Représentations d'algèbres de Lie dans des groupes de cohomologie à support

Saint-Martin d'Hères

Introduction

Un des principaux problèmes de la géométrie algébrique est la recherche d'invariants des variétés algébriques en vue de leur classification. Pour en fournir, la cohomologie des faisceaux quasi cohérents est le moyen le plus efficace.

Pour une variété X munie de l'action d'un groupe algébrique linéaire G, si $\pi : L \to X$ est un $G-$fibré en droites (c'est-à-dire que L est un fibré en droites, que G opère dans L, que pour cette opération π est $G-$équivariant et que l'action de G dans les fibres est linéaire), alors les groupes de cohomologie du faisceau inversible associé sont des représentations de G qui peuvent être dignes d'intérêt.

Par exemple, si X est une variété de drapeaux, c'est-à-dire une variété projective, lisse (disons sur $\mathbb{C}$) et homogène pour un groupe semi-simple, le fameux *théorème de Borel-Weil-Bott* décrit complètement les groupes de cohomologie $H^i(X, L)$ des fibrés en droites sur X ([Bot]) : *il y a au plus un degré i où ce groupe n'est pas nul et en ce degré $H^i(X, L)$ est une représentation irréductible de G.*

D'ailleurs, on les obtient toutes ainsi †.

On connaît aussi la cohomologie des faisceaux inversibles sur les variétés toriques, qui sont des variétés normales contenant un ouvert isomorphe à un tore $(\mathbb{C}^*)^n$ $(n \geq 0)$. Grâce à la classification combinatoire de ces variétés, leur cohomologie se prête bien aux calculs, à l'aide du complexe de Čech.

On voudrait généraliser la détermination des groupes de cohomologie des fibrés en droites au cas des *variétés sphériques* : ce sont des variétés normales avec une action d'un groupe réductif connexe G et qui ont un nombre fini d'orbites pour un sous-groupe résoluble maximal B de G. Leur famille comprend à la fois les variétés toriques, les variétés de drapeaux ainsi que les variétés symétriques avec leurs compactifications.

Étant donnés un $G-$fibré en droites $\pi : L \to X$ où X est sphérique, et un recouvrement ouvert affine de X (qui permet de définir un complexe de Čech dont l'homologie est la cohomologie de L sur X), les termes du complexe sont certes des représentations de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de G, mais leur structure de $\mathfrak{g}-$modules n'est pas claire. C'est pourquoi, on se servira aussi du complexe de Grothendieck-Cousin (*cf.* [Ke78]). Ses groupes d'homologie sont précisément les groupes de cohomologie de L sur X et il fait intervenir des groupes de cohomologie à support dans des cellules, qui sont certaines sous-variétés $B-$invariantes de X.

On rappellera la définition des groupes de cohomologie à support dans le chapitre I. Dans le cas qui nous concerne, ces groupes sont aussi des $\mathfrak{g}-$modules

† En fait, on les obtient déjà toutes avec H^0.

particuliers : les $\mathfrak{g} - B-$modules (*cf.* la section III.1). On peut les analyser : on les décompose en somme directe de sous-$\mathfrak{g}-$modules de longueur finie dont on détermine une suite de composition finie.

Cette analyse suffit, dans le cas des variétés de drapeaux, pour retrouver le théorème de Borel-Weil-Bott et, dans le cas des variétés toriques, la structure des groupes de cohomologie des fibrés en droites (ainsi que pour déterminer leurs groupes de cohomologie à support dans des sous-variétés toriques).

Cette méthode aboutit aussi dans le cas de la compactification magnifique d'un groupe adjoint et, plus généralement, pour une compactification « régulière » d'un groupe réductif connexe : on obtient ainsi une description complète des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur ces variétés (théorèmes V.2.2 et V.3.2). Dans le cas de la compactification magnifique, le résultat a été annoncé dans [Tch] et aussi démontré avec les mêmes méthodes, de manière indépendante, par Syu Kato ([K]). La démonstration est plus difficile dans le cas général.

On rappellera au premier chapitre les résultats usuels sur les groupes de cohomologie à support dont on se servira. On énoncera également le théorème de Grothendieck-Cousin (I.3.1) qui relie la cohomologie d'un faisceau $\mathcal{F}$ au complexe de Grothendieck-Cousin associé à $\mathcal{F}$ et à une filtration de fermés.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéressera aux cas des variétés munies de l'action d'un tore T. Après quelques conventions sur les caractères (II.2.1), on introduira les cellules de Bialynicki-Birula (II.3) puis on estimera les caractères de groupes de cohomologie de faisceaux cohérents à support dans ces cellules (*cf.* le théorème II.3.2). Pour ce qui concerne les variété toriques, on donnera une formule pour les groupes de cohomologie des faisceaux inversibles à support dans une sous-variété $T-$invariante (théorème II.4.2) ; on s'en servira à la fin de la démonstration du théorème principal V.3.2.

Au début du chapitre III, on pose quelques notations et on rappelle la définition des $\mathfrak{g} - B-$modules avec quelques-unes de leurs propriétés (III.1). Après cela et après avoir rappelé comment l'algèbre de Lie de G agit sur certains groupes de cohomologie à support, on retrouve le théorème de Borel-Weil-Bott (théorème III.3.1).

Dans la partie III.4, on étudiera pour eux-mêmes les groupes de cohomologie du faisceau structural d'un groupe réductif G à support dans les doubles classes BgB^- ($g \in G$).

Le chapitre IV consiste à fixer les notations concernant les variétés régulières et à donner une décomposition et des filtrations, en tant que $\mathfrak{g}-$modules, des groupes de cohomologie à support dans les cellules et dans certaines $B-$orbites des faisceaux linéarisés, cohérents localement libres (*cf.* le lemme IV.4.1 et le corollaire IV.4.4.1).

Enfin, au cours du dernier chapitre, on énoncera et démontrera le théorème principal de cette thèse sur la cohomologie des fibrés en droites sur les compactifications régulières des groupes réductifs (théorème V.3.2), en commençant par le cas de la compactification magnifique (théorème V.2.2).

Table des matières

Dans ce texte, $\mathbb{K}$ sera un corps algébriquement clos et de caractéristique 0, on entendra par variété algébrique un schéma X, séparé, réduit et de type fini sur $\mathbb{K}$ et on notera par $\mathscr{O}_X$ son faisceau structural.

Chapitre I

La cohomologie à support

On va introduire dans ce chapitre les groupes et les faisceaux de cohomologie à support. On énoncera leurs principales propriétés, qui serviront dans les chapitres suivants.

La section essentielle, ici, est la section I.3 où l'on définit le complexe de Grothendieck-Cousin que l'on utilisera pour déterminer certains groupes de cohomologie (dans les chapitres II, III et V).

En guise de première approche des termes du complexe de Grothendieck-Cousin, on donne, dans la section I.4, des critères d'annulation des groupes de cohomologie à support (*cf.* le théorème I.4.1).

La section I.5 servira surtout au chapitre III, dans l'étude des groupes de cohomologie à support du faisceau structural d'un groupe réductif (*cf.* la section III.4).

On terminera par le rapport entre les groupes de cohomologie à support fermé et les groupes « Ext ».

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X.

I.1 Groupes de cohomologie à support (d'après [Ke78], [G67])

I.1.1 Définitions

Si Z est un fermé de X on définit *le groupe des sections de $\mathcal{F}$ à support dans Z* :

$$\Gamma_Z(\mathcal{F}) : = \{\sigma \in \mathcal{F}(X) \ : \ \sigma|_{X-Z} = 0\} \ .$$

Si $Z_2 \subseteq Z_1$ sont deux fermés de X, on remarque que

$$\Gamma_{Z_2}(\mathcal{F}) \subseteq \Gamma_{Z_1}(\mathcal{F})$$

et on pose

$$\Gamma_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) : = \Gamma_{Z_1}(\mathcal{F})/\Gamma_{Z_2}(\mathcal{F}) \ .$$

Soit $H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ le $i-$ème groupe dérivé du foncteur $\Gamma_{Z_1/Z_2}(\ )$ en $\mathcal{F}$.

Si Z est un sous-espace localement fermé de X, on pose :

$$H^i_Z(\mathcal{F}) : = H^i_{\overline{Z}/\overline{Z}-Z}(\mathcal{F}) \ \ (\forall\, i \geq 0) \ .$$

On notera parfois $\partial Z = \overline{Z} - Z$ le *bord* de Z.

Remarques : Pour tout $i \geq 0$:

- $H^i_{\emptyset}(\mathcal{F}) = (0)$;
- $H^i_{Z/\emptyset}(\mathcal{F}) = (0)$;
- $H^i_X(\mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})$;
- si Z est ouvert, $H^i_Z(\mathcal{F}) = H^i(Z, \mathcal{F}|_Z)$;
- si Z est réunion de deux ouverts disjoints : $Z = Z' \sqcup Z''$, alors $H^i_Z(\mathcal{F}) = H^i_{Z'}(\mathcal{F}) \oplus H^i_{Z''}(\mathcal{F})$;
- $H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) = H^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{Z_1 \setminus Z_2})$ (*cf.* [Ke78, lemme 7.7]).

Si A est un anneau nœthérien, commutatif et unitaire, on définit le foncteur $\Gamma_I(\ )$ sur la catégorie des $A-$modules par :

$$\Gamma_I(M) = \{m \in M \ : \ I^n.m = (0) \text{ pour un } n \geq 0 \ \}$$

(pour tout $A-$module M) et on note $H^i_I(\ )$ le $i-$ème groupe du foncteur dérivé à droite correspondant.

Le rapport avec le début de la section est donné par la proposition suivante :

Proposition I.1.1 ([G67, théorème 2.3]) *Si M est un $A-$module et $\widetilde{M}$ le faisceau correspondant sur le schéma* Spec$A$, *si I est un idéal de A et $V(I)$ le fermé de* Spec$A$ *associé, alors :*

$$H^q_I(M) = H^q_{V(I)}(\widetilde{M})$$

pour tout $q \geq 0$.

I.1.2 Quelques résultats préliminaires

Pour les deux lemmes suivants, on suppose que $Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$ sont trois fermés de X.

Lemme I.1.2 (d'excision [Ke78, lemme 7.9]) *Pour tout ouvert U de X qui contient $Z_1 - Z_2$ et pour tout $i \geq 0$, les morphismes induits par la restriction à U*

$$H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^i_{Z_1 \cap U/Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_U)$$

sont des isomorphismes.

Lemme I.1.3 (Grothendieck ([G67] et [Ke78, lemme 7.6]))
On a une suite exacte longue :

$$0 \to H^0_{Z_2/Z_3}(\mathcal{F}) \to H^0_{Z_1/Z_3}(\mathcal{F}) \to H^0_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$$

$$\to H^1_{Z_2/Z_3}(\mathcal{F}) \to H^1_{Z_1/Z_3}(\mathcal{F}) \to H^1_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \to \dots$$

Remarque : Si $Z_1 = X$ et $Z_3 = \emptyset$, on obtient la suite exacte longue :

$$0 \to H^0_{Z_2}(\mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X \setminus Z_2, \mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \to H^1_{Z_2}(\mathcal{F}) \to \dots$$

EXEMPLE : Pour le fermé $Z = \{0\}$ de l'espace affine

$$X = \mathbb{A}^d \ ,$$

on a :

$$H^i_{\{0\}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^d}) = (0) \text{ si } i \neq d$$

et :

$$H^d_{\{0\}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^d}) = \bigoplus_{\alpha_1, \dots, \alpha_d < 0} \mathbb{K}.x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

avec la structure de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]-$module où la multiplication des monômes est la multiplication usuelle sauf qu'on obtient 0 chaque fois qu'apparaît un exposant positif ou nul (*cf.* [Ha68, p. 380 et proposition 11.9 e)] et [Ku, proposition 11.9 e)]). On utilisera aussi, à plusieurs reprises, le lemme suivant :

Lemme I.1.4 *Si X est une variété algébrique alors tout faisceau quasi cohérent sur X, $\mathcal{F}$, qui est annulé par $\mathcal{I}_Y$, l'idéal de définition d'une sous-variété fermée, Y, de X †, peut être considéré comme un faisceau de $\mathcal{O}_Y-$modules sur Y (et vice versa). Dans ce cas, on a pour chaque paire $Z_1 \subseteq Z_2$ de sous-variétés fermées de X et pour tout $q \geq 0$:*

$$H^q_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) = H^q_{Z_1 \cap Y/Z_2 \cap Y}(\mathcal{F}|_Y) \ .$$

Démonstration : Soit $j : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. C'est une immersion fermée donc un morphisme affine et les hypothèses sur $\mathcal{F}$ font que :

$$j_* j^* \mathcal{F} = \mathcal{F} \ .$$

Dès lors, grâce à une suite spectrale de Leray qui dégénère (*cf.* [G62, V.3.2] [Ke78, lemme p. 377]) :

$$\begin{aligned} \forall\, q \geq 0,\ H^q_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) &= H^q_{Z_1/Z_2}(j_* j^* \mathcal{F}) \\ &= H^q_{j^{-1}(Z_1)/j^{-1}(Z_2)}(j^* \mathcal{F}) \\ &= H^q_{Z_1 \cap Y/Z_2 \cap Y}(\mathcal{F}|_Y) \ . \end{aligned}$$

Q.e.d.

I.2 Faisceaux de cohomologie à support (d'après [Ke78], [G67])

I.2.1 Définition

Étant donnés deux fermés $Z_2 \subseteq Z_1$ de X, on définit $\mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ comme le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \mapsto H^i_{Z_1 \cap U/Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_U) \ .$$

† par exemple $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$.

C'est aussi le $i-$ème faisceau dérivé (en $\mathcal{F}$) du foncteur

$$\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\ \ )$$

qui appliqué à un faisceau abélien $\mathcal{G}$ sur X est le faisceau $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{G})$ associé au préfaisceau

$$U \mapsto \Gamma_{Z_1 \cap U / Z_2 \cap U}(\mathcal{G}|_U)\ .$$

Si Z est un sous-espace localement fermé de X, on définit aussi

$$\mathscr{H}^i_Z(\mathcal{F}) :\ = \mathscr{H}^i_{\overline{Z}/\overline{Z}-Z}(\mathcal{F})\ .$$

Remarque : Il existe aussi une version locale du lemme I.1.3 : si $Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$ sont trois fermés de X, alors on a une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{H}^0_{Z_2/Z_3}(\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^0_{Z_1/Z_3}(\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^0_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$$

$$\to \mathscr{H}^1_{Z_2/Z_3}(\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^1_{Z_1/Z_3}(\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^1_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \to \ldots$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur une variété algébrique X alors le faisceau $\mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ est aussi quasi-cohérents sur X, pour tout $i \geq 0$ (*cf.* [Ke78, théorème 9.6 a)]).

I.2.2 Passage du local au global

Dans le cas où X est une variété algébrique contenant deux fermés $Z_2 \subseteq Z_1$ et où $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur X, il y a une suite spectrale convergente qui «relie» les cohomologies locales et globales :

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{H}^q_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})\ .$$

Si de plus, $Z_1 - Z_2$ est une sous-variété affine alors :

Lemme I.2.1 ([Ke78, théorème 9.5 d)])

$$\Gamma(X, \mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})) = H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$$

pour tout $i \geq 0$.

