),\ g.[z_0 : z] = [z_0 : g.z] \ .$$

Comme $Spin(2n, \mathbf{k})$ est le revêtement universel de $SO(J_{2n}) \simeq SO(2n, \mathbf{k})$ et comme $Spin(7, \mathbf{k}) \subseteq SO(J_8)$ (grâce à la représentation spinorielle de dimension 8 de $Spin(7, \mathbf{k})$), on en déduit les actions de $Spin(2n, \mathbf{k})$ et $Spin(7, \mathbf{k})$.

10.3.3. Orbites. — Les variétés magnifiques $\mathbb{P}^{2n-1}$ et $\mathscr{Q}_{2n-1}$, de rang minimal 1, ont chacune exactement 2 orbites de $G = Spin_{2n}(\mathbf{k})$ (ou $Spin(7, \mathbf{k})$ pour $\mathbb{P}^7$ et $\mathscr{Q}_8$).

Dans le cas de $\mathbb{P}^{2n-1}$, l'orbite ouverte et l'orbite fermée sont respectivement :

$$\mathscr{O} = \left\{[z_1 : ... : z_{2n}] \in \mathbb{P}^{2n-1} \ : \ \sum_{i=1}^{n} z_i z_{n+i} \neq 0\right\}$$

$$\text{et } F = \left\{[z_1 : ... : z_{2n}] \in \mathbb{P}^{2n-1} \ : \ \sum_{i=1}^{n} z_i z_{n+i} = 0\right\}$$

dans le cas de $\mathscr{Q}_{2n-1}$ ce sont respectivement :

$$\mathscr{O} = \{[z_0 : z_1 : ... : z_{2n}] \in \mathscr{Q}_{2n-1} \ : \ z_0 \neq 0\}$$

$$\text{et } F = \{[z_0 : z_1 : ... : z_{2n}] \in \mathscr{Q}_{2n-1} \ : \ z_0 = 0\} \ .$$

Notons $r : Spin_{2n}(\mathbf{k}) \to SO(J_{2n})$ le revêtement universel.

Pour le type D_n, on prend pour tore maximal le tore :

$$T := r^{-1}\left(T_{2n} \cap SO(J_{2n})\right)$$

où T_{2n} est le sous-groupe des matrices diagonales de $SL(2n, \mathbf{k})$. Pour sous-groupe de Borel B^-, on prend le groupe :

$$r^{-1}(B_{2n}^- \cap SO(J_{2n}))$$

où B_{2n}^- est le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de $SL(2n, \mathbf{k})$.

Pour le type B_3 il suffit de remplacer ci-dessus r par l'inclusion i : $Spin(7, \mathbf{k}) \to SO(J_8)$.

10.3.4. Racines et réflexions sphériques. — Comme les variétés $X = \mathbb{P}^{2n-1}$ ou $\mathscr{Q}_{2n-1}$ sont des $G-$variétés magnifiques de rang minimal 1 (pour $G = Spin_{2n}(\mathbf{k})$ ou $Spin_7(\mathbf{k})$ (si $n = 3$)), elles n'ont qu'une racine sphérique, γ.

En particulier, par l'unique point fixe de B^- dans X, noté $\mathbf{z}$, il ne passe qu'une seule courbe C_γ, irréductible, $T-$invariante et non contenue dans l'orbite fermée F.

On explicite C_γ dans le cas de $\mathbb{P}^{2n-1}$:

$$C_\gamma = \left\{[x : 0 : ... : 0 : y] \in \mathbb{P}^{2n-1}\right\}$$

et dans le cas de $\mathscr{Q}_{2n-1}$:

$$C_\gamma = \left\{[z : x : 0 : ... : 0 : y] \ : \ z^2 = xy\right\} \ .$$

La courbe C_γ joint le point $\mathbf{z}$ au point $s_\gamma\mathbf{z}$ (ce qui définit l'élément $s_\gamma \in W^Q$).

Dans le tableau ci-après, on rassemble pour chaque variété magnifique, les points $\mathbf{z}$ et $s_\gamma\mathbf{z}$.

diagrammes	$\overset{\alpha_1}{\bullet}-\overset{\alpha_2}{\circ}-\ldots-\overset{\alpha_{n-2}}{\circ}<^{\circ\,\alpha_n}_{\circ\,\alpha_{n-1}}$ $(n\geq 3)$ ou $\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\alpha'}{\bullet}$		$\overset{\alpha_1}{\circ}-\overset{\alpha_2}{\circ}\Rightarrow\overset{\alpha_3}{\bullet}$	
G	$Spin_{2n}(\mathbf{k})$		$Spin_7(\mathbf{k})$	
X	$\mathscr{Q}_{2n-1}$	$\mathbb{P}^{2n-1}$	$\mathscr{Q}_7$	$\mathbb{P}^7$
$\mathbf{z}$, $s_\gamma\mathbf{z}$	[0:...:0:1], [0:1:0:...:0]	[0:...:0:1], [1:0:...:0]	[0:...:0:1], [0:1:0:...:0]	[0:...:0:1], [1:0:...:0]

10.4. Propriétés des réflexions sphériques. — Dans le lemme suivant, sont rassemblées les propriétés des s_γ (*cf.* la définition 6) qui vont servir plus loin :

Lemme 10.2. — *Si γ est une racine sphérique, alors l'élément $s_\gamma \in W^Q$ correspondant vérifie :*

i) $s_\gamma = s_\alpha s_\beta$ pour certaines racines positives α, β telles que $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 0$ et $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}_{>0}\gamma$;

ii) $s_\gamma\rho \in \rho + \mathbb{Z}\gamma$.