(On rappelle la démonstration en annexes (*cf.* A.1).)

I.3 Complexe de Grothendieck-Cousin

Voici le théorème principal de cette partie sur les groupes de cohomologie à support :

Théorème I.3.1 ([MuR],[Boz],[Ke78],[Ha66]) *Soit* $X \supseteq Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq Z_{n+1} = \emptyset$ *une filtration de* X *par des sous-espaces fermés.*

Pour chaque triplet† $Z_{p+2} \subseteq Z_{p+1} \subseteq Z_p$, *les* $p+q-$*ièmes différentielles de la suite exacte longue du lemme I.1.3 définissent des morphismes*

$$d_1^{p,q} : H^{p+q}_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{F}) \to H^{p+q+1}_{Z_{p+1}/Z_{p+2}}(\mathcal{F})$$

† Par convention, $Z_k = \emptyset$ si $k > n$.

pour tout $p \geq 0$ et tout $q \in \mathbb{Z}$. Ces morphismes font partie d'une suite spectrale convergente :

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{Z_0}(\mathcal{F}) \ .$$

En particulier, pour $q = 0$, la suite

$$E_1^{*,0} \ : \ 0 \to H^0_{Z_0/Z_1}(\mathcal{F}) \overset{d_1^{0,0}}{\to} H^1_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \overset{d_1^{1,0}}{\to} \ldots \overset{d_1^{n-1,0}}{\to} H^n_{Z_n}(\mathcal{F}) \overset{d_1^{n,0}}{\to} 0$$

*est un complexe : c'est le « **COMPLEXE DE GROTHENDIECK-COUSIN** ».*

Si pour tout $q \neq 0$ le q-ième complexe $E_1^{*,q}$ est nul, c-à-d si :

$$\forall\, p,\, \forall\, q \neq 0,\ H^{p+q}_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{F}) = (0) \ \ (\ast) \ \ ,$$

alors pour tout $i \geq 0$, $H^i_{Z_0}(X, \mathcal{F})$ est le i-ème groupe d'homologie de :

$$E_1^{*,0} \ : \ 0 \to H^0_{Z_0/Z_1}(\mathcal{F}) \overset{d^0}{\to} H^1_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \overset{d^1}{\to} \ldots \overset{d^{n-1}}{\to} H^n_{Z_n}(\mathcal{F}) \overset{d^n}{\to} 0 \ .$$

(On peut aussi voir A.2 pour la démonstration.)

Remarques.— 1) On appelle le complexe $E^{*,q}$ le *$q-$ième complexe de Grothendieck-Cousin* associé à $\mathcal{F}$ et à la filtration $X \supseteq \ldots \supseteq Z_p \supseteq \ldots$.

2) On verra dans la section suivante (*cf.* le théorème I.4.1) que la condition $(\ast)$ est vérifiée si :

- X est une variété lisse irréductible,
- $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X-$modules et
- pour tout $0 \leq p \leq n$, $Z_p - Z_{p+1}$ est vide ou est une sous-variété localement fermée de X affine, lisse et de codimension pure p (*c-à-d* dont toutes les composantes irréductibles sont de codimension p).

3) Lorsque $Z_0 = X$ et lorsque $\mathcal{F}$ est localement libre, d'après [Ke78, théorèmes 9.5 d) et 10.5], il suffit que X soit de Cohen-Macaulay et que chaque $Z_p - Z_{p+1}$ soit affine de codimension $\geq i$ pour que $(\ast)$ soit vérifiée.

Exemples :

1) (*cf.* [Ke78, introduction p. 311]) Soient 0 et ∞ les points $[0:1]$ et $[1:0]$ de la droite projective $\mathbb{P}^1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\mathcal{L}_n$ le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n.\{\infty\})$ des fractions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$ qui ont un pôle d'ordre $\geq n$ en ∞ (on décrit ainsi tous les faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}^1$, à isomorphisme près).

On a une filtration : $\mathbb{P}^1 \supseteq \{\infty\} \supseteq \emptyset$ qui vérifie (avec les faisceaux $\mathcal{L}_n$) la condition $(\ast)$, d'après la remarque 2.

Le complexe de Grothendieck-Cousin correspondant est :

$$0 \to \Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{L}_n) \overset{d^0}{\to} H^1_{\{\infty\}}(\mathcal{L}_n) \to 0$$

(où $\mathbb{A}^1$ est la droite affine $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \{[x:1] \ : \ x \in \mathbb{K}\}$).

Or :

$$\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{L}_n) = \mathbb{K}[x] \ ,\ H^1_{\{\infty\}}(\mathcal{L}_n) = H^1_{\{\infty\}}(\mathcal{L}_n|_{\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}}) = \bigoplus_{j>n} \mathbb{K}.x^j$$

et d^0 est le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x] & \to & \bigoplus_{j>n} \mathbb{K}.x^j \\ x^r & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} x^r \text{ si } r > n \\ 0 \text{ sinon } . \end{array} \right. \end{array}$$

On retrouve donc les résultats suivants :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{L}_n) = \bigoplus_{0 \le j \le n} \mathbb{K}.x^j \text{ et } H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{L}_n) = \bigoplus_{n<j<0} \mathbb{K}.x^j$$

(en particulier, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{L}_n) = (0) \Leftrightarrow n \ge -1$).

2) L'espace projectif associé à l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 :

$$\mathcal{M}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ :\ a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

est :

$$\mathbb{P}^3 \ :\ = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ :\ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \ \setminus\ \{0\} \right\} \quad ,$$

où l'on note entre crochets la classe d'une matrice modulo les homothéties. On a une filtration par les fermés suivants :

$Z_0 \ :\ = \mathbb{P}^3$;

$Z_1 \ :\ = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3 \right\}$;

$Z_2 \ :\ = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3 \right\}$;

$Z_3 \ :\ = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3 \right\}$;

$Z_4 = \emptyset$.

Pour tout $0 \le i \le 3$, $Z_i \setminus Z_{i+1}$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{3-i}$. Suivant la remarque 2) ci-dessus, il en résulte que pour chaque faisceau $\mathscr{L}$, cohérent et localement libre sur $\mathbb{P}^3$, le groupe de cohomologie $H^i(\mathbb{P}^3, \mathscr{L})$ est le $i-$ème groupe d'homologie du complexe de Grothendieck-Cousin :

$$0 \to H^0_{\mathbb{A}^3}(\mathscr{L}) \to H^1_{\mathbb{A}^2}(\mathscr{L}) \to H^2_{\mathbb{A}^1}(\mathscr{L}) \to H^3_{\mathbb{A}^0}(\mathscr{L}) \to 0 \ .$$

Cet exemple sera continué plus loin (*cf.* la page 29).

* * *

Lorsque, par exemple, X est une variété algébrique où agit un groupe (algébrique) connexe B dont le nombre d'orbites est fini, il y a une façon particulière de construire une filtration de X par des fermés :

On pose pour tout $i \ge 0$, Z_i la réunion des $B-$orbites de codimension $\ge i$.

On a : $X = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \ldots \supseteq Z_{\dim X} \supseteq \emptyset$.

Il s'agit de fermés car chaque adhérence de $B-$orbite Ω est l'union de Ω et d'orbites de codimension $>$ codim(Ω, X).

De plus chaque orbite étant lisse, la variété $Z_i \setminus Z_{i+1} = \bigsqcup_{\Omega \text{ de codimension } i} \Omega$ est lisse et de codimension pure i (si elle n'est pas vide). Elle est affine si chaque orbite est affine ; c'est le cas quand B est affine et résoluble (par exemple si B est un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif). Dans ce cas, la filtration ci-dessus et n'importe quel faisceau $\mathscr{L}$, cohérent et localement libre sur X vérifient la condition ($\ast$) ; et en conséquence, pour tout $i \geq 0$, le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathscr{L})$ est le $i-$ème groupe d'homologie du complexe de Grothendieck-Cousin :

$$0 \to \ldots \to \bigoplus_{\Omega \,:\, \mathrm{codim}(\Omega, X) = i} H^i_\Omega(\mathscr{L}) \stackrel{d^i}{\to} \bigoplus_{\Omega \,:\, \mathrm{codim}(\Omega, X) = i+1} H^{i+1}_\Omega(\mathscr{L}) \to \ldots \to 0 \ .$$

I.4 Annulation de groupes de cohomologie à support

On suppose dans ce paragraphe que X est une variété algébrique.

Le théorème qui suit, démontré dans [Ke78, théorèmes 9.5 & 9.6], est un résultat d'annulation des groupes de cohomologie à support. Il justifie la remarque n° 2 du paragraphe précédent.

Théorème I.4.1 *Soient $\mathscr{L}$ un faisceau localement libre sur X, que l'on suppose irréductible et lisse, et $C \subseteq X$ une sous-variété localement fermée.*

- *Si C est fermée, alors :*
$$\mathscr{H}^p_C(\mathscr{L}) = (0) \text{ si } p < \mathrm{codim}(C, X) \ .$$
- *Si C est localement fermée et affine, alors :*
$$H^p_C(\mathscr{L}) = (0) \text{ si } p < \mathrm{codim}(C, X) \ .$$
- *Si C est fermée et si son idéal de définition $\mathscr{I}_C$ est localement engendré par $\mathrm{codim}(C, X)$ éléments*†*, alors*
$$\mathscr{H}^p_C(\mathcal{F}) = (0) \text{ si } p > \mathrm{codim}(C, X)$$
pour tout faisceau quasicohérent $\mathcal{F}$ sur X.
- *Si C est localement fermée, affine, si $\mathscr{I}_C$ son idéal de définition dans l'ouvert $X - \partial C$, est localement engendré par $\mathrm{codim}(C, X)$ éléments, alors :*
$$H^p_C(\mathcal{F}) = 0 \text{ si } p > \mathrm{codim}(C, X)$$
pour tout faisceau quasicohérent $\mathcal{F}$ sur X.

En particulier, si C est une sous-variété localement fermée, affine, lisse et de codimension pure (toutes ses composantes irréductibles ont la même codimension), alors :
$$H^p_C(\mathscr{L}) = 0 \text{ si } p \neq \mathrm{codim}(C, X) \ .$$

† *c-à-d* : $\forall\, x \in C$, le localisé $(\mathscr{I}_C)_x$ peut être engendré comme idéal par $\mathrm{codim}(C, X)$ éléments de $\mathscr{O}_{X,x}$.

Remarque : Le dernier point du théorème est faux si C n'est pas affine (même si C, X sont irréductibles et lisses). Par exemple si on considère la droite projective $\mathbb{P}^1$ comme un fermé de $\mathbb{P}^2$ via :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^2 \\ [x:y] & \mapsto & [0:x:y] \end{array}$$

alors (suivant les notations de [Ha97, §II.5.11]), on a :

$$H^2_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) \simeq \mathbb{K} \neq (0) \ .$$

En effet, d'après la remarque qui suit le lemme I.1.3, en posant $\mathscr{L} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$, on a une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1, \mathscr{L}) \to H^2_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{L}) \to H^2(\mathbb{P}^2, \mathscr{L}) \to H^2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1, \mathscr{L}) \to \ldots$$

Or $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^2$ donc :

$$H^1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1, \mathscr{L}) = H^2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1, \mathscr{L}) = (0)$$

et :

$$H^2_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{L}) \simeq H^2(\mathbb{P}^2, \mathscr{L}) \simeq \mathbb{K}$$

(*cf.* [Ha97, théorème II.5.1]).

Démonstration :

1. Si p $< \mathrm{codim}(C, X)$

La $\overline{C}$−profondeur de $\mathscr{L}$ est $\mathrm{prof}_{\overline{C}}(\mathscr{L}) := \inf_{x \in \overline{C}} \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{L}_x)$. C'est aussi $\inf_{x \in \overline{C}} \mathrm{prof}(\mathscr{O}_{X,x})$ puisque $\mathscr{L}$ est localement libre. C'est encore $\inf_{x \in \overline{C}} \dim(\mathscr{O}_{X,x})$ comme X est de Cohen-Macaulay.

Donc, d'après [Ha97, II, ex. 3.20], on a :

$$\mathrm{prof}_{\overline{C}}(\mathscr{L}) = \mathrm{codim}(\overline{C}, X) = \mathrm{codim}(C, X)$$

de même, on a :

$$\mathrm{prof}_{\partial C}(\mathscr{L}) = \mathrm{codim}(\partial C, X) \geq \mathrm{codim}(C, X) + 1 \ .$$

Grâce au théorème 3.8 p. 44 de [G67], on en déduit que :

$$\begin{array}{c} \mathscr{H}^p_{\overline{C}}(\mathscr{L}) = 0 \\ \mathscr{H}^{p+1}_{\partial C}(\mathscr{L}) = 0 \end{array}$$

Or, on a une suite exacte :

$$\mathscr{H}^p_{\overline{C}}(\mathscr{L}) \to \mathscr{H}^p_C(\mathscr{L}) \to \mathscr{H}^{p+1}_{\partial C}(\mathscr{L})$$

d'après la proposition 1.9 p. 9 de [G67]. Ainsi : $\mathscr{H}^p_C(\mathscr{L}) = 0$.

2. Si p $> \mathrm{codim}(C, X)$

Selon [G62, Exposé III, lemme III.2], on a :

$$\mathscr{H}^p_C(\mathcal{F}_{|X-\partial C}) = 0$$

si $\mathscr{I}_C$ est localement engendré par $\mathrm{codim}(C, X)$ éléments.

3. Si C est affine

Ici, on suppose seulement que C est affine.

D'après le lemme d'excision I.1.2 et le lemme I.2.1, les groupes de cohomologie globale vérifient :

$$H^p_C(\mathcal{F}) = H^p(\mathcal{F}|_{X \setminus \partial C}) = \Gamma(X \ \setminus \ \partial C, \mathscr{H}^p_C(\mathcal{F}|_{X \setminus \partial C}))$$

pour tout $p \geq 0$.

4. Cas général

Si X' est une variété algébrique irréductible, lisse, et si C est une sous-variété de X', fermée et lisse, alors les localisés de l'idéal de définition de C dans X', $\mathcal{I}_{C,x}$ peuvent être engendrés par $\dim \mathscr{O}_{X',x} - \dim \mathscr{O}_{C,x}$ éléments d'après [Se75, corollaire du §IV.D.2] ou [Ha97, Chap. II, théorème 8.17]. De plus, si C est de codimension pure c alors $\dim \mathscr{O}_{X',x} - \dim \mathscr{O}_{C,x} = c$ pour tout $x \in C$. **Q.e.d.**

Les paragraphes 3 et 4 ci-dessus permettent de déduire les assertions globales du théorème à partir des locales.

I.5 Points associés

On suppose encore que X est une variété algébrique irréductible.

Dans la suite on rencontrera des morphismes :

$$H^i_C(\mathscr{L}) \to H^{i+1}_{C'}(\mathscr{L})$$

où $\mathscr{L}$ est un faisceau localement libre sur X et C, C' sont des sous-variétés de X de codimensions respectives i et $i+1$. Voici un lemme qui donne une condition nécessaire pour que de telles applications ne soient pas nulles :

Lemme I.5.1 *Soient $\mathscr{L}$ un faisceau localement libre et de rang fini sur X, C, C' des sous-variétés affines, lisses , irréductibles et de codimensions respectives i et $i+1$ dans X.*

Étant donné un morphisme de $\mathscr{O}_X$−modules

$$d : \mathscr{H}^i_C(\mathscr{L}) \to \mathscr{H}^{i+1}_{C'}(\mathscr{L}) \ ,$$

si C' n'est pas inclus dans $\overline{C}$, alors l'application induite sur les sections globales :

$$d(X) : H^i_C(\mathscr{L}) \to H^{i+1}_{C'}(\mathscr{L})$$

est nulle.

Pour démontrer ce lemme, on va se servir de la structure de schéma de X : on va considérer des points de X, vue comme schéma, qui ne sont pas forcément des points de la variété (ce sont plutôt des fermés irréductibles de X). On rappelle :

I.5.1 Définition et propriétés remarquables

Définition 1 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules sur un schéma X. Pour chaque $x \in X$, on désigne par $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. Les* **POINTS ASSOCIÉS** *de $\mathcal{F}$ sont les points de l'ensemble*

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \{x \in X \ : \ \exists\, \sigma \in \mathcal{F}_x, \ \mathrm{Ann}(\sigma) = \mathfrak{m}_{X,x}\}.$$

Si par exemple X est un schéma affine, Spec$A$, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ($\mathfrak{p} \in X$), alors $\mathfrak{p}$ définit un sous-schéma fermé Y de X dont le faisceau d'idéaux est : $\mathcal{I}_Y = \mathfrak{p}\mathscr{O}_X$. Dans ce cas, $\mathrm{Ass}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}_Y) = \{\mathfrak{p}\}$.

Proposition I.5.2 ([G67, Lemme 5.3]) *Soient X un schéma localement nœthérien et Y un fermé de X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X tel que*

$$\forall\, y \in Y, \ \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,y}} \mathcal{F}_y \geq i,$$

alors :

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{H}^i_Y(\mathcal{F})) \subseteq \{y \in Y \mid \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,y}}(\mathcal{F}_y) = i\}.$$

Corollaire I.5.2.1 *Si C est une sous-variété affine, lisse, irréductible et de codimension c dans une variété algébrique, irréductible et lisse, X, et si $\mathscr{L}$ est un faisceau localement libre de rang fini sur X, alors :*

$$\mathrm{Ass}(\mathscr{H}^c_C(\mathscr{L})) \subseteq \{g\}$$

où g est le point générique de $\overline{C}$ dans X.

Démonstration :

Si C est fermé

alors pour tout $y \in C$,

$$\begin{aligned} \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,y}}(\mathscr{L}_y) &= \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,y}}(\mathscr{O}_{X,y}) \text{ car } \mathscr{L} \text{ est localement libre} \\ &= \dim \mathscr{O}_{X,y} \text{ car } X \text{ est lisse} \\ &\geq \dim X - \dim \overline{y} \text{ d'après [Ha97, ex. II.3.20]} \\ &\geq \dim X - \dim C = c \end{aligned}$$

avec égalité seulement si $\overline{y} = \overline{C}$, *c-à-d* seulement si $y = g$.

En particulier,

$$\left\{y \in C \ : \ \mathrm{prof}_{\mathscr{O}_{X,y}} = c\right\} \subseteq \{g\}$$

et il suffit d'appliquer la proposition ci-dessus (I.5.2).

Avant d'achever la démonstration de ce corollaire, dans le cas où C est seulement localement fermée, remarquons que la propriété de posséder au plus un point associé a des conséquences très fortes :

Proposition I.5.3 *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-modules sur un schéma localement nœthérien, X, et s'il existe un point $g \in X$ tel que*

$$Ass(\mathcal{F}) \subseteq \{g\}$$

alors pour chaque $y \in \overline{\{g\}}$, l'application :

$$r_y : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}_y \\ \sigma & \longmapsto & \sigma_y \end{array} \right.$$

est injective.

Démonstration : Si $y \in \overline{\{g\}}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[dr, "r_g"'] & \mathcal{F}_y \\ & \mathcal{F}_g \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que r_g est injective. Soit $s \in \ker(r_g)$.

1^er^ cas : si X est affine et si l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est nœthérien ; on pose $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ et $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. On a :

$$\exists\, a \in A - g,\ a.s = 0. \tag{I.1}$$

Si $s \neq 0$ l'idéal $\mathrm{Ann}(s)$ est propre. Comme A est nœthérien, la famille

$$\{\mathrm{Ann}(\tau) | \tau \in M, \mathrm{Ann}(s) \subseteq \mathrm{Ann}(\tau) \subset A\}$$

admet un élément maximal $\mathrm{Ann}(t)$. L'idéal $p = \mathrm{Ann}(t)$ est alors premier. De plus, l'image $\frac{t}{1}$ de t dans $\mathcal{F}_p = M_p$ vérifie :

$$pA_p = \mathrm{Ann}(\frac{t}{1}).$$

Par conséquent, $p \in \mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ et $p = g$.

Or, d'après (I.1),

$$a \in \mathrm{Ann}(s) \subseteq \mathrm{Ann}(t) = g$$

ce qui est absurde.

Cas général : On peut recouvrir X par des ouverts affines U_i isomorphes à des spectres d'anneaux nœthériens. Puisque

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{F}|_{U_i}) = \mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \bigcap U_i,$$

si $g \in U_i$, le premier cas montre que $s|_{U_i} = 0$; sinon $g \notin U_i$ et on a :

$$\emptyset = \mathrm{Ass}(\mathcal{F}|U_i) \subseteq \{z\}\ (\forall z \in U_i)\ ;$$

on en déduit encore grâce au premier cas que $s|_{U_i} = 0$.

Par conséquent, $s = 0$. **Q.e.d.**

I.5.2 Fins des démonstrations du corollaire I.5.2.1 et du lemme I.5.1

Soit $\mathcal{F} := \mathscr{H}^c_C(\mathscr{L})$.

Si $x \in \overline{C}$, alors tout ouvert contenant x est aussi un voisinage de g (le point générique de $\overline{C}$). D'où une application :

$$\phi : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_g \ .$$

ϕ est injective : en effet, soient W un ouvert de X qui contient C comme fermé et U un voisinage ouvert, affine, quelconque de x. Si $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ et si

$\phi(\sigma_x) = \sigma_g = 0$, alors il existe un ouvert affine V contenant g inclus dans $U \cap W$ tel que :

$$\sigma|_V = 0 \ .$$

Or,

$$\mathcal{F}(U) = H^c_{C\cap U}(\mathscr{L}|_U),\ \mathcal{F}(V) = H^c_{C\cap V}(\mathscr{L}|_V) \text{ et } \mathcal{F}(U\cap W) = H^c_{C\cap U}(\mathscr{L}|_{U\cap W})$$

car $C \cap U$ est affine (*cf.* le lemme I.2.1). Donc, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} H^c_{C\cap U}(\mathscr{L}|_U) \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "r"', "\simeq"] & H^c_{C\cap V}(\mathscr{L}|_V) \\ H^c_{C\cap U}(\mathscr{L}|_{U\cap W}) \arrow[ur, "s"] & \end{tikzcd}$$

($\widetilde{\phi}, r, s$ sont les restrictions *ad hoc*).

En conséquence, $\sigma|_V = \widetilde{\phi}(\sigma) = s(r(\sigma)) = 0 \Rightarrow r(\sigma)_g = 0$.

Mais r est une bijection en raison du lemme d'excision (I.1.2). De plus, comme $C \cap U$ est fermé dans $U \cap W$,

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{F}|_{U\cap V}) \subseteq \{g\}$$

d'après la première partie de cette démonstration.

La proposition I.5.3 permet de conclure sur l'injectivité de ϕ car :

$$r(\sigma)_g = 0 \Rightarrow r(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \ .$$

Finissons de montrer que $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subseteq \{g\}$.

Notons, pour tout $y \in X$, $m_{X,y}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,y}$.

Soit $x \in \mathrm{Ass}(\mathcal{F})$. On a $x \in \mathrm{supp}(\mathcal{F})$; donc $x \in \overline{C}$. Soit $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$ tel que :

$$\mathrm{Ann}(\sigma_x) = m_{X,x} \ .$$

Comme $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_g \neq 0$ car ϕ est injective. D'où :

$$\mathrm{Ann}(\sigma_g) \subseteq m_{X,g}$$

et en particulier :

$$\forall\, a_x \in m_{X,x},\ a_g \in m_{X,g} \ .$$

Soit $U = \mathrm{Spec} A$ un voisinage ouvert, affine de x.

$$x \in \overline{C} = \overline{\{g\}} \Rightarrow g \in U$$

x et g sont des idéaux premiers de A vérifiant :

$$x \supseteq g$$

(car $x \in \overline{\{g\}}$) et :

$$\forall\, \frac{a}{1} \in xA_x,\ \frac{a}{1} \in gA_g \ .$$

On en déduit que pour tout $a \in x,\ a \in g$ et donc que $x \subseteq g$.

En conclusion, $x = g$. **Q.e.d.**

On démontre maintenant le lemme I.5.1 :
si C' n'est pas inclus dans $\overline{C}$ et si $\sigma \in H^c_C(\mathscr{L}) = \Gamma(X, \mathscr{H}^c_C(\mathscr{L}))$ (*cf.* le lemme I.2.1), on va montrer que $d(X)(\sigma) = 0$.
On choisit $x \in C' \setminus \overline{C}$, on a :

$$(\mathscr{H}^c_C(\mathscr{L}))_x = (0) \text{ (car } x \notin \overline{C})$$

$$\Rightarrow (d(X)(\sigma))_x = d_x(\sigma_x) = 0 \ .$$

Or $x \in C' \subseteq \overline{\{g\}}$, où g est le point générique de C', donc d'après la proposition I.5.3 :

$$(d(X)(\sigma))_x = 0 \Rightarrow d(X)(\sigma) = 0$$

Q.e.d.

I.6 Cohomologie à support et « Ext »

Le théorème suivant, dû à Grothendieck, peut être vu comme une définition équivalente des groupes de cohomologie à support :

Théorème I.6.1 ([G67, théorème 2.8]) *Si X est une variété algébrique et Y une sous-variété fermée (de X), d'idéal de définition $\mathcal{I}_Y$, alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$, quasi cohérent sur X, on a des isomorphismes :*

$$\forall\, i \geq 0,\ \varinjlim_{n \geq 0} \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n_Y, \mathcal{F}) \simeq H^i_Y(\mathcal{F})$$

$$\forall\, i \geq 0,\ \varinjlim_{n \geq 0} \underline{\operatorname{Ext}}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n_Y, \mathcal{F}) \simeq \mathscr{H}^i_Y(\mathcal{F}) \ .$$

Sous les hypothèses du théorème, définissons enfin le **FAISCEAU CANONIQUE** de Y dans X :

$$\omega_{Y/X}$$

dont on aura besoin à plusieurs reprises dans la suite.

Définition 2 ([Ha66, §III.1, définition p. 140]) *Si n est la codimension de Y dans X et $\mathcal{N}_{Y/X} := (\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}^2_Y)^\vee$ le faisceau normal de Y sur X, alors on pose $\omega_{Y/X} := \bigwedge^n \mathcal{N}_{Y/X}$ ($^\vee$ désigne le dual des faisceaux de $\mathscr{O}_Y$−modules). C'est un faisceau cohérent sur Y.*

Remarque : Pour toute variété lisse irréductible, X, on note $\Omega_{X/\mathbb{K}}$ son faisceau des différentielles (*cf.* [Ha97, définition §II.8.9]) et $\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega_{X/\mathbb{K}}$ son *faisceau canonique* (ou *faisceau dualisant*).
Si Y et X sont lisses et irréductibles, alors $\omega_{Y/X}$ est un faisceau inversible sur Y et :

$$\omega_{Y/X} = \underline{\operatorname{Ext}}^n_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) = \omega_Y \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \omega^\vee_X$$

(*cf.* [Ha66, remarque 1 du §II.1, p.141, proposition III.7.2 et théorème III.7.11]).

* * *

Terminons le chapitre avec la proposition suivante :

Proposition I.6.2 *Soit X une variété lisse irréductible.*

Si Y est une sous-variété de X, lisse, fermée et irréductible, de codimension c et d'idéal de définition $\mathcal{I}$, alors pour tout faisceau quasi cohérent $\mathcal{F}$:

$$\forall\, n \geq 0,\ \forall\, i > c,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) = (0)\ .$$

Si, de plus, X est affine, alors on a aussi :

$$\forall\, n \geq 0,\ \forall\, i > c,\ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) = (0)$$

(pour tout faisceau quasi cohérent $\mathcal{F}$).

Démonstration : De la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n \to 0$$

provient une suite exacte longue :

$$(\diamond\diamond\diamond)\quad \ldots \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F})$$
$$\to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \to \ldots$$

Or, comme Y est lisse, pour tout $x \in X$, l'idéal $\mathcal{I}_x$ peut être engendré par c éléments et le localisé $\mathcal{I}_x^n/\mathcal{I}_x^{n+1}$ est un $\mathcal{O}_{Y,x}-$module libre de rang fini (*cf.* [Ha97, théorème 8.17 et 8.21A(e)] et [Ma70, p. 110]).

Le complexe de Koszul donne alors une résolution, de longueur c, de $\mathcal{I}_x^n/\mathcal{I}_x^{n+1}$:

$$0 \to L_c \to \ldots \to L_0 \to \mathcal{I}_x^n/\mathcal{I}_x^{n+1} \to 0$$

par des $\mathcal{O}_{X,x}-$modules libres (*cf.* [Ma70, théorème 43 p. 135 et corollaire]).

On en déduit, gâce à [Ha97, prop. III.6.5], que pour tout $i > c$:

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{I}_x^n/\mathcal{I}_x^{n+1}, \mathcal{F}_x) = h^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(L_*, \mathcal{F}_x)) = (0)\ .$$

Mais alors, pour tout $x \in X$ et tout $i > c$, les localisés :

$$\left(\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F})\right)_x$$

sont nuls (*cf.* [Ha97, prop. III.6.8]).

Ainsi :

$$\forall\, n \geq 0, \forall\, i > c,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) = (0)\ .$$

En reportant cela dans la suite exacte $(\diamond\diamond\diamond)$, on trouve des morphismes surjectifs :

$$\forall\, i > c, \forall\, n \geq 0,\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F})\ .$$

Après une récurrence sur n, on en déduit que pour tous $i > c$ et $n \geq 0$:

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) = (0)\ .$$

* * *

Dans le cas où X est affine, on utilise que :

$$\forall\, n, \forall\, i,\ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n))$$

(*cf.* [Ha97, ex. III.6.7]). **Q.e.d.**

Chapitre II

Actions de tores

Pour une variété algébrique sur laquelle agit un tore T, les groupes de cohomologie à support $T-$invariant des $T-$faisceaux sont des $T-$modules. Leur structure est connue si on sait calculer leur caractère. On étudiera ces derniers dans le cas où le support est une *cellule de Bialynicki-Birula* (*cf.* la section II.3) et dans le cas des faisceaux inversibles sur les variétés toriques.

II.1 Tores

Un **TORE** est un groupe algébrique isomorphe à $(\mathbb{K}^*)^m$ pour un $m \geq 0$.