Remarques :

— Ce résultat est dû à T. A. Springer (*cf.* [De Concini-Springer, p. 293]).

— L'assertion ii) entraîne $\langle\rho, \alpha^\vee\rangle = \langle\rho, \beta^\vee\rangle$ car les racines α et β ne sont pas proportionnelles et :

$$\rho - s_\gamma\rho = \rho - s_\alpha s_\beta\rho = \langle\rho, \alpha^\vee\rangle\alpha + \langle\rho, \beta^\vee\rangle\beta \in \mathbb{Z}(\alpha + \beta) \ .$$

Si $\lambda \in \mathrm{pic}(X)$ alors on a aussi : $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle = \langle\lambda, \beta^\vee\rangle$ à cause de (21) (*cf.* la remarque p. 34).

Démonstration : Soit γ une racine sphérique de X.

D'abord, on se ramène au cas où X est de rang 1 :

On pose

$$X_1 := \bigcap_{j \neq \gamma} D_j$$

(l'intersection transverse de diviseurs limitrophes $D_j \neq D_\gamma$). Remarquons que X_1 est encore magnifique de rang minimal car ses points fixes pour T sont dans l'orbite fermée F (*cf.* [Ressayre, pro. 2.3]). Au lieu de raisonner dans la variété X, on peut raisonner dans la variété X_1 qui est de rang 1 et dont γ est la racine sphérique. On suppose donc pour la suite de la démonstration que X est de rang 1.

1ère étape : quelques cas particuliers

Le lemme est vérifié pour les exemples de variétés magnifiques du paragraphe 10.3 :

— l'espace projectif $\mathbb{P}^{2n-1}$ et la quadrique $\mathcal{Q}_{2n-1}$ munis de l'action naturelle de $Spin_{2n}(\mathbf{k})$;

— l'espace projectif $\mathbb{P}^7$ et la quadrique $\mathcal{Q}_7$ munis de l'action naturelle de $Spin_7(\mathbf{k})$.

En effet, voici pour chacun de ces cas-là, dans le tableau suivant (qui complète le tableau du paragraphe 10.3), $s_\gamma\rho - \rho$ et deux racines positives α, β qui satisfont le i) du lemme :

diagrammes	$\overset{\alpha_1}{\bullet}-\overset{\alpha_2}{\circ}-\ldots-\overset{\alpha_{n-2}}{\circ}<^{\circ\,\alpha_n}_{\circ\,\alpha_{n-1}}$ $(n\geq 3)$ ou $\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\alpha'}{\bullet}$		$\overset{\alpha_1}{\circ}-\overset{\alpha_2}{\circ}\Rightarrow\overset{\alpha_3}{\bullet}$	
G	$Spin_{2n}(\mathbf{k})$		$Spin_7(\mathbf{k})$	
X	$\mathcal{Q}_{2n-1}$	$\mathbb{P}^{2n-1}$	$\mathcal{Q}_7$	$\mathbb{P}^7$
α β	$\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}$ $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-2}+\alpha_n$ ou α, α' si $n=2$		$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ $\alpha_2+\alpha_3$	
γ	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\alpha+\beta$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\alpha+\beta$
s_γ	$s_\alpha s_\beta$			
$s_\gamma\rho-\rho$	$(2-2n)\gamma$	$(1-n)\gamma$	$(2-2n)\gamma$	$(1-n)\gamma$

Maintenant, on va réduire la démonstration du lemme à ces cas particuliers.

2ème étape : induction parabolique

Rappelons une définition de [Luna01, §3.4]

DÉFINITION 7. — *Soit P un sous-groupe parabolique de G de radical $R(P)$. Si $\overline{X}$ est une $P/R(P)-$variété magnifique, alors on note : $G \times^P \overline{X}$ la $G-$variété algébrique obtenue comme quotient de $G \times \overline{X}$ sous l'action de P donnée par :*

$$\forall\, p \in P, \forall\, g \in G, \forall\, x \in \overline{X}, p.(g,x) := (gp^{-1}, p.x) \ .$$

La variété $G \times^P \overline{X}$ est une $G-$variété magnifique et on dit qu'elle est obtenue par induction parabolique de $\overline{X}$ à travers P.