Pour un tore T, l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $\chi : T \to \mathbb{K}^*$ forme un groupe pour la multiplication point par point : c'est le réseau $X^*(T)$ des **CARACTÈRES** de T. On définit de même $X_*(T)$ le réseau des **SOUS GROUPES À UN PARAMÈTRE** de T formé des morphismes de groupes algébriques $\lambda : \mathbb{K}^* \to T$.

On note additivement les multiplications dans $X^*(T)$ et $X_*(T)$:

$$\forall\, \chi, \chi' \in X^*(T),\ \forall\, \lambda, \lambda' \in X_*(T),\ \forall\, t \in T,\ \forall\, z \in \mathbb{K}^*,$$

$$(\chi + \chi')(t) = \chi(t)\chi(t') \text{ et } (\lambda + \lambda')(z) = \lambda(z)\lambda'(z)\ .$$

$X^*(T)$ et $X_*(T)$ sont en dualité via le crochet :

$$\langle\ ,\ \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} X^*(T) \times X_*(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \chi\ ,\ \lambda & \longmapsto & \langle \chi, \lambda \rangle \end{array} \right.$$

défini par : $\forall\, z \in \mathbb{K}^*, \chi(\lambda(z)) = z^{\langle \chi, \lambda \rangle}$.

JUSQUÀ LA FIN DU CHAPITRE T DÉSIGNERA UN TORE.

II.2 Caractères des T−modules

II.2.1 Caractères

Si M est un $T-$module rationnel, M se décompose en une somme directe d'espaces popres

$$M = \oplus_{\chi \in X^*(T)} M_\chi$$

où $M_\chi := \{m \in M \ : \forall\, t \in T, t.m = \chi(t)m\}$. On dit que la dimension de l'espace vectoriel M_χ est la *multiplicité* de χ.

Si $M_\chi \neq (0)$, on dit que χ est un **POIDS** de M ; on note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des poids de M comptés avec leur multiplicité.

Lorsque tous les M_χ sont de dimension finie, on dit que M **ADMET UN CARACTÈRE** ou que M est **ADMISSIBLE**. On peut alors définir une application :

$$[M] : \left\{ \begin{array}{ccc} X^*(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \chi & \longmapsto & \dim(M_\chi) \end{array} \right.$$

c'est le **CARACTÈRE** de M. On introduit les applications

$$e^\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} X^*(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \lambda & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } \lambda = \chi \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et on convient d'écrire $[M]$ comme une somme formelle

$$[M] = \sum_{\chi \in X^*(T)} \dim(M_\chi) e^\chi \ .$$

Remarques : Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de T.

– On identifie $X^*(T)$ avec un sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$ via :

$$\begin{array}{ccc} X^*(T) & \longrightarrow & \mathfrak{h}^* \\ \lambda & \longmapsto & d\lambda_{|1} \end{array}$$

et $X_*(T)$ avec un sous-groupe de $\mathfrak{h}$ via :

$$\begin{array}{ccc} X_*(T) & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \nu & \longmapsto & d\nu_{|1}(1) \end{array} \ .$$

– Si M est un $\mathfrak{h}-$module, on notera

$$M_\lambda := \{m \in M \ : \forall\, H \in \mathfrak{h}, H.m = \lambda(H)m\}$$

l'espace propre associé à un $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Contrairement au cas des $T-$modules, M n'est pas forcément égal à $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$. On dira que M est **ADMISSIBLE** si :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$$

et si tous les M_λ sont de dimension finie. Dans ce cas, on notera encore

$$[M] : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$$

le caractère du $\mathfrak{h}-$module admissible M.

Pour un $T-$module M de dimension finie, on notera M^* son **DUAL RESTREINT** : c'est le dual de l'espace vectoriel M où T agit ainsi :

$$\forall\, t \in T,\ \forall\, n \in M^*,\ \forall\, m \in M,\ t.n(m) = n(t^{-1}.m) \ .$$

II.2.2 Produit tensoriel

Étant donnés deux $T-$modules, M et N, qui ont chacun un caractère, le $T-$module $M \otimes N$ n'a un caractère que si pour tout $\xi \in X^*(T)$, l'ensemble

$$\{(\mu, \nu) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(N) \ : \ \lambda + \nu = \xi\}$$

est fini.

On va rappeler une condition suffisante (sur $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{P}(N)$) pour que cette propriété soit vérifiée.

On fixe un sous-groupe à un paramètre ζ et une famille finie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ de caractères tels que :

$$\langle \alpha_i, \zeta \rangle > 0$$

pour tout i. On pose $Q : = \sum_{i=1}^k \mathbb{N}\alpha_i$.

Si $f \in \mathbb{Z}^{X^*(T)}$, on appelle *support* de f l'ensemble

$$\mathrm{supp} f = \{\chi \in X^*(T) \ : \ f(\chi) \neq 0\} \ .$$

Soit $\mathbb{Z}[[X^*(T)]]$ l'ensemble des $f \in \mathbb{Z}^{X^*(T)}$ dont le support est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme

$$\nu - Q \quad (\nu \in X^*(T))$$

(ζ et les α_i sont fixés, seul ν varie).

Si $f, g \in \mathbb{Z}[[X^*(T)]]$, alors le produit

$$f \cdot g : \left\{ \begin{array}{ccc} X^*(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \xi & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\mu+\nu=\xi} f(\mu)g(\nu) \end{array} \right.$$

est bien défini† en raison de la condition sur les supports (*cf.* [Di, §7. 5.1]). En particulier, si $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{P}(N)$ sont inclus dans une réunion finie d'ensembles de la forme $\nu - Q$, $[M \otimes N]$ existe.

Si λ, $\xi \in X^*(T)$ avec $\xi \neq 0$, on pose pour abréger :

$$\frac{e^\lambda}{1 - e^\xi} : = \sum_{k \geq 0} e^{\lambda + k\xi} \ \in \mathbb{Z}^{X^*(T)} \ .$$

On s'aperçoit que $\dfrac{e^\lambda}{1 - e^\xi} \in \mathbb{Z}[[X^*(T)]]$ si $\langle \xi, \zeta \rangle < 0$.

Donc, plus généralement, si M est un $T-$module de dimension finie dont tous les poids α vérifient :

$$\langle \alpha, \zeta \rangle < 0$$

on peut définir :

$$\frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \mathcal{P}(M)} (1 - e^\alpha)} \quad \in \mathbb{Z}[[X^*(T)]] \ .$$

Si $\lambda = 0$, c'est le caractère de *l'algèbre symétrique* de M

$$S(M) : = \bigoplus_{n \geq 0} S^n M$$

† Pour cette multiplication et pour $+$, $\mathbb{Z}[[X^*(T)]]$ est un anneau.

autrement dit :

$$\mathcal{P}(S(M)) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(M)} n_\alpha . \alpha \ : \ \forall\, \alpha,\ n_\alpha \in \mathbb{N} \right\}$$

où la multiplicité d'un poids $\nu \in \mathcal{P}(S(M))$ est le nombre de suites $(n_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{P}(M)}$ telles que $\sum_\alpha n_\alpha \alpha = \nu$.

On notera aussi $\Lambda(M) : = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n M$ *l'algèbre extérieure* de M. C'est un $T-$module dont le caractère est :

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{P}(M)} (1 + e^\alpha) \ .$$

On va exprimer avec ces notations le caractère de certains groupes de cohomologie à support.

On adoptera les mêmes notations ($S(M)$, ΛM, $\frac{e^\lambda}{1-e^\xi}$, $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$, $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]]$, $\mathcal{P}(M)$, le produit, le support) pour les $\mathfrak{h}-$modules admissibles.

II.3 Cellules de Bialynicki-Birula

Soit X une variété algébrique complète, lisse et irréductible. On suppose qu'un tore T agit (algébriquement) sur X et que l'ensemble X^T des points fixes est fini.

On va introduire des sous-variétés de X, ou cellules, isomorphes à des $T-$modules.

Il existe un sous-groupe à un paramètre ζ de T tel que $X^T = X^\zeta$ (l'ensemble des points fixes de ζ) (*cf.* [BB73, lemme 2.3]).

Quand $x \in X^T$, $T_x X$ est un $T-$ module. On définit sa partie positive :

$$T_x X_+ \ : \ = \bigoplus_\lambda (T_x X)_\lambda$$

somme des espaces propres de poids λ tel que $\langle \lambda, \zeta \rangle > 0$ et sa partie négative :

$$T_x X_- \ : \ = \oplus_\lambda (T_x X)_\lambda$$

somme des espaces propres de poids λ tel que $\langle \lambda, \zeta \rangle < 0$.

Comme X^ζ est fini, $T_x X = (T_x X)_+ \oplus (T_x X)_-$ (*cf.* [BB73, théorème 4.1]).

II.3.1 Décomposition cellulaire

A. Bialynicki-Birula a défini dans [BB73] une décomposition de X en union disjointe de sous-variétés localement fermées et $T-$invariantes (*cf.* aussi [Ko]) ; on rappelle ici cette construction.

Comme X est complète, pour chaque $x \in X$, le morphisme

$$\zeta_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & \zeta(a).x \end{array} \right.$$

se prolonge à la droite projective :

$$\widetilde{\zeta_x} : \mathbb{P}^1 \to X$$

de manière unique.

On pose
$$\lim_{a\to 0}\zeta(a).x :=\widetilde{\zeta_x}(0) \text{ et } \lim_{a\to\infty}\zeta(a).x :=\widetilde{\zeta_x}(\infty)$$
avec $0 := [0:1]$ et $\infty := [1:0] \in \mathbb{P}^1$.

On associe à chaque point fixe $x \in X^T$ une **CELLULE DE BIALYNICKI-BIRULA**
$$C(x) := \{y \in X \ : \ \lim_{a\to 0}\zeta(a).y = x\} \ .$$

EXEMPLE : On poursuit l'étude de l'exemple 2) page 16.

Soient $X := \mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C})) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} : (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}\right\}$ et $T := \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} : x \in \mathbb{K}^*\right\}$ un tore maximal de $PGL(2,\mathbb{C})$.

X est une $T\times T-$variété et même une $PGL(2,\mathbb{C})\times PGL(2,\mathbb{C})$ variété pour l'action :
$$\forall\, g_1, g_2 \in PGL(2,\mathbb{C}),\ \forall\, M \in \mathcal{M}(2,\mathbb{C}),\ (g_1,g_2).[M] = [g_1.M.{g_2}^{-1}] \ .$$

Soit le sous-groupe à un paramètre $\zeta : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & T\times T \\ z & \longmapsto & (\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}) \end{cases}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$\begin{aligned}\zeta(z).\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z^3a & zb \\ z^2 & d\end{bmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit :

– $\zeta(z).\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2a & b \\ zc & 0\end{bmatrix}$

– $\zeta(z).\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} za & 0 \\ c & 0\end{bmatrix}$

– $\zeta(z).\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Il en résulte que :
$$\lim_{z\to 0}\zeta(z).\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \begin{cases} x_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} & \text{si } d \neq 0 \\ x_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \text{si } d = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ x_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix} & \text{si } b = d = 0 \text{ et } c \neq 0 \\ x_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \text{si } b = c = d = 0\ . \end{cases}$$

Ces points sont les points fixes de X pour $T\times T$ (et pour ζ) et on a :
$$\forall\, 0 \le i \le 3,\ C(x_i) = Z_i \setminus Z_{i+1} \simeq \mathbb{A}^{3-i}$$

(suivant les notations de l'exemple 2) page 16).

* * *

De retour au cas général, voici les principales propriétés des cellules de Bialynicki-Birula :

Théorème II.3.1 ([BB73, théorèmes 2.1, 2.5, 4.1, 4.3])
1° Pour tout $x \in X^T$, $C(x)$ est une sous-variété localement fermée de X.
2° Pour tout $x \in X^T$, il existe un voisinage ouvert U de x qui est affine, $T-$invariant, et un morphisme $T-$équivariant

$$\phi : U \to T_x X$$

vérifiant :

- $\phi(x) = 0$ *;*
- $\phi^{-1}((T_x X)_+) = C(x)$ *(il en résulte que $C(x)$ est fermé dans U) ;*
- $d\phi|_x = \mathrm{id}|_{T_x X}$ *;*

et induisant un isomorphisme :

$$\phi\big|_{C(x)} : C(x) \stackrel{\simeq}{\to} (T_x X)_+ \ .$$

En particulier, $C(x)$ est isomorphe à un espace affine avec action linéaire de T.
3° On a la décomposition « cellulaire » : $X = \bigsqcup_{x \in X^T} C(x)$.

Pour la démonstration, *cf.* aussi [Ko]

Soient $x \in X^T$ et $\mathcal{I}_{C(x)}/\mathcal{I}^2_{C(x)}$ le *faisceau conormal* de $C(x)$ dans U (*cf.* [Ha97, Déf.II §8.9.1]). C'est un faisceau localement libre sur $C(x)$, les variétés $C(x)$ et X étant lisses (*cf.* [Ha97, II théorème 8.17]).

C'est aussi un faisceau $T-$*linéarisé* sur $C(x)$: rappelons qu'étant donnée une variété algébrique V munie de l'action d'un tore T, on dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$, quasi cohérent sur X, est ***T*−LINÉARISÉ**, si pour tout ouvert U de X, $T-$invariant, le groupe des sections $\mathcal{F}(U)$ est un $T-$module rationnel et si ces structures de $T-$modules rendent les restrictions et les morphismes

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_k \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

$T-$équivariants†. On dit également que $\mathcal{F}$ est un $T-$*faisceau.* Pour un tel faisceau, les fibres $\mathcal{F}|_x$ en les points $x \in X^T$ sont des $T-$modules rationnels.

On note

$$\left(\mathcal{I}_{C(x)}/\mathcal{I}^2_{C(x)}\right)^\vee \ : \ = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{C(x)}}(\mathcal{I}_{C(x)}/\mathcal{I}^2_{C(x)}, \mathcal{O}_{C(x)})$$

le dual du faisceau conormal : c'est le *faisceau normal* de $C(x)$ dans X.

Corollaire II.3.1.1 *On a un isomorphisme de $T-$modules et de $\mathcal{O}(C(x))-$modules :*

$$\Gamma\left(C(x), (\mathcal{I}_{C(x)}/\mathcal{I}^2_{C(x)})^\vee\right) \simeq S((T_x X)^*_+) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} (T_x X)_- \ .$$

† Comme X admet un recouvrement par des ouverts affines $T-$invariants (*cf.* [Su, corollaire 2]) ceci coïncide avec la définition usuelle des faisceaux $T-$linéarisés de [Ke78, §1].

Démonstration : On pose $\mathcal{N} := \left(\mathcal{I}_{C(x)}/\mathcal{I}^2_{C(x)}\right)^{\vee}$. Il suffit de montrer que

$$\mathcal{N}|_x = (T_xX)_- \ .$$

Or, puisque $C(x)$ est un fermé lisse de U, qui est lisse aussi, d'après [Ha97, chapitre II, §8, *Applications*], on a une suite exacte de $\mathcal{O}_{C(x)}$−modules (T−linéarisés) :

$$0 \to \mathcal{T}_{C(x)} \to \mathcal{T}_U \underset{\mathcal{O}_U}{\otimes} \mathcal{O}_{C(x)} \to \mathcal{N} \to 0$$

où $\mathcal{T}_{C(x)}$ et $\mathcal{T}_U$ sont les faisceaux tangents de $C(x)$ et U.

En prenant les fibres en x, on trouve une suite exacte :

$$(*)\ \ \mathcal{T}_{C(x)}|_x \to \mathcal{T}_U|_x \to \mathcal{N}|_x \to 0 \ .$$

Mais, $\mathcal{T}_{C(x)}|_x = T_xC(x)$ et $\mathcal{T}_U|_x = T_xU = T_xX$ sont les espaces tangents de $C(x)$ et X en x (*cf.* [Ke93, lemme 6.3.3]).

Grâce au théorème II.3.1, on sait que l'application :

$$T_xC(x) \to T_xX$$

est l'injection canonique $(T_xX)_+ \to T_xX$. D'où, en raison de $(*)$, un isomorphisme de T−modules :

$$T_xX/(T_xX)_+ \simeq \mathcal{N}|_x \ .$$

Comme $T_xX = (T_xX)_- \oplus (T_xX)_+$, on a $\mathcal{N}|_x \simeq (T_xX)_-$. **Q.e.d.**

On va maintenant estimer le caractère de certains groupes de cohomologie à support dans ces cellules en utilisant notamment le corollaire précédent.

II.3.2 Cohomologie à support dans des cellules de Bialynicki-Birula

Dans la section précédente, on a vu en particulier que les cellules $C(x)$ sont des espaces affines. Donc, étant donné un faisceau $\mathcal{L}$ localement libre et de rang fini sur X, on sait (*cf.* chapitre I, théorème I.4.1) que les groupes $H^i_{C(x)}(\mathcal{L})$ sont nuls si $i \neq \mathrm{codim}(C(x), X)$. On va maintenant s'intéresser au degré $i = \mathrm{codim}(C(x), X)$.

En général, si $\mathcal{F}$ est un faisceau T−linéarisé sur X (*cf.* la section précédente), alors les groupes de cohomologie à support $H^i_{C(x)}(\mathcal{F})$ sont des T−modules rationnels (*cf.* [Ke78]).

Pour le théorème suivant, on introduit une relation d'ordre (partiel) sur les caractères : si $[M]$ et $[M']$ sont des caractères de T−modules, on écrira

$$[M] \leq [M']$$

si pour tout $\lambda \in X^*(T)$, $\dim M_\lambda \leq \dim M'_\lambda$.

Cela étant posé, on a :

Théorème II.3.2 *Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent et T−linéarisé sur X, $x \in X$ un point fixe de T et c la codimension de la cellule $C(x)$ dans X. Le T−module $H^c_{C(x)}(\mathcal{F})$ a un caractère et :*

$$\left[H^c_{C(x)}(\mathcal{F})\right] \leq \frac{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}(\mathcal{F}|_x)} e^{\lambda+\omega}}{\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_+)}(1-e^{-\alpha}).\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_-)}(1-e^{\alpha})}$$

où ω est le poids de $\bigwedge^c(T_xX_-)$ (c'est aussi le poids de $\omega_{C(x)/X}|_x$).

C'est une ÉGALITÉ *quand $\mathcal{F}$ est localement libre.*

Remarque :

$$\frac{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}(\mathcal{F}|_x)} e^{\lambda+\omega}}{\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_+)}(1-e^{-\alpha}).\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_-)}(1-e^{\alpha})}$$

est le caractère de

$$S(T_xX^+)^*\underset{\mathbb{K}}{\otimes}S(T_xX^-)\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\bigwedge^c(T_xX^-)\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathscr{F}|_x \ .$$

Exemple : Soit U un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe réductif connexe G. Soit T un tore maximal de G normalisant U. Notons par $\{\alpha\ :\ \alpha > 0\} = \Phi^+$ l'ensemble des poids de l'algèbre de Lie T_1U de U, pour l'action de T.

Si $w\in W$, le groupe de Weyl de (G,T), si on note $w(U)^+ :\ = wUw^{-1}\cap U$ et $\rho :\ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, on retrouve le caractère suivant :

$$[H^{l(w)}_{w(U)^+}(\mathscr{O}_U)] = \frac{e^{\rho-w(\rho)}}{\prod_{\alpha>0}(1-e^{-w(\alpha)})} \ .$$

En effet, après avoir ordonné Φ^+, on obtient un isomorphisme de $T-$variétés :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha>0} U_\alpha & \simeq & U \\ (u_\alpha)_{\alpha>0} & \mapsto & \prod_{\alpha>0} u_\alpha \end{array}$$

où, d'une part, chaque U_α est un espace affine où T agit via le caractère α et, d'autre part, T opère sur U via :

$$\forall\, t\in T,\ t.u :\ = tut^{-1} \ .$$

Soit γ un sous-groupe à un paramètre de T tel que : $\forall\,\alpha>0,\ \langle\alpha,\gamma\rangle > 0$.

Le seul point fixe de T est 1 et la cellule de Bialynicki-Birula associée à 1 et au sous-groupe à un paramètre $w(\gamma)$ est :

$$C(1) = \{u\in U\ :\ \lim_{a\to 0} w(\gamma)(a).u = 1\} \ .$$

Or :

$$\forall\, a\in\mathbb{K}^*,\ w(\gamma)(a).(u_\alpha)_{\alpha>0} = (a^{\langle\alpha,w(\gamma)\rangle}u_\alpha)_{\alpha>0}$$

et

$$\langle\alpha,w(\gamma)\rangle > 0 \Leftrightarrow \langle w^{-1}(\alpha),\gamma\rangle > 0 \Leftrightarrow w^{-1}(\alpha) > 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} C(1) &= \{(u_\alpha)_{\alpha>0}\ :\ \forall\,\alpha,\ w^{-1}(\alpha)<0,\ u_\alpha = 0\} \\ &= \prod_{\alpha>0\,:\,w^{-1}(\alpha)>0} U_\alpha \times \{0\}^{|\{\alpha>0\,:\,w^{-1}(\alpha)<0\}|} \end{aligned}$$

$$= U \cap wUw^{-1} \cap U = w(U)^+$$

qui est de codimension $l(w)$ dans U.

D'après le théorème :

$$[H^{l(w)}_{w(U)^+}(\mathscr{O}_U)] = \frac{e^\omega}{\prod_{\alpha \in \mathcal{P}((T_1U)_+)}(1-e^{-\alpha}).\prod_{\alpha \in \mathcal{P}(((T_1U)_-)}(1-e^{\alpha})} \ .$$

Mais, $T_1U = \bigoplus_{\alpha>0} \mathbb{K}.du_\alpha$ où chaque du_α est un vecteur propre de T de poids α et:

$$(T_1U)_- = \bigoplus_{\alpha>0\,:\,w^{-1}(\alpha)<0} \mathbb{K}du_\alpha$$

$$(T_1U)_+ = \bigoplus_{\alpha>0\,:\,w^{-1}(\alpha)>0} \mathbb{K}du_\alpha \ .$$

En particulier, ω qui est le poids de $\bigwedge^{l(w)}(T_1U)_-$ est égal à :

$$\sum_{\alpha>0\,:\,w^{-1}(\alpha)<0} \alpha = \rho - w(\rho) \ .$$

Ainsi :

$$[H^{l(w)}_{w(U)^+}(\mathscr{O}_U)] = \frac{e^{\rho-w(\rho)}}{\prod_{\alpha>0}(1-e^{-w(\alpha)})}$$

qui est le caractère d'un *module de Verma* (*cf.* le chapitre III page 53).

* * *

Démonstration du théorème II.3.2 : Quitte à remplacer X par l'ouvert affine et $T-$invariant U du théorème II.3.1 (quitte aussi à abandonner l'hypothèse que X est complète qui n'intervient plus dans cette démonstration une fois que la cellule $C(x)$ est définie), on peut supposer que $C(x)$ est fermée dans X.

Si $\mathcal{I} := \mathcal{I}_{C(x)}$ est l'idéal de définition de $C(x)$, on a :

$$H^c_{C(x)}(\mathcal{F}) = \varinjlim_{n\geq 0} \operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F})$$

et pour tout $n \geq 0$ une suite exacte longue (de $T-$modules) :

$$(**) \ldots \to \operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \to \ldots$$

dérivée de la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \to \mathscr{O}_X/\mathcal{I}^{n+1} \to \mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n \to 0 \ .$$

De cela, on déduit que si M^n est l'image de $\operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F})$ dans $H^c_{C(x)}(\mathcal{F})$ ($\forall\, n \geq 0$), alors :

- d'une part $H^c_{C(x)}(\mathcal{F}) = \bigcup_{n\geq 0} M^n$;
- d'autre part, pour tout $n \geq 0$, $M^n \subseteq M^{n+1}$ avec M^{n+1}/M^n qui est un sous-quotient de $P^n := \operatorname{Ext}^c_{\mathscr{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F})$.

En particulier, pour chaque $\lambda \in X^*(T)$, l'espace propre $(M^{n+1}/M^n)_\lambda$ est de dimension $\leq \dim P^n_\lambda$. En fait, on va montrer que $\bigoplus_{n\geq 0} P^n$ est un $T-$module admissible (ou à caractère) et on conclura que :

$$H^c_{C(x)}(\mathcal{F}) \text{ a un caractère } \leq \sum_{n\geq 0}[P^n] \ .$$

Puisque les variétés $C(x)$ et X sont lisses, le faisceau :

$$(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})^\vee = S^n(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee = S^n\mathcal{N}$$

est localement libre sur X (*cf.* [Ha97, théorème 8.17] et [Ma70, p. 110]). De plus, comme $C(x)$ est isomorphe à un espace affine, on a à l'aide de [Ha66, définition b) du chapitre III, §1 et proposition 7.2, chapitre III] :

$$\begin{aligned} P^n &= \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \\ &= \omega_{C(x)/X}(C(x)) \underset{\mathcal{O}(C(x))}{\otimes} \mathcal{F}\big|_{C(x)}(C(x)) \underset{\mathcal{O}(C(x))}{\otimes} S^n\mathcal{N}(C(x)) \end{aligned}$$

(où $\omega_{C(x)/X} = \bigwedge^c \mathcal{N}$ est le faisceau canonique de $C(x)$ dans X)

$$= \omega|_x \underset{\mathbb{K}}{\otimes} S^n\mathcal{N}|_x \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathcal{F}(C(x))$$

où $\omega|_x = \bigwedge^c \mathcal{N}|_x = \bigwedge^c((T_xX)_-)$ est la fibre en x de $\omega_{C(x)/X}$.

Or, $\mathcal{F}(C(x))$ est l'image de $\mathcal{O}(C(x)) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathcal{F}|_x$ par un morphisme $T-$équivariant ; il suffit en effet, d'après le lemme de Nakayama, de choisir des $T-$vecteurs propres dans $\mathcal{F}(C(x))$ qui relèvent une base de la fibre $\mathcal{F}|_x$. Il s'ensuit que son caractère satisfait à l'inégalité :

$$\begin{aligned} (\diamond\diamond) \quad [\mathcal{F}(C(x))] &\leq [\mathcal{O}(C(x))] \cdot [\mathcal{F}|_x] \\ &\leq [S((T_xX)^*_+)] \cdot [\mathcal{F}|_x] \end{aligned}$$

(le $\cdot$ désigne le produit des caractères défini dans la section II.2.2).

On a ainsi :

$$\forall\, n \geq 0,\ [P^n] \leq e^\omega \cdot [\mathcal{F}|_x] \cdot [S((T_xX)^*_+)] \cdot [S^n\mathcal{N}|_x]$$

et $\bigoplus_{n\geq 0} P^n$ admet un caractère vérifiant :

$$\begin{aligned} [\oplus_{n\geq 0}P^n] = \sum_{n\geq 0}[P^n] &\leq e^\omega \cdot [\mathcal{F}|_x] \cdot [S((T_xX)^*_+)] \cdot \sum_{n\geq 0}[S^n\mathcal{N}|_x] \\ &\leq e^\omega \cdot [\mathcal{F}|_x] \cdot [S((T_xX)^*_+)] \cdot [S(\mathcal{N}|_x)] \\ &\leq e^\omega \cdot [\mathcal{F}|_x] \cdot [S((T_xX)^*_+)] \cdot [S((T_xX)_-)] \\ &\leq e^\omega \cdot \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{F}|_x)} e^\lambda \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_+)}(1-e^{-\alpha})} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha\in\mathcal{P}(T_xX_-)}(1-e^{\alpha})} \quad . \end{aligned}$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est localement libre,

$$\mathrm{Ext}^{c-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) = 0$$

d'après [G67, proposition 3.7] car $\mathrm{prof}_{C(x)}\mathcal{F} = \mathrm{prof}_{C(x)}\mathcal{O}_X = c$ et :

$$\mathrm{Ext}^{c+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) = 0$$

suivant la proposition I.6.2.

Donc, il résulte de la suite $(**)$ une suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F}) \to 0 \ .$$

Par conséquent,

$$H^c_{C(x)}(\mathcal{F}) = \bigcup_{n \geq 0} M^n$$

avec $M^n := \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n, \mathcal{F})$ et $M^{n+1}/M^n = P^n = \mathrm{Ext}^c_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{F})$.

D'où :

$$[H^c_{C(x)}(\mathcal{F})] = \sum_{n \geq 0} [P^n]$$

$$= e^{\omega} \cdot \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{F}|_x)} e^{\lambda} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha \in \mathcal{P}(T_x X_+)}(1 - e^{-\alpha})} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha \in \mathcal{P}(T_x X_-)}(1 - e^{\alpha})}$$

car l'inégalité $(\diamond\diamond)$ est, dans ce cas, une égalité. La raison en est que $C(x)$ étant un espace affine et $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre, $\mathcal{F}(C(x))$ est un $\mathcal{O}(C(x))-$module libre (*cf.* par exemple [Is, appendice, prop. 8]). **Q.e.d.**

Remarque : Ce théorème est démontré aussi dans [Wu]. Pour le cas où X est un $T-$module et $C(x)$ un sous-$T-$module, *cf.* aussi [Ke78, théorème 11.9 e)].

Du théorème II.3.2, on utilisera surtout le cas d'égalité mais aussi l'inégalité par l'intermédiaire du corollaire suivant :

Corollaire II.3.2.1 *Soient C une cellule de Bialynicki-Birula de X de codimension c et F un fermé $T-$stable de X, d'idéal de définition $\mathcal{I}$.*

Si $F \cap C \neq \emptyset$, alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$, cohérent et $T-$linéarisé sur X, on a :

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ n \geq 0}} H^c_C(\mathcal{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{I}^n) = (0) \ .$$

Démonstration : Comme $\lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ n \geq 0}} H^c_C(\mathcal{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{I}^n)$ est un $T-$module, il suffit de montrer que pour tout caractère $\lambda \in X^*(T)$,

$$(\lim_{\substack{\longleftarrow \\ n \geq 0}} H^c_C(\mathcal{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{I}^n))_{\lambda} = (0)$$

c-à-d que pour chaque $\lambda \in X^*(T)$, il existe N_{λ} tel que :

$$\forall\, n \geq N_{\lambda},\ (H^c_C(\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^n))_{\lambda} = (0) \ .$$

On fixe $\lambda \in X^*(T)$ et on suppose que :

$$(\bullet) \quad H^c_C(\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^n)_{\lambda} \neq (0) \ .$$

Soit $x \in X^T$ tel que $C = C(x)$ est la cellule de Bialynicki-Birula associée à x et au sous-groupe à un paramètre ζ (*cf.* le début de la section II.3).