Remarques : 1) En ce qui concerne le rang, on a l'équivalence :

$$G \times^P \overline{X} \text{ est de rang } r \text{ (resp. de rang minimal)}$$
$$\Leftrightarrow \overline{X} \text{ est de rang } r \text{ (resp. de rang minimal).}$$

2) En fait $\overline{X}$ est une sous-variété fermée de $G \times^P \overline{X}$ car pour le morphisme

$$\theta : G \times^P \overline{X} \to G/P \ , \ (g,x) \mod P \mapsto g \mod P$$

$\overline{X} = \theta^{-1}(P/P)$.

Nous allons voir que l'induction parabolique conserve les propriétés $i), ii)$.

Considérons donc une variété magnifique $\overline{X}$ de rang minimal 1 et supposons que $X = G \times^{Q'} \overline{X}$ pour un certain parabolique Q' de G. D'abord, quitte à conjuguer Q' par un élément de G, on peut exiger que $Q \subseteq Q'$. En effet, l'existence d'un morphisme $G-$équivariant $X = G \times^{Q'} \overline{X} \to G/Q'$ montre que G/Q' contient un point fixe pour Q.

On va montrer que si $\overline{X}$ vérifie le lemme 10.2, alors X aussi. Fixons pour cela les notations suivantes concernant $\overline{X}$: soit $R(Q')$ le radical de Q' et

$$\overline{G} := Q'/R(Q'),\ \overline{T} := T/R(Q') \cap T,\ \overline{B} := B/R(Q') \cap B,$$
$$\overline{B^-} := B^-/R(Q') \cap B^-,\ \overline{Q} := Q/R(Q') \cap Q,\ \overline{W} := W_{Q'} = N_{Q'}(T)/T\ .$$

Dans $\overline{G}$, $\overline{B}$ est un sous-groupe de Borel et $\overline{T}$ un tore maximal. Notons $\overline{\Phi}$ le système de racines correspondant avec ses racines positives $\overline{\Phi}^+$ et ses racines simples $\overline{\Delta}$. On a alors les inclusions :

$$\overline{\Phi} \subseteq \Phi, \overline{\Phi}^+ \subseteq \Phi^+, \overline{\Delta} \subseteq \Delta\ .$$

Remarque : le groupe de Weyl de $(\overline{G}, \overline{T})$ est $\overline{W}$ qui est un sous-groupe de W et on a aussi : $\overline{W}^{\overline{Q}} \subseteq W^Q$.

Enfin, notons $\overline{\gamma}$ l'unique racine sphérique de $\overline{X}$ (il n'y en a qu'une car $\overline{X}$ est de rang 1).

En fait $\overline{\gamma} = \gamma$, la racine sphérique de X. En effet, si on note $\overline{F}$ l'unique $\overline{G}-$orbite fermée de $\overline{X}$ et F l'unique $G-$orbite fermée de X, alors d'une part $\overline{\gamma}$ est le poids de $\overline{T}$ dans $T_{\overline{\mathbf{z}}}\overline{X}/T_{\overline{\mathbf{z}}}\overline{F}$ (où $\overline{\mathbf{z}}$ est l'unique point fixe de $\overline{B^-}$ dans $\overline{X}$) et d'autre part, γ est le poids de T dans $T_{\mathbf{z}}X/T_{\mathbf{z}}F$ (où $\mathbf{z}$ est l'unique point fixe de B^- dans X). Mais puisque l'on a supposé que $X = G \times^{Q'} \overline{X}$, on a $\mathbf{z} = 1 \times^{Q'} \overline{\mathbf{z}}$ et $F = G \times^{Q'} \overline{F}$ et donc l'isomorphisme de $T-$modules :

$$T_{\overline{\mathbf{z}}}\overline{X}/T_{\overline{\mathbf{z}}}\overline{F} \simeq T_{\mathbf{z}}X/T_{\mathbf{z}}F\ .$$

Maintenant, vu que $\overline{\gamma} = \gamma$, les courbes irréductibles associées à γ dans X et à $\overline{\gamma}$ dans $\overline{X}$ coïncident (puisque $R(P)$ agit trivialement sur $\overline{X}$, la courbe irréductible associée à $\overline{\gamma}$ est aussi $T-$stable). On a par conséquent :

$$s_\gamma = s_{\overline{\gamma}} \in \overline{W}^{\overline{Q}} \subseteq W^Q\ .$$

Puisque $\overline{\Phi}^+ \subseteq \Phi^+$, si $\overline{X}$ vérifie le point $i)$ du lemme 10.2, alors X aussi.

Pour le point $ii)$, c'est moins immédiat.

On va utiliser les poids fondamentaux $(\omega_\delta)_{\delta\in\Delta}$.

Comme $\overline{\Delta} \subseteq \Delta$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\rho = \sum_{\delta\in\Delta}\omega_\delta &= \sum_{\delta\in\overline{\Delta}}\omega_\delta + \sum_{\delta\in\Delta\setminus\overline{\Delta}}\omega_\delta\\ &= \overline{\rho}+\pi\end{aligned}$$

où $\overline{\rho}$ est la demi-somme des racines positives de $\overline{\Phi}$ et où $\pi := \displaystyle\sum_{\delta\in\Delta\setminus\overline{\Delta}}\omega_\delta$.

On a alors :

$$\begin{aligned}s_\gamma(\rho)-\rho &= s_{\overline{\gamma}}(\rho)-\rho\\ &= s_{\overline{\gamma}}(\overline{\rho})-\overline{\rho}+s_{\overline{\gamma}}(\pi)-\pi\ .\end{aligned}$$

Mais pour chaque $\alpha \in \overline{\Delta}$:

$$\begin{aligned}s_\alpha\pi &= \pi - \langle\pi,\alpha^\vee\rangle\alpha\\ &= \pi - \sum_{\delta\in\Delta\setminus\overline{\Delta}}\langle\omega_\delta,\alpha^\vee\rangle\alpha\\ &= \pi\ .\end{aligned}$$

Donc, pour tout $w \in \overline{W}$, $w\pi = \pi$ et en particulier :

$$s_{\overline{\gamma}}\pi = \pi$$

car $s_{\overline{\gamma}} \in \overline{W}$.

Ainsi, on trouve que :

$$s_\gamma\rho - \rho = s_{\overline{\gamma}}\overline{\rho}-\overline{\rho}\ .$$

Finalement, si $\overline{X}$ vérifie $ii)$, alors X aussi.

Pour conclure cette démonstration : soit H un sous-groupe d'isotropie générique de X (de sorte que la $G-$orbite ouverte de X soit isomorphe à G/H). Soit P un sous-groupe parabolique de G tel que $R(P) \subseteq H \subseteq P$ (par exemple $P = H$) et dont la dimension est minimale pour cette propriété. Alors d'après [Wasserman, lemme 2.2] X est isomorphe à l'induction parabolique : $G\times^P\overline{X}$ où $\overline{X}$ est une $P/R(P)$ variété magnifique de rang 1 et d'orbite ouverte P/H. La variété magnifique $\overline{X}$ est encore de rang 1 car :

$$\mathrm{rang}(G)-\mathrm{rang}(H) = \mathrm{rang}(P-\mathrm{rang}(H) = \mathrm{rang}P/R(P)-\mathrm{rang}H/R(P)\ .$$

De plus, par minimalité de la dimension de P, on peut montrer que $\overline{X}$ est une variété *première* au sens de [Wasserman, def. 2.3]. Or les variétés magnifiques premières de rang 1 sont caractérisées (à isomorphisme près) par leur racine sphérique et leur dimension (*cf.* [Wasserman, rem. 2.4]) et leur liste est donnée dans [Wasserman, table 1, p.381]. Dans cette table les seules variétés de rang minimal sont les exemples étudiés ci-dessus :

$$\mathbb{P}^{2n-1} \text{ ou } \mathscr{Q}_{2n-1}$$

munie de l'action de $Spin_{2n}(\mathbf{k})$ ou encore

$$\mathbb{P}^{7} \text{ ou } \mathscr{Q}_{7}$$

munie de l'action de $Spin_7(\mathbf{k})$.

Q.e.d.

11. Retour sur le lemme clef

Rappelons qu'est fixé un sous-groupe à un paramètre $\zeta : \mathbf{k}^* \to T$ dominant et $X-$régulier de sorte que :

$$X^\zeta = X^T$$

et les cellules positives $X^+(x)$, $x \in X^T$, sont toutes $B-$stables.

11.1. Rappel des hypothèses. — La situation qui nous intéresse (*cf.* la condition (6) page 25) est celle de deux $B-$orbites $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ dans X dans la position relative suivante :

$$\mathscr{B}' \subseteq \overline{\mathscr{B}} \text{ et } \operatorname{codim}_X \mathscr{B}' = \operatorname{codim}_X \mathscr{B} + 1 = i + 1 \ . \tag{22}$$

et on supppose de plus que le morphisme :

$$d^i_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mu) : H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \to H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \tag{23}$$

est non nul.

Notre objectif est de démontrer le lemme clef 8.3 *c-à-d* que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux $B-$orbites de la même cellule.

Pour cela, on note $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$ les $G-$orbites de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et w, w' les éléments de W^Q tels que :

$$\mathscr{B} = X^+_w \cap \mathscr{O} \text{ et } \mathscr{B}' = X^+_{w'} \cap \mathscr{O}' \ .$$

Rappelons que X^+_w et $X^+_{w'}$ sont les cellules centrées en les points $T-$fixes : $w\mathbf{z}$ et $w'\mathbf{z}$.

Il s'agit donc de démontrer que $w = w'$ si les hypothèses (22) et (23) sont vérifiées.