Soit ω comme dans le théorème. D'après ce dernier :

$$[S(T_xX^+)^*].[S(T_xX^-)].[\bigwedge^c(T_xX^-)].[\mathcal{F}|_x](\lambda) > 0 \ .$$

Donc, il existe un poids μ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^n|_x$ vérifiant :

$$(\bullet\bullet) \ \ \mu + \omega + \delta_1 + \delta_2 = \lambda$$

pour certains poids δ_1, δ_2 de, respectivement, $S(T_xX_+)^*$ et $S(T_xX_-)$. Or:

$$\mathcal{P}(S(T_xX_+)^*) + \mathcal{P}(S(T_xX_-)) = \sum_\alpha \mathbb{N}.\alpha$$

où α parcourt l'ensemble de poids $-\mathcal{P}(T_xX_+) \bigcup \mathcal{P}(T_xX_-)$.

En particulier, si l'on note $\delta : = \delta_1 + \delta_2$, alors $\langle \delta, \zeta \rangle \leq 0$ et d'après $(\bullet\bullet)$, on a :

$$\mu = \lambda - \omega - \delta$$

$$\Rightarrow \langle \mu, \zeta \rangle \geq \langle \lambda - \omega, \zeta \rangle \ \ (\bullet\bullet\bullet) \ .$$

Or, $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^n)|_x = \mathcal{F}|_x \underset{\mathcal{O}_X|_x}{\otimes} \mathcal{I}^n|_x$ et $\mathcal{I}^n|_x$ est une image $T-$équivariante de $S^n(\mathcal{I}|_x)$.

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_q$ les poids de $\mathcal{I}|_x$. Comme $F \cap C(x)$ est un fermé non vide et $T-$stable de $C(x)$, $\mathcal{I}\big|_{C(x)}(C(x))$ est un idéal propre et $T-$invariant de $\mathcal{O}(C(x))$ d'où :

$$\mathcal{I}\big|_{C(x)}(C(x)) \subseteq \bigoplus_{k>0} S^k((T_xX)^*_+) \ .$$

Il en résulte que les μ_i sont «strictement négatifs» au sens où $\langle \mu_i, \zeta \rangle < 0$ pour tout i.

Cela étant dit, il existe $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{N}$ et un poids f de $\mathcal{F}|_x$ tels que :

$$a_1 + \ldots + a_q = n \text{ et } \mu = a_1\mu_1 + \ldots + a_q\mu_q + f \ .$$

Par conséquent :

$$(\bullet\bullet\bullet) \Rightarrow a_1\langle \mu_1, \zeta \rangle + \ldots + a_q\langle \mu_q, \zeta \rangle \geq \langle \lambda - \omega - f, \zeta \rangle$$

$$\Rightarrow n\epsilon \leq -\langle \lambda - \omega - f, \zeta \rangle$$

où $-\epsilon : = \max\{\langle \mu_i, \zeta \rangle \ : \ 1 \leq i \leq q\} < 0$ et finalement, si $M : = \max\{-\langle \lambda - \omega - f, \zeta \ : \ f \in \mathcal{P}(\mathcal{F}|_x\}$,

$$n \leq \frac{M}{\epsilon} \ .$$

On peut donc choisir $N_\lambda : = \frac{M}{\epsilon} + 1$ pour que :

$$\forall \, n \geq N_\lambda, \ (H^c_C(\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^n))_\lambda = (0) \ .$$

Q.e.d.

II.4 Variétés toriques

Étant donnés un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur une variété torique X et une filtration « bien choisie » (*cf.* la section II.4.7), le complexe de Grothendieck-Cousin associé (*cf.* le théorème I.3.1) est composé de modules dont on peut calculer le caractère. On va ainsi retrouver les caractères des groupes de cohomologie de $\mathscr{L}$ sur X.

Au chapitre V, on généralisera ce résultat aux compactifications des groupes réductifs.

En fait, pour un faisceau inversible sur une variété torique, on va déterminer les caractères de ses groupes de cohomologie à support dans toute sous-variété invariante par le tore. On obtiendra une expression avec les données combinatoires du faisceau et de la variété (*cf.* les théorèmes II.4.2 et II.4.4).

On utilise les notations de [Is] et [O88], rappelées ci-dessous.

II.4.1 Éventails

Soit $N \simeq \mathbb{Z}^r$ un réseau de rang r et de dual $M := N^\vee$.

On pose :

$N_\mathbb{R} := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$;

$M_\mathbb{R} := M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$;

$\langle\ ,\ \rangle : M_\mathbb{R} \times N_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le crochet de dualité ;

$T := T_N := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{K}^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{K}^*)$ le tore associé à N †.

$\widehat{m} : T_N \to \mathbb{K}^*$ le caractère qui est l'évaluation en $m \in M$ ‡ ;

$\gamma_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \longrightarrow & T_N \\ z & \longmapsto & n \otimes z \end{array} \right.$ le sous-groupe à un paramètre associé à $n \in N$. §

On appellera cône de N tout cône strictement convexe, rationnel et polyédral de $N_\mathbb{R}$ (*cf.* [O88, §1.1]). Pour un tel cône σ, soient :

$\mathbb{R}\sigma := \sigma + (-\sigma)$ le plus petit sous-espace de $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ contenant σ ;

$\dim \sigma := \dim \mathbb{R}\sigma$ et $\mathrm{codim}\sigma := r - \dim \sigma$;

$\mathrm{int}\, \sigma$ l'intérieur relatif de σ ;

$\sigma^\vee := \{m \in M_\mathbb{R} \ : \forall\, n \in \sigma,\ \langle m, n\rangle \geq 0\}$ le cône dual ;

$\mathrm{int}\, \sigma^\vee := \{m \in M_\mathbb{R} \ : \forall\, n \in \sigma \setminus \{0\}, \langle m, n\rangle > 0\}$ l'intérieur de $\sigma^\vee$;

$\sigma^\perp := \{m \in M_\mathbb{R} \ : \forall\, n \in \sigma, \langle m, n\rangle = 0\}$;

$S_\sigma := M \cap \sigma^\vee$.

† On identifie $n \otimes a \in N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{K}^*$ avec le morphisme $m \in M \mapsto a^{\langle m,n\rangle} \in \mathbb{K}^*$

‡ L'application $m \mapsto \widehat{m}$ est un isomorphisme entre M et le réseau des caractères de T.

§ L'application $n \mapsto \gamma_n$ est un isomorphisme entre N et le réseau des sous-groupes à un paramètre de T.

Le monoïde S_σ est de type fini d'après le lemme de Gordan (*cf.* [O88, 1.1.(ii)]) et *saturé* (*c-à-d* que si $c \in \mathbb{N}^*$ et $m \in M$, alors $c.m \in S_\sigma$ entraîne que $m \in S_\sigma$).

Par conséquent, la $\mathbb{K}-$algèbre $M-$graduée associée :

$$\mathbb{K}[S_\sigma] :\, = \bigoplus_{m \in S_\sigma} \mathbb{K}\widehat{m}$$

dont la multiplication est définie par linéarité et par :

$$\forall\, m,\, m' \in M,\ \widehat{m} \cdot \widehat{m'} = \widehat{m + m'}\ ,$$

est intégralement close et de type fini. C'est donc l'algèbre des fonctions régulières d'une variété affine normale, Ω_σ, dont les points sont les morphismes de $\mathbb{K}-$algèbres :

$$\mathbb{K}[S_\sigma] \to \mathbb{K}\ .$$

Ceux-ci s'identifient aux applications :

$$f : S_\sigma \to \mathbb{K}$$

telles que :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall\, m,\, m' \in S_\sigma,\ f(m + m') = f(m)f(m')\ .$$

Dans Ω_σ, il y a un point particulier, z_σ, qu'on appelle **POINT-BASE** de Ω_σ et qui correspond à l'application :

$$\begin{array}{ccc} S_\sigma & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ m & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } m \in M \cap \sigma^\perp \\ 0 & \text{sinon .} \end{array} \right. \end{array}$$

Dorénavant, on ne fera pas de différences entre un point de Ω_σ et l'application : $S_\sigma \to \mathbb{K}$ correspondante.

Le tore T_N est un véritable tore algébrique $\simeq {\mathbb{K}^*}^r$ qui agit (algébriquement) sur les variétés Ω_σ via :

$$\begin{array}{ccc} T_N \times \Omega_\sigma & \longrightarrow & \Omega_\sigma \\ (t, f) & \longmapsto & t.f \end{array}$$

où pour tout $m \in S_\sigma$, $(t.f)(m) = t(m)f(m)$.

Pour cette action, l'orbite du point $z_\sigma \in \Omega_\sigma$ est la sous-variété

$$\mathrm{orb}(\sigma)$$

des $f \in \Omega_\sigma$ telles que :

$$\forall\, m \in M \cap \sigma^\perp,\ f(m) \neq 0 \text{ et } \forall\, m \in S_\sigma\ \setminus\ M \cap \sigma^\perp,\ f(m) = 0\ .$$

Dans Ω_σ, $\mathrm{orb}(\sigma)$ est l'unique orbite fermée de T_N. Sa codimension est $\dim \sigma$ (*cf.* [O88, §1.3, prop. 1.6]).

Convention : *Dans la suite, on sous-entendra que $\mathscr{O}(\Omega_\sigma) = \mathbb{K}[\Omega_\sigma]$ est muni de l'action induite de T_N définie par :*

$$\forall\, t \in t_N, \forall\, \psi \in \mathscr{O}(\Omega_\sigma), \forall\, \omega \in \Omega_\sigma,$$
$$(t.\psi)(\omega) = \psi(t^{-1}.\omega)\ .$$

Avec cette convention, si $m \in S_\sigma$, $\widehat{m} \in \mathscr{O}(\Omega_\sigma)$ est un vecteur propre de poids $-\widehat{m}$.

Pour les cônes de N, on notera respectivement $\leq$ et $<$ les relations « être une face de » et « être une face stricte de ».

Si $\sigma \leq \tau$, alors $S_\tau \subseteq S_\sigma$ et la restriction de S_σ à S_τ induit une immersion ouverte $\Omega_\sigma \to \Omega_\tau$.

Définition 3 *Un* **ÉVENTAIL** *de N est un ensemble Δ de cônes de N tel que :*

- *chaque face d'un cône de Δ est dans Δ ;*
- *Pour tous σ, $\tau \in \Delta$, $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et de τ ;*
- *Δ est fini.*

Son support est le sous-ensemble $|\Delta| : = \bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma$ de $N_{\mathbb{R}}$.

Plus généralement, pour toute partie Φ de Δ, on notera

$$|\Phi| : = \bigcup_{\sigma\in\Phi} \sigma$$

son support.

A un éventail Δ est associée la **VARIÉTÉ TORIQUE** $X(\Delta)$ obtenue « en collant chaque paire de variétés affines $(\Omega_\sigma, \Omega_\tau)$ le long de $\Omega_{\sigma\cap\tau}$ » (*cf.* [O88, §1.2, théorème 1.4]).

$X(\Delta)$ est une variété algébrique normale et de Cohen-Macaulay (*cf.* [Da, Cha. I, théorème 3.4]), où les actions de T_N sur les Ω_σ induisent une action (algébrique) de T_N.

Dans $X(\Delta)$, pour cette action, les ouverts affines T_N-invariants sont exactement les $(\Omega_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$, les T_N-orbites sont les $(\mathrm{orb}(\sigma))_{\sigma\in\Delta}$ et $\mathrm{orb}(0) = T_N$ est l'unique orbite ouverte.

* * *

Réciproquement, à toute variété X, irréductible et normale, qui contient un tore algébrique T et qui est munie d'une action de T :

$$\begin{array}{ccc} T\times X & \longrightarrow & X \\ \bigcup & & \bigcup \\ T\times T & \longrightarrow & T \end{array}$$

qui prolonge la multiplication de T, correspond un éventail Δ de $X_*(T)$, le réseau des sous-groupes à un paramètre de T, tel que :

$$X \simeq X(\Delta)$$

comme $T-$variété (*cf.* [O78, théorème 4.1]).

ON GARDERA CES NOTATIONS JUSQU'À LA FIN DU CHAPITRE.

II.4.2 Fibrés en droites

Les objets combinatoires correspondant aux fibrés en droites sur $X(\Delta)$ sont certaines applications linéaires par morceaux sur $|\Delta|$ qu'on appelle les *fonctions d'appui* :

Définition 4 ([O88]) † *On dit qu'une application $h : |\Delta| \to \mathbb{R}$ est une* **FONCTION D'APPUI** *s'il existe une famille $\{h_\sigma \ : \ \sigma \in \Delta\}$ d'éléments de $M_\mathbb{R}$ telle que :*

- *pour toute paire de cônes, $\sigma \leq \tau$, de Δ , $h_\sigma - h_\tau \in M \cap \sigma^\perp$;*
- *Pour tout $n \in \sigma$, $h(n) = \langle h_\sigma, n \rangle$.*

Remarque : On a en particulier $h_\sigma - h_\tau \in M \cap (\sigma \cap \tau)^\perp$ $(\forall\, \sigma, \tau \in \Delta)$.

D'après [O88], tout faisceau inversible sur $X(\Delta)$ est $\mathscr{O}_{X(\Delta)}$−isomorphe à un faisceau T_N−linéarisé sur $X(\Delta)$. Et, à chaque faisceau inversible T_N−linéarisé, on peut associer une fonction d'appui à valeurs entières sur $N \cap |\Delta|$ ([O88, propo. 2.4]).

On aura affaire plus tard (*cf.* chapitre V, section V.3.11) au cas suivant :

On se donne un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $X(\Delta)$ qui n'est pas T_N−linéarisé mais seulement linéarisé pour un tore $T_{N'}$ correspondant à un sous-réseau N' de N de même rang r.

L'inclusion $N' \hookrightarrow N$ induit un morphisme surjectif de tores :

$$T_{N'} \twoheadrightarrow T_N$$

et une inclusion des réseaux duaux :

$$M \hookrightarrow M' : = N'^\vee \ .$$

On peut associer directement (et canoniquement) à $\mathscr{L}$, sans passer par un faisceau T_N−linéarisé, une fonction d'appui h, à valeurs entières sur $N' \cap \Delta$.

En effet, si $\sigma \in \Delta$, $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$ est un anneau $T_{N'}$−linéarisé (ou M'−gradué ‡) et $\mathscr{L}(\Omega_\sigma)$ est un $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$−module projectif de rang 1 qui est $T_{N'}$−linéarisé (ou M'−homogène). Donc $\mathscr{L}(\Omega_\sigma)$ est un $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$−module libre de rang 1 qui admet (au moins) un générateur homogène $\widetilde{h_\sigma}$ (*cf.* [Is, proposition 8 de l'appendice]). Soit $-h_\sigma \in M'$ le degré de $\widetilde{h_\sigma}$. $\widetilde{h_\sigma}$ est aussi un vecteur propre de $T_{N'}$ de poids h_σ.