11.2. Démonstration du lemme clef. — On va procéder en plusieurs étapes.

Comme $\mathscr{B}' \subseteq \overline{\mathscr{B}}$, on a forcément : $w' \in \overline{X_w^+}$. Or :

Proposition 11.1. — *Soient $w, w' \in W^Q$.*

Si $w'\mathbf{z} \in \overline{X_w^+}$, alors :

$$l(w') \geq l(w) \ .$$

Remarque : Cela est bien connu dans le cas des variétés de drapeaux.

Démonstration :

D'après [Brion98, th. 1.4 (ii)], $\overline{X_w^+}$ intersecte F, l'orbite fermée de X, proprement dans $G.\overline{X_w^+}$ *c-à-d* : toutes les composantes irréductibles de

$$\overline{X_w^+} \cap F$$

sont de dimension $\dim \overline{X_w^+} + \dim F - \dim G.\overline{X_w^+}$.

Or, $\overline{X_w^+ \cap F}$ est une de ces composantes (car $X_w^+ \cap F$ est une $B-$orbite donc un ouvert irréductible de $\overline{X_w^+} \cap F$). Donc :

$$\dim \overline{X_w^+} \cap F = \dim \overline{X_w^+ \cap F} = \dim \overline{Bw\mathbf{z}} \ .$$

D'un autre côté :

$$w'\mathbf{z} \in \overline{X_w^+} \Rightarrow Bw'\mathbf{z} \subseteq \overline{X_w^+} \cap F$$

d'où : $\dim \overline{Bw'\mathbf{z}} \leq \dim \overline{Bw\mathbf{z}}$.

Q.e.d.

En utilisant que $\mathscr{B}' \subseteq \overline{\mathscr{B}}$ et aussi que $\mathrm{codim}_X(\mathscr{B}') = \mathrm{codim}_X \mathscr{B} + 1$ on trouve :

Proposition 11.2. — *On a l'alternative suivante :*

$$l(w') = l(w) + 1 \text{ et } \dim \mathscr{O}' = \dim \mathscr{O} \tag{24}$$

ou bien

$$l(w') = l(w) \text{ et } \dim \mathscr{O}' + 1 = \dim \mathscr{O} \ . \tag{25}$$

Démonstration :

Puisque $\mathscr{B} = X_w^+ \cap \mathscr{O}$ et comme X_w^+ intersecte proprement F dans $\overline{\mathscr{O}}$ ([Brion98, th. 1.4 (ii)]), on a les égalités :

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{B} &= \dim \mathscr{O} - \mathrm{codim}_{\mathscr{O}}(\mathscr{B}) \\ &= \dim \mathscr{O} - \mathrm{codim}_F(X_w^+ \cap F) \\ &= \dim \mathscr{O} - \mathrm{codim}_F(Bw\mathbf{z}) \\ &= \dim \mathscr{O} - l(w) \ ; \end{aligned}$$

et de même :

$$\dim \mathscr{B}' = \dim \mathscr{O}' - l(w') \ \ ;$$

d'où :

$$\dim \mathscr{O} - \dim \mathscr{O}' + l(w') - l(w) = 1 \ \ .$$

Or, d'une part l'inclusion :

$$\mathscr{O}' = G.\mathscr{B}' \subseteq G.\overline{\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{O}}$$

entraîne que :

$$\dim \mathscr{O} - \dim \mathscr{O}' \geq 0 \ \ ;$$

et d'autre part, d'après la proposition 11.1 :

$$l(w') - l(w) \geq 0 \ \ .$$

Q.e.d.

Pour les deux dernières propositions, on a seulement utilisé l'hypothèse :

$$\mathscr{B}' \subseteq \overline{\mathscr{B}} \text{ et } \mathrm{codim}_X \mathscr{B}' = \mathrm{codim}_X \mathscr{B} + 1 \ \ .$$

Continuons : puisque $w'\mathbf{z} \in \overline{X_w^+}$, d'après le lemme 9.1, il existe, dans la variété X, une chaîne de courbes, c_i, $T-$invariantes, irréductibles (et fermées) qui relient $w\mathbf{z}$ à $w'\mathbf{z}$:

$$w\mathbf{z} = x_0 \stackrel{c_0}{\to} x_1 \stackrel{c_1}{\to} ...x_N \stackrel{c_N}{\to} x_{N+1} = w'\mathbf{z} \ \ . \tag{26}$$

Cette notation signifie que les courbes c_i « vont toutes dans le même sens » *i.e.* :

$$\forall\, i,\ c_i(0) = x_i \text{ et } c_i(\infty) = x_{i+1}$$

(où l'on rappelle que pour un point quelconque $y \in c_i \setminus c_i^T$,

$$c_i(0) := \lim_{a \to 0} \zeta(a).y \text{ et } c_i(\infty) := \lim_{a \to \infty} \zeta(a).y$$

pour le sous-groupe à un paramètre ζ qui a servi à définir la décomposition cellulaire $X = \bigsqcup_{w \in W^Q} X_w^+$).

Comme tout point fixe $x \in X^T$ écrit de manière unique $x = \sigma\mathbf{z}$ pour un certain $\sigma \in W^Q$, on notera dorénavant :

$$l(x) := \mathrm{codim}_F(B.x) = l(\sigma) \ \ .$$

On aura besoin du résultat suivant :

Proposition 11.3. — *Soit X une variété magnifique de rang minimal.*

Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}(X)$ tel que $\lambda + \rho$ est régulier et pour toute racine sphérique γ de X, on a :

$$|l(w_\lambda) - l(w_\lambda s_\gamma)| = |l(\lambda) - l(s_\gamma * \lambda)| \geq 2 \tag{27}$$

Démonstration : La première égalité a lieu par définition de $l(\lambda)$, on va démontrer la minoration.

D'après le lemme 10.2 (p. 37), il existe 2 racines positives et orthogonales α et β telles que :

$$\alpha + \beta \in \mathbb{Z}\gamma \text{ et } s_\gamma = s_\alpha s_\beta \ .$$

Or on sait que, pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}(X)$, $s_\gamma\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}\gamma$ et que $s_\gamma\rho - \rho \in \mathbb{Z}\gamma$ (*cf.* (21) p. 34 et le lemme 10.2, ii)).

Donc :

$$s_\gamma * \lambda - \lambda = s_\gamma(\lambda + \rho) - \lambda - \rho$$
$$= -\langle\lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle\alpha - \langle\lambda + \rho, \beta^\vee\rangle\beta \in \mathbb{Z}\gamma \ .$$

Mais, on a forcément :

$$\langle\lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle = \langle\lambda + \rho, \beta^\vee\rangle \tag{28}$$

(*cf.* la remarque qui suit le lemme 10.2).

En outre, puisque $\lambda + \rho$ est un caractère régulier, $\langle\lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle > 0$ ou $\langle\lambda + \rho, \alpha^\vee\rangle < 0$.

Mais alors, le premier cas entraîne :

$$l(s_\gamma * \lambda) = l((s_\alpha s_\beta) * \lambda) > l(s_\beta * \lambda) > l(\lambda)$$

et le deuxième entraîne :

$$l(s_\gamma * \lambda) = l((s_\alpha s_\beta) * \lambda) < l(s_\beta * \lambda) < l(\lambda) \ .$$

On conclut, dans tous les cas, que :

$$|l(s_\gamma * \lambda) - l(\lambda)| \geq 2 \ .$$

Q.e.d.

Maintenant, on va utiliser l'hypothèse :

$$H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \text{ et } H^{i+1}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)} \neq 0 \ .$$

On raisonne par l'absurde : on suppose que $w \neq w'$ *i.e.* : la chaîne (26) est non triviale ($N \geq 0$).

Il ne reste plus que trois étapes :

1° dans la chaîne (26), la courbe c_0 est contenue dans l'orbite fermée F ;

2° dans la chaîne (26), $N = 0$;

3° Contradiction !

1ère étape : Pour la suite de points fixes de la chaîne de courbes (26), on a grâce aux propositions 11.1 et 11.2 les inégalités :

$$l(w) = l(x_0) \leq l(x_1) \leq \ldots \leq l(x_N) \leq l(x_{N+1}) = l(w') \leq l(w) + 1 \ . \tag{29}$$

De (29), il découle alors que :

$$0 \leq l(x_1) - l(x_0) \leq 1 \ . \tag{30}$$

Si la courbe c_0, qui relie x_0 à x_1, n'est pas contenue dans l'orbite fermée F, alors, d'après le paragraphe 10.2, il existe une racine sphérique γ_0 telle que :

$$c_0 = wC_{\gamma_0}$$

(C_{γ_0} est la courbe irréductible et $T-$invariante associée à γ_0). Donc :

$$x_0 = w\mathbf{z} \text{ et } x_1 = ws_{\gamma_0}\mathbf{z} \ . \tag{31}$$

Or, ce w tel que $x_0 = w\mathbf{z}$ n'est pas un élément quelconque de W^Q.

En effet, pour que la composante

$$H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)}$$

ne soit pas nulle (*i.e.* pour que le $\mathfrak{g}-$module simple $L(\mu)$ ait une multiplicité non nulle dans le $\mathfrak{g}-$module $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)$), il est nécessaire, selon le lemme 7.1, que :

$$\mu + \rho = w(\lambda + \rho + \sum_\gamma n_\gamma \gamma)$$

où $\displaystyle\sum_\gamma n_\gamma\gamma$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de racines sphériques.

En particulier, w est de la forme $w = w_{\lambda'}$ pour un certain $\lambda' = \lambda + \sum_\gamma n_\gamma \gamma \in \mathrm{pic}(X)$ tel que $\lambda' + \rho$ est régulier (rappelons que pour un tel λ', $w_{\lambda'}$ est le seul élément de W pour lequel $w_{\lambda'}(\lambda' + \rho)$ est dominant et régulier).