Proposition II.4.1 *En tant que $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$−modules T'_N−linéarisés,*

$$\mathscr{L}(\Omega_\sigma) = \mathscr{O}(\Omega_\sigma) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathbb{K}\widetilde{h_\sigma}$$
$$= \bigoplus_{m \in -h_\sigma + M \cap \sigma^\vee} \mathbb{K}\widehat{m}$$

et, modulo $M \cap \sigma^\perp$, h_σ est indépendant du générateur homogène choisi pour $\mathscr{L}(\Omega_\sigma)$.

† On omet volontairement la condition « à valeurs entières sur $N \cap |\Delta|$ ».

‡ On pose $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)_{m'} : = \begin{cases} \mathscr{O}(\Omega_\sigma)_{m'} & \text{si } m' \in M \\ (0) & \text{sinon} \end{cases}$

Remarques :

- En particulier, si τ est une face de σ, alors $h_\tau = h_\sigma$ modulo $M \cap \tau^\perp$;
- si le point-base z_σ de l'ouvert Ω_σ ((*cf.* section II.4.1) est un point fixe de T_N dans $X(\Delta)$, alors le caractère h_σ est aussi le poids de la droite $\mathscr{L}|_{z_\sigma}$, qui est la fibre de $\mathscr{L}$ en z_σ ;
- le faisceau $\mathscr{L}_h$ est noté $\mathscr{O}_X(D_{-h})$ dans [O88, §2.1].

Démonstration : La première partie de la proposition vient du fait que $\mathscr{L}(\Omega_\sigma) = \mathscr{O}(\Omega_\sigma).\widetilde{h_\sigma}$.

Si f_σ est un autre générateur homogène (*c-à-d* $T_{N'}$−vecteur propre) de $\mathscr{L}(\Omega_\sigma)$, de degré $-h'_\sigma$, alors $f_\sigma = a_\sigma.\widetilde{h_\sigma}$ pour un élément homogène et inversible de $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$. Forcément, a_σ est homogène de degré $\in M\cap\sigma^\vee\cap-(M\cap\sigma^\vee) = M\cap\sigma^\perp$. D'où $h'_\sigma \in h_\sigma + M\cap\sigma^\perp$. On en déduit l'indépendance de la classe de h_σ. **Q.e.d.**

Définition 5 *On dit que l'application :*

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} |\Delta| & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \langle h_\sigma, n\rangle \text{ si } n \in \sigma \end{array} \right.$$

est la FONCTION D'APPUI ASSOCIÉE À $\mathscr{L}$ *et on écrira :*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_h \ .$$

II.4.3 Cohomologie à support

Soit N' un sous-réseau de N de même rang r.

Soient h une fonction d'appui sur $|\Delta|$ à valeurs entières sur $N' \cap |\Delta|$ et, comme précédemment, $\mathscr{L}_h$ le faisceau associé, inversible et $T_{N'}$−linéarisé sur $X(\Delta)$.

Pour deux espaces topologiques $B \subseteq A$, on notera $H^*(A, B; \mathbb{R})$ les groupes de cohomologie relative, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définis par exemple dans [Spa, Chap. 5, sec. 4, ex. 5].

Cela étant posé, on va démontrer le :

Théorème II.4.2 *Pour toute sous-variété stricte Z de $X(\Delta)$, fermée (éventuellement réductible) et T_N−invariante, les groupes de cohomologie à support dans Z du faisceau $\mathscr{L}_h$ ont pour caractères comme $T_{N'}$−modules :*

$$\forall\, i \geq 0,\ [H^i_Z(\mathscr{L}_h)] = \sum_{m \in M'(h)} \dim H^{i-1}(V(h,m), V(h,m) \cap |\Delta_{X \setminus Z}|; \mathbb{R}).e^{\widehat{m}}$$

où :

- $M'(h) : = \{m \in M' \ : \forall\, n \in N \cap |\Delta|,\ \langle m, n\rangle - h(n) \in \mathbb{Z}\}$
  $= h_\sigma + M$ *(pour tout* $\sigma \in \Delta$*) ;*
- $V(h,m) : = \{n \in |\Delta| \ : \langle m, n\rangle - h(n) > 0\}$ *;*
- $\Delta_{X \setminus Z} : = \{\sigma \in \Delta \ : \ \Omega_\sigma \subseteq X \setminus Z\} = \{\sigma \in \Delta \ : \ \mathrm{orb}(\sigma) \cap Z = \emptyset\}$ *; c'est l'éventail de la variété torique* $X \setminus Z$.

Remarque :
Lorsque $Z = X$, on a, d'après [De70] et [Da, théorème 7.2] :

$$\forall\, i \geq 0,\ \left[H^i_X(\mathscr{L}_h)\right] = \left[H^i(X, \mathscr{L}_h)\right] = \sum_{m \in M'(h)} \dim H^i(|\Delta|, V(h,m); \mathbb{R}).e^{\widehat{m}}\ .$$

II.4.4 Démonstration du théorème à l'aide de la cohomologie de Čech

On garde les notations de la section précédente : $X = X(\Delta)$ est une variété torique et Z est un fermé strict, T_N-stable, de X.

On va calculer les caractères des groupes de cohomologie à support à l'aide de la cohomologie de Čech.

Soit $m \in M'(h)$.

D'après [O88, théorème 2.6] et [Fu, proposition du §3.5]), on a des isomorphismes :

$$(\diamond)\ \ \varphi_i(\Delta) : (H^i(X, \mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \overset{\simeq}{\to} H^i_{Z(h,m)}(|\Delta|, \mathbb{R})\ \ (\forall\, i \geq 0)$$

où $Z(h,m) :\ = \{n \in |\Delta|\ :\ \langle m, n\rangle - h(n) \leq 0\}$ est un fermé de $|\Delta|$ et où l'on identifie $\mathbb{R}$ avec le faisceau constant de fibre $\mathbb{R}$ sur Δ qui est muni de la topologie usuelle de $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r$.

En particulier, si X est affine, on a :

$$\forall\, i > 0,\ H^i(X, \mathscr{L}_h) = (0) \Rightarrow$$

$$(\diamond\diamond)\ \ \forall\, i > 0,\ (H^i_Z(X, \mathscr{L}_h)) = H^{i-1}(X \setminus Z, \mathscr{L}_h)$$

et par suite :

$$\forall\, i > 0\ (H^i_Z(X, \mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = H^{i-1}_{Z(h,m)\cap|\Delta_{X\setminus Z}|}(|\Delta_{X\setminus Z}|, \mathbb{R})\ .$$

avec : $\Delta_{X\setminus Z} :\ = \{\sigma \in \Delta\ :\ \Omega_\sigma \subseteq X(\Delta) \setminus Z\} = \{\sigma \in \Delta\ :\ \mathrm{orb}(\sigma) \cap Z = \emptyset\}$.

En général, X n'est pas affine et on n'a pas d'isomorphisme comme $(\diamond\diamond)$. Néanmoins, on a toujours une suite exacte longue :

$$(*)\ \ 0 \to H^0_Z(X(\Delta), \mathscr{L}_h) \to H^0(X(\Delta), \mathscr{L}_h) \to H^0(X(\Delta) \setminus Z, \mathscr{L}_h) \to \ldots$$

D'un autre côté, puisque :

$$H^p(\Delta, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \\ (0) & \text{si } p > 0 \end{cases},$$

pour tout $i \geq 0$, est vérifiée :

$$H^i_{Z(h,m)}(|\Delta|, \mathbb{R}) = H^i(|\Delta|, |\Delta| \setminus Z(h,m); \mathbb{R}) = \widetilde{H}^{i-1}(|\Delta| \setminus Z(hm); \mathbb{R})$$

où $\widetilde{H}^*(\ \ , \mathbb{R})$ est la cohomologie réduite à valeurs dans $\mathbb{R}$ (*cf.* [Spa, Chap. 5, sec 4, §2]) et où, par convention, pour tout espace topologique E :

$$\widetilde{H}^{-1}(E, \mathbb{R}) :\ = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } E = \emptyset \\ (0) & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$$

(*cf.* aussi [Sta, définitions 3.4, 3.9, 3.10]).

On obtient une autre suite exacte longue :

$$(**)\ \ 0 \to \widetilde{H}^{-1}(|\Delta| \setminus Z(h,m);\mathbb{R}) \to \widetilde{H}^{-1}(|\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R})$$

$$\to H^0(|\Delta| \setminus Z(h,m), |\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R}) \to H^0(|\Delta| \setminus Z(h,m);\mathbb{R})$$

$$\to H^0(|\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R}) \to H^1(|\Delta| \setminus Z(h,m), |\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R}) \to \dots$$

(*cf.* [Spa, Chapitre 5, Section 4, §13]).

En prenant l'espace propre associé au caractère $\widehat{m} \in X^*(T_{N'})$ dans la suite $(*)$ et en tenant compte des isomorphismes naturels $(\diamond)$ on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
(H^i_Z(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \arrow[d] & H^{i-1}(|\Delta| \setminus Z(h,m), |\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R}) \arrow[d] \\
(H^i(X(\Delta),\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \arrow[r, "\varphi_i(\Delta)"] \arrow[d] & \widetilde{H}^{i-1}(|\Delta| \setminus Z(h,m),\mathbb{R}) \arrow[d] \\
(H^i(X(\Delta) \setminus Z,\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \arrow[r, "\varphi_i(\Delta_{X \setminus Z})"] \arrow[d] & \widetilde{H}^{i-1}(|\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m),\mathbb{R}) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

où lorsque $i \geq 0$, les flèches horizontales φ_i sont des isomorphismes.

Grâce au *lemme des cinq* (*cf.* [Bou, §1, corollaire 3]), on en déduit des isomorphismes de $\mathbb{R}-$espaces vectoriels :

$$(H^i_Z(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \simeq H^{i-1}(|\Delta| \setminus Z(h,m), |\Delta_{X \setminus Z}| \setminus Z(h,m);\mathbb{R})$$

pour tout $i \geq 0$ (en particulier, $(H^0_Z(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = (0)$).

*

Lorsque $m \notin M'(h)$, pour tout ouvert affine Ω_σ, $\sigma \in \Delta$,

$$(\Gamma(\Omega_\sigma,\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = (0)$$

donc pour tout $i \geq 0$:

$$(H^i(X,\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = (H^i(X \setminus Z,\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = (0)\ \ .$$

Il s'ensuit :

$$(H^i_Z(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} = (0)\ \ .$$

Cela démontre le théorème II.4.2.

* * *

On va retrouver les caractères des groupes de cohomologie à support à l'aide du complexe de Grothendieck-Cousin et en obtenir une expression avec les *groupes de cohomologie d'Ishida.*

II.4.5 Complexe d'Ishida

On commencera par rappeler la définition de la cohomologie d'Ishida avant de faire le lien avec le complexe de Grothendieck-Cousin dans la section I.3.

On conserve les notations de la section II.4.1.

II.4.5.1 Un isomorphisme canonique

Si σ est un cône de N, de dimension d, alors le réseau $M \cap \sigma^{\perp}$ est de rang $r-d$. On pose

$$\mathbb{Z}_{\sigma} := \bigwedge^{r-d} M \cap \sigma^{\perp} ;$$

c'est un $\mathbb{Z}-$module libre de rang 1 (isomorphe à $\mathbb{Z}$ mais en général non canoniquement).

Soit τ un cône de N, de dimension $d+1$ dont σ est une face. On définit de même $\mathbb{Z}_{\tau}$.

M.-N. Ishida ([Is]) a introduit une application linéaire canonique

$$q_{\tau/\sigma} : \mathbb{Z}_{\sigma} \to \mathbb{Z}_{\tau}$$

de la façon suivante :

Chaque élément k de $\mathbb{Z}_{\sigma}$ s'écrit de la forme :

$$k = m_1 \wedge m_2 \wedge \ldots \wedge m_{r-d}$$

où $m_1 \in M \cap \sigma^{\perp}$ et $m_2, \ldots, m_{r-d} \in M \cap \tau^{\perp}$.

De plus, le semi-groupe $(\tau + (-\sigma)) \cap N / \mathbb{R}\sigma \cap N$ a un unique générateur : on le note $a_{\tau/\sigma}$.

Soit alors :

$$q_{\tau/\sigma}(m_1 \wedge m_2 \wedge \ldots \wedge m_{r-d}) := \langle m_1, a_{\tau/\sigma} \rangle . m_2 \wedge \ldots \wedge m_{r-d} \ .$$

Cette définition ne dépend que de k, σ et τ, de plus $q_{\tau/\sigma}$ est un isomorphisme (*cf.* le paragraphe qui précède le lemme 1.4 de [Is]).

II.4.5.2 Parties localement fermées d'un éventail

Si Φ est une partie de Δ, on dit que :

– Φ est **OUVERTE** si :

$$\forall \tau, \sigma \in \Delta,\ \tau \leq \sigma \text{ et } \sigma \in \Phi \Rightarrow \tau \in \Phi \ ;$$

– Φ est **FERMÉE** si :

$$\forall \tau, \sigma \in \Delta,\ \tau \leq \sigma \text{ et } \tau \in \Phi \Rightarrow \sigma \in \Phi \ ;$$

– Φ est **LOCALEMENT FERMÉE** si :

$$\forall\, \tau,\, \sigma,\, \rho \in \Delta,\ \tau \leq \rho \leq \sigma \text{ et } \tau, \sigma \in \Phi \Rightarrow \rho \in \Phi \ .$$

Cette terminologie s'explique par le fait suivant :

$$\Phi \text{ est ouverte (resp. fermée (resp. localement fermée))}$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{\sigma \in \Phi} \mathrm{orb}(\sigma) \text{ est ouvert (resp. fermé (resp. localement fermé)) dans } X(\Delta) \ .$$

II.4.6 Cohomologie d'Ishida

Soit Φ une partie localement fermée de Δ. M.-N. Ishida a défini un complexe

$$(\mathcal{C}^j(\Phi), d^j)_{j \geq 0}$$

où pour tout $j \geq 0$:

$$\mathcal{C}^j(\Phi) : = \bigoplus_{\sigma \in \Phi(j)} \mathbb{Z}_\sigma$$

avec $\Phi(j) : = \{\sigma \in \Phi \ : \ \dim \sigma = j\}$ et où les différentielles

$$d^j : \mathcal{C}^j(\Phi) \to \mathcal{C}^{j+1}(\Phi)$$

ont pour $(\sigma, \tau)-$ième composante :

$$\begin{cases} q_{\tau/\sigma} \text{ si } \sigma \leq \tau \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Définition 6 *Il est démontré en [Is, lemme 1.4] que $(\mathcal{C}^*(\Phi), d^*)$ est bien un complexe.*

On l'appelle le **COMPLEXE D'ISHIDA** *de Φ et on note $H^*(\Phi)$ son homologie. C'est un $\mathbb{Z}-$module de type fini. On note $H^*(\Phi, \mathbb{K})$ l'homologie du complexe $\left(\mathcal{C}^*(\Phi) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{K}, d^* \otimes 1\right)$.*

On exprime dans la proposition suivante les groupes de cohomologie d'Ishida en fonction de groupes de cohomologie relative de sous espaces de la sphère de $\mathbb{N}_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$:

$$\widetilde{N_\mathbb{R}} : = N_\mathbb{R} \setminus \{0\}/\mathbb{R}_+^* \simeq S^{r-1} \ .$$

On notera, pour toute partie Φ de Δ, $\widetilde{\Phi}$ le sous espace $|\Phi| \setminus \{0\}/\mathbb{R}_*^+$ de $\widetilde{N_\mathbb{R}}$.