On en déduit que : $ws_{\gamma_0} = w_{\lambda'}s_{\gamma_0} \in W^Q$: en effet, si $\alpha \in \Phi^+$ est aussi une racine de Q, alors :

$$\begin{aligned} w_{\lambda'}s_{\gamma_0}(\alpha) > 0 &\Leftrightarrow (\mu + \rho, w_{\lambda'}s_{\gamma_0}(\alpha)) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\, w_{\lambda'}(\lambda' + \rho) \ , \ w_{\lambda'}s_{\gamma_0}(\alpha)\,) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\, \lambda' + \rho \ , \ s_{\gamma_0}(\alpha)\,) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\, s_{\gamma_0}\lambda' \ , \ \alpha\,) + (\, \rho \ , \ s_{\gamma_0}(\alpha)\,) > 0 \ . \end{aligned}$$

Mais d'une part, comme $s_{\gamma_0}\lambda' \in \mathrm{pic}(X)$ (*cf.* (21) dans la remarque p. 34), $s_{\gamma_0}\lambda$ est un caractère de Q (et pas seulement de T) et donc : $(s_{\gamma_0}\lambda', \alpha) = 0$.

D'autre part, par définition :

$$s_{\gamma_0} \in W^Q \Rightarrow s_{\gamma_0}(\alpha) > 0 \Rightarrow (\rho, s_{\gamma_0}(\alpha)) > 0 \ .$$

Ainsi, on a montré que $ws_{\gamma_0}(\alpha) > 0$ pour toute racine positive α qui est aussi racine de Q, *i.e.* :

$$ws_{\gamma_0} \in W^Q \ . \tag{32}$$

Il résulte alors de (31) et de (32) que :

$$|l(x_0) - l(x_1)| = |l(w) - l(ws_{\gamma_0})|$$

$$= |l(w_{\lambda'}) - l(w_{\lambda'}s_{\gamma_0})|$$
$$= |l(\lambda') - l(s_{\gamma_0} * \lambda')| \geq 2$$

comme le montre la proposition 11.3, car $\lambda' + \rho$ est régulier. Cela contredit (30) et en conséquence, la courbe c_0 est contenue dans l'orbite fermée F.

2ème étape : $N = 0$.

On déduit de la 1ère étape que :

$$\dim B.x_0 \neq \dim B.x_1 \ \textit{i.e.}\ l(x_0) \neq l(x_1)$$

car maintenant, x_0 et x_1 sont les deux point fixes d'une courbe $T-$invariante dans F qui est une variété de drapeaux et $B.x_1 \subseteq \overline{B.x_0}$.

En conséquence :

$$l(x_1) - l(x_0) = 1 \ .$$

Pour les mêmes raisons, la courbe c_N est incluse dans F et :

$$l(x_N) - l(x_{N+1}) = 1 \ .$$

Mais d'après les inégalités (29), cela n'est possible que si $N = 0$.

3ème étape : Forcément $w = w'$.

D'après la 2ème étape, tout se passe dans la variété de drapeaux $F \simeq G/Q$ où $\mathbf{z}$ est le point Q/Q et :

$$x_0 = w\mathbf{z} \ , \ x_1 = w'\mathbf{z} \ , \ l(w') = l(w) + 1$$

et surtout, les points $w\mathbf{z}$ et $w'\mathbf{z}$ sont reliés par une courbe irréductible et $T-$invariante de G/Q. Comme dans G/Q, les cellules de Bialynicki-Birula et les $B-$orbites coïncident, on en déduit que $Bw'\mathbf{z}$ est une $B-$orbite de codimension 1 dans $\overline{Bw\mathbf{z}}$. Il existe par conséquent une racine $\alpha \in \Phi$ telle que :

(33) $$w' = ws_\alpha \ .$$

Or, puisque la composante $H^i_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}_\lambda)_{(\mu)}$ est non nulle, d'après le lemme 7.1, il existe un certain poids $a \in \sum_{\gamma \in \Sigma_X} \mathbb{Z}\gamma$, combinaison à coefficients entiers de racines sphériques, tel que :

(34) $$w^{-1}(\mu + \rho) = \lambda + \rho + a$$

De même, w' vérifie :

(35) $$w'^{-1}(\mu + \rho) = \lambda + \rho + a'$$

pour un $a' \in \sum_{\gamma \in \Sigma_X} \mathbb{Z}\gamma$.

En faisant la différence (35) - (34) et en utilisant (33), on trouve :

$$s_\alpha w^{-1}(\mu + \rho) - w^{-1}(\mu + \rho) = a' - a \ ,$$

$$i.e.\ \langle \mu+\rho, (w\alpha)^\vee\rangle \alpha = a' - a\ ,\ \text{d'où :}$$

$$\alpha \in \sum_{\gamma\in\Sigma_X} \mathbb{Q}\gamma \tag{36}$$

car, le caractère $\mu+\rho$ étant dominant régulier, $(\mu+\rho, w\alpha) \neq 0$.