Remarque : $\widetilde{\Phi}$ est homéomorphe à $|\Phi| \cap S^{r-1}$.

Proposition II.4.3 ([O88, §3.2, remarque p. 120]) *On suppose que Δ est simplicial.*

Soit Φ une partie non vide de Δ.

Si Φ est ouverte, alors :

$$\forall\, i \geq 0,\ H^i(\Phi, \mathbb{K}) = \widetilde{H}^{i-1}(\widetilde{\Phi}, \mathbb{R}) \ .$$

Si en revanche, Φ n'est que localement fermée, alors :

$$\forall\, i \geq 0,\ H^i(\Phi, \mathbb{K}) = H^{i-1}(\widetilde{\Phi_1}, \widetilde{\Phi_2}; \mathbb{R})$$

pour toutes parties ouvertes et non vides $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ de Δ telles que $\Phi = \Phi_1 \setminus \Phi_2$.

En fait, dans [O88], on ne trouve que la version « Φ est ouverte » de cette proposition mais la démonstration est identique dans le cas général (*cf.* B.2 en annexe).

II.4.7 Complexe de Grothendieck-Cousin « torique »

On reprend les notations de la section II.4.3 :

- $X := X(\Delta)$ est une variété torique et lisse ;
- $\mathscr{L}_h$ est un faisceau inversible et $T_{N'}$−linéarisé† sur $X(\Delta)$;
- Z est une sous-variété fermée (qui peut être réductible) et T_N−invariante de $X(\Delta)$.
- $\Delta_{X \setminus Z}$ est l'éventail de l'ouvert $X \setminus Z$, *i.e.* $\Delta_{X \setminus Z} = \{\sigma \in \Delta : \mathrm{orb}(\sigma) \subseteq X \setminus Z\}$.

On va retrouver les caractères des groupes de cohomologie à support :

$$H^i_Z(\mathscr{L}_h)$$

en démontrant le

Théorème II.4.4 *Soit $\Phi_{m,h,Z}$ la partie localement fermée de Δ formée des cônes $\sigma \in \Delta$ qui :*

- *sont inclus dans $\{n \in \Delta : \langle m, n\rangle - h(n) > 0\} \cup \{0\}$;*
- *et rencontrent $|\Delta| \setminus |\Delta_{X \setminus Z}|$.*

Alors :

$$\left[H^i_Z(\mathscr{L}_h)\right] = \sum_{m \in M'(h)} \dim_{\mathbb{K}} H^i(\Phi_{m,h,Z}; \mathbb{K}).e^{\widehat{m}}$$

Remarque : On a :

$$\begin{cases} m \in M'(h) \\ \forall\, n \in \sigma \setminus \{0\},\ \langle m, n\rangle - h(n) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in h_\sigma + M \cap \mathrm{int}\,\sigma^\vee$$

et :

$$\sigma \cap |\Delta| \setminus |\Delta_{X \setminus Z}| \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{orb}(\sigma) \subseteq Z\ .$$

D'où : $\Phi_{m,h,Z} = \{\sigma \in \Delta : \mathrm{orb}(\sigma) \subseteq Z \text{ et } m \in h_\sigma + M \cap \mathrm{int}\,\sigma^\vee\}$ pour tout $m \in M'(h)$.

Exemple : On suppose que $M' = M$.

Dans le cas où $X = \mathbb{A}^r$ et $Z = \{0\}$, Δ est l'ensemble des faces du cône $\sigma = \mathbb{R}_+e_1 + \ldots + \mathbb{R}_+e_r$ où $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est une $\mathbb{Z}$−base de N et, $\Delta_{X \setminus Z} = \Delta \setminus \{\sigma\}$. En particulier :

$$|\Delta_{X \setminus Z}| = \bigcup_{j=1}^{r} \sum_{k=1\,:\,k \neq j}^{r} \mathbb{R}_+ e_k$$

et :

$$|\Delta| \setminus |\Delta_{X \setminus Z}| = \mathbb{R}^*_+ e_1 + \ldots + \mathbb{R}^*_+ e_r = \mathrm{int}\,\sigma\ .$$

† $T_{N'}$ est un tore de dimension r dont T_N est une image

On en déduit que :

$$\Phi_{m,0,Z} = \{\tau \in \Delta \ : \ \tau \cap \mathrm{int}\,\sigma \neq \emptyset\} \cap \{\tau \in \Delta \ : \ \tau \subseteq \{n \in \sigma \ : \ \langle m,n\rangle > 0\} \cup \{0\}\}$$

$$= \begin{cases} \sigma & \text{si pour tout } 1 \leq j \leq r,\ \langle m, e_j\rangle > 0 \\ \emptyset & \text{sinon .} \end{cases}$$

Le complexe d'Ishida correspondant est donc :

$$0 \to \ldots \to \mathbb{Z}_\sigma \to 0$$

et

$$H^i(\Phi_{m,0,Z}, \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } i = r \text{ et } \forall\, j,\ \langle m, e_j\rangle > 0 \\ (0) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Par conséquent, on retrouve le caractère :

$$[H^r_{\{0\}}(\mathscr{O}_{\mathbb{A}^r})] = \sum_{m\,:\,\forall\, j,\,\langle m,e_j\rangle>0} e^{\widehat{m}} \ .$$

II.4.7.1 Filtration de la variété torique

Pour tout $p \geq 0$, soit Z_p la réunion des T_N-orbites de $X(\Delta)$ de codimension $\geq p$.

Comme $X(\Delta)$ n'a qu'un nombre fini d'orbites et puisque le bord d'une orbite est une réunion disjointe d'orbites de dimension strictement inférieure, les Z_i sont des sous-variétés fermées et T_N-invariantes de $X(\Delta)$.

De plus, $Z_p \setminus Z_{p+1} = \bigcup_{\sigma\,:\,\dim\sigma=p} \mathrm{orb}(\sigma)$ est une union disjointe d'ouverts affines (dans $Z_p \setminus Z_{p+1}$), donc une sous-variété affine de $X(\Delta)$ de codimension p. Puisque $X(\Delta)$ est de Cohen-Macaulay, il en résulte, d'après le théorème I.3.1 et sa remarque 3, que :

$$\forall\, q \neq 0,\ H^{p+q}_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathscr{L}_h) = (0)$$

et que :

$$H^i(X(\Delta), \mathscr{L}_h)$$

est exactement le $i-$ème groupe d'homologie du complexe de Grothendieck-Cousin :

$$\mathcal{GC}^* : 0 \to \ldots \to \bigoplus_{\sigma\,:\,\dim\sigma=p} (H^p_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h)) \xrightarrow{d^p} \ldots$$

Pour chaque $(\sigma, \tau) \in \Delta(p) \times \Delta(p+1)$, la différentielle d^p a pour $(\tau, \sigma)-$ième composante un morphisme :

$$(\diamond)\ \ d_{\tau/\sigma} : (H^p_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h)) \to (H^{p+1}_{\mathrm{orb}(\tau)}(\mathscr{L}_h))$$

qui, d'après le lemme I.5.1, est nul si l'orbite $\mathrm{orb}(\tau)$ n'est pas incluse dans l'adhérence $\overline{\mathrm{orb}(\sigma)}$ *c-à-d* si σ n'est pas une face de τ.

En passant, on a aussi :

$$(\diamond\diamond)\ \ \forall\, q \neq 0,\ H^{p+q}_{Z_p \setminus Z_{p+1}}(\mathscr{L}_h) = \bigoplus_\sigma H^{p+q}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = (0)$$

ce qui entraîne la :

Proposition II.4.5

$$\forall\, d \neq \dim \sigma,\ H^d_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = (0)\ .$$

Remarque : Ce dernier résultat est une conséquence immédiate du théorème I.4.1 dans le cas où X est lisse mais non dans le cas général.

On aura besoin d'analyser :

$$H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h)\ .$$

D'après le lemme d'excision I.1.2, $H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h|_{\Omega_\sigma})$. Or, Ω_σ est un ouvert affine de $X(\Delta)$ qui contient $\mathrm{orb}(\sigma)$ comme fermé. Soit I_σ l'idéal correspondant.

Avec les notations du premier chapitre, on a :

$$H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = H^{\dim \sigma}_{I_\sigma}(\mathscr{L}_h(\Omega_\sigma))\ .$$

Mais, $\mathscr{L}_h(\Omega_\sigma) = \mathscr{O}(\Omega_\sigma)\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}\widetilde{h}_\sigma$ suivant les notations de la section II.4.2 ; donc :

$$H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = H^{\dim \sigma}_{I_\sigma}(\mathscr{O}(\Omega_\sigma))\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}\widetilde{h_\sigma}\ .$$

Puisque $\mathrm{orb}(\sigma)$ est l'unique orbite fermée de Ω_σ, son idéal de définition I_σ est l'unique idéal maximal homogène de $\mathscr{O}(\Omega_\sigma) = \mathbb{K}[M \cap \sigma^\vee]$.

Si on fait l'analogie avec le cas, non homogène, d'un anneau local avec son idéal maximal, on peut penser que :

$$H^{\dim \sigma}_{I_\sigma}(\mathscr{O}(\Omega_\sigma)) = \omega_\sigma^\vee$$

le dual du faisceau canonique ω_σ de $\mathscr{O}(\Omega_\sigma)$ et donc que :

$$H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = \omega_\sigma^\vee\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}\widetilde{h_\sigma}$$

$$\Rightarrow\ (*)\ \ H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = \bigoplus_{m \in -h_\sigma - \mathrm{int}\,\sigma^\vee \cap M} \mathbb{K}\widehat{m}$$

(d'après [O88, §3.2, remarque (i) p. 126] et [Is, proposition 6.2 p. 131]).

On va démontrer $(*)$ dans la suite (*cf.* le lemme II.4.6 et le théorème B.1.1 dans les annexes).

II.4.7.2 Lien avec le complexe d'Ishida et fin de la démonstration du théorème II.4.4

Pour établir le lien avec le complexe d'Ishida, on pose

$$\Phi_Z :\ = \{\sigma \in \Delta\ :\ \mathrm{orb}(\sigma) \subseteq Z\}\ .$$

Remarque : Comme Z est fermé, Φ_Z est une partie fermée de Δ.

Soit $m \in M'$.

Soient :

$$\Phi_{m,h} :\ = \{\sigma \in \Delta\ :\ m \in h_\sigma + M \cap \mathrm{int}\,\sigma^\vee\}$$

(c'est une partie ouverte de Δ) et

$$\Phi_{m,h,Z} : = \Phi_Z \cap \Phi_{m,h}$$

(qui est une partie localement fermée de Δ) ; on notera $H^*(\Phi_{m,h,Z};\mathbb{K})$ sa cohomologie d'Ishida (*cf.* la section II.4.6).

Suivant le paragraphe qui suit la remarque de la page 48, on pose :

$$\mathbb{K}_\sigma(m) : = \begin{cases} \mathbb{K}_\sigma & \text{si } m \in h_\sigma + \operatorname{int}\sigma^\vee \cap M \\ (0) & \text{sinon} . \end{cases}$$

Si $d : = \dim\sigma$, alors on reconnaît que $\mathbb{K}_\sigma(m)$ est la $\sigma-$ième composante de $\mathcal{C}^d(\Phi_{m,h},\mathbb{K})$, le $d-$ième terme du complexe d'Ishidade $\Phi_{m,h}$ (*cf.* la définition 6, page 45).

Soient $\sigma \le \tau$ deux cônes de Δ ; on note encore :

$$q_{\tau/\sigma} : \mathbb{K}_\sigma(m) \to \mathbb{K}_\tau(m)$$

le morphisme défini par Ishida (*cf.* le début de la section II.4.5) si :

$$m \in h_\tau + \operatorname{int}\tau^\vee \cap M \subseteq h_\sigma + \operatorname{int}\sigma^\vee \cap M$$

et $q_{\tau/\sigma} : = 0$ sinon.

Avec ces notations et en marquant d'un indice $\widehat{m}$ les espaces propres associés au caractère $\widehat{m}$, on a :

Lemme II.4.6 *Il existe une famille d'isomorphismes (de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels) :*

$$\varphi_\sigma : (H^{\dim\sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h|_{\Omega_\sigma}))_{\widehat{m}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}_\sigma(m)$$

telle que pour toutes paires de cônes $\sigma \le \tau$ de Δ avec $\dim\tau = \dim\sigma + 1$, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{\dim\sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h|_{\Omega_\sigma})_{\widehat{m}} \arrow[r, "d_{\tau/\sigma}"] \arrow[d, "\varphi_\sigma"] & H^{\dim\tau}_{\mathrm{orb}(\tau)}(\mathscr{L}_h|_{\Omega_\tau})_{\widehat{m}} \arrow[d, "\varphi_\tau"] \\ \mathbb{K}_\sigma(m) \arrow[r, "q_{\tau/\sigma}"] & \mathbb{K}_\tau(m) \end{tikzcd}$$

commute (pour la définition des $d_{\tau/\sigma}$, cf. ($\diamond$) page 47).

Remarque : En particulier, pour tout $\sigma \in \Delta$, on a :

$$H^{\dim\sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{O}_{\Omega_\sigma}) = \bigoplus_{m\in -M\cap\operatorname{int}\sigma^\vee} \mathbb{K}\widehat{m} .$$

Puisque $\mathscr{L}_h$ est un faisceau inversible, il suffit de démontrer ce lemme lorsque $h = 0$. Pour cela, *cf.* , dans les annexes, le théorème B.1.1.

* * *

On va cette fois filtrer X en commençant par Z : on pose , pour tout $p \ge 0$, $Z'_p : = Z_p \cap Z$; c'est la réunion des orbites incluses dans Z et de codimension

$\geq p$ dans X et, $Z'_p \setminus Z'_{p+1}$ est la réunion disjointe des $\mathrm{orb}(\sigma)$ incluses dans Z et de codimension p, *c-à-d* telles que $\sigma \in \Phi_Z(p)$.

La proposition II.4.5 a pour conséquence :

$$\forall\, j \geq 0,\; H^j_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathscr{L}_h) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} H^j_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) = (0) \text{ si } j \neq p$$

et donc, d'après le théorème I.3.1, appliqué à la filtration

$$X \supseteq Z = Z'_0 \supseteq Z'_1 \supseteq \dots,$$

$H^*_Z(\mathscr{L}_h)$ est précisément l'homologie du complexe de Grothendieck-Cousin :

$$\mathcal{GC}^* : 0 \to \dots \to \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(i)} H^i_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) \overset{d^i}{\to} \dots \to 0\ .$$

En prenant pour chaque $m \in M'$ les espaces propres associés au caractère $\widehat{m}$ (notés avec un indice $\widehat{m}$), on trouve que

$$(H^*_Z(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}}$$

est l'homologie du complexe:

$$\mathcal{GC}^*_m : 0 \to \dots \to \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} (H^p_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h))_{\widehat{m}} \overset{d^p}{\to} \dots \to 0$$

pour tout $i \geq 0$.

Par ailleurs, en tenant compte des notations du lemme II.4.6, on pose pour tout $p \geq 0$:

$$\varphi_p \,:=\, \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} \varphi_\sigma : \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} H^p_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{L}_h) \to \bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} \mathbb{K}_\sigma(m)\ .$$

Mais,

$$\bigoplus