Mais cela est *impossible* ! car comme X est magnifique de rang minimal, on a :

$$\Phi \bigcap \left(\sum_{\gamma\in\Sigma_X} \mathbb{Q}\gamma \right) = \emptyset$$

(*cf.* le lemme 4.2 de la section 4). □

***

Je remercie tout particulièrement Michel Brion pour ses remarques et commentaires très clairs ansi que Nicolas Ressayre pour des discussions très utiles. Je remercie également l'arbitre pour les corrections et améliorations proposées.

Index

BIBLIOGRAPHIE

[Akhiezer] D. Akhiezer, *Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors*, Ann. Glob. Analysis and Geometry, vol. 1, no 1, pp. 49-78, 1983.

[Bialynicki] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of Mathematics, 98, pp. 480-497, 1973.

[Borel-Tits] A. Borel, J. Tits, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs I*, Inventiones, vol. 12, pp. 95-104, 1971.

[Bourbaki] Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 4,5,6, Masson, 1981.

[Brion89] M. Brion, *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. 58, pp. 397-424, 1989.

[Brion90a] M. Brion, *Vers une généralisation des espaces symétriques*, Journal of Algebra 134, pp. 115-143, 1990.

[Brion90b] M. Brion, *Une extension du théorème de Borel-Weil*, Math. Ann. 286, pp. 655–660, 1990.

[Brion93] M. Brion, *Variétés sphériques et théorie de Mori*, Duke Math. J. 72, no. 2, pp. 369–404, 1993.

[Brion94] M. Brion, *Représentations des groupes réductifs dans des espaces de cohomologie*, Math. Ann. 300, no. 4, pp. 589–604, 1994.

[Brion98] M. Brion, *The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition*, Comm. Math. Helvetici 73, pp 137-174, 1998.

[Brion-Luna] M. Brion et D. Luna, *Sur la structure locale des variétés sphériques*, Bull. Soc. Math. France 115, no. 2, pp. 211–226, 1987.

[Brion-Luna-Vust] M. Brion, D. Luna, Th. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Inventiones, 84, pp. 617-632, 1986.

[Brion-Pauer] M. Brion, F. Pauer, *Valuations des espaces homogènes sphériques*, Comment. Math. Helv., 62, no. 2, pp. 265–285, 1987.

[DeConcini-Procesi] C. De Concini, C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Invariant theory, Proc. 1st 1982 Sess. C.I.M.E., Montecatini/Italie, Lect. Notes Math. 996, pp. 1-44, 1983.

[De Concini-Springer] C. De Concini, T. A. Springer, *compactification of symmetric varieties*, Transformation groups, vol. 4, n. 2-3, pp. 273-300, 1999.

[Dixmier] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthiers-Villars, 1974

[Grothendieck] A. Grothendieck, *Local cohomology*, Lecture Notes in Mathematics 41, Springer-Verlag 1967.

[Kato] S. Kato, *A Borel-Weil-Bott type theorem for group completions*, J. of algebra, 259, pp. 572-580, 2003.

[Kempf] G. Kempf, *The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation*, Advances in Mathematics 29, pp 310-396, 1978.

[Konarski] J. Konarski, *Decompositions of normal algebraic varietis determined by an action of a one-dimensional torus*, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, vol. XXVI, No 4, 1976.

[Knop-Kraft-Vust] F. Knop, H. Kraft, Th. Vust, *The Picard group of a $G-$variety*, in Algebraic transformation groups and invariant theory, Kraft, Slodowy, Springer (eds), DMV seminar, 13, Birkhaüser, 1989.

[Luna96] D. Luna, *Toute variété magnifique est sphérique*, Transform. Groups 1, no. 3, pp. 249–258, 1996.

[Luna01] D. Luna, *Variétés sphériques de type A*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., No. 94, pp. 161–226,2001

[Ressayre] N. Ressayre, *Spherical homogeneous spaces of minimal rank*, à paraître (disponible à : http ://www.math.univ-montp2.fr/∼ressayre/spherangmin.ps) .

[Richardson] R. W. Richardson, *On orbits of algebraic groups and Lie groups*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 25, pp. 1-28, 1982.

[Rosenlicht] M. Rosenlicht, *Tori operating on projective varieties*, Rend. Mat. e Appl. (5) 25, pp. 129–138, 1966.

[Springer] T. A. Springer, *Linear algebraic groups, 2nd ed.*, Progress in Mathematics 9, Birkhäuser, 1998.

[Springer97] T. A. Springer, *Schubert varieties and generalizations*, in Representation theories and algebraic geometry — Montréal 1997, pp. 413-440, Kluwer, 1998.

[T] A. Tchoudjem *Cohomologie des fibrés en droites sur les compactifications des groupes réductifs*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37, no. 3, 415–448, 2004.

[Wasserman] B. Wasserman, *Wonderful varieties of rank two*, Transformation groups, Vol. 1, no 4, pp. 375-403, 1996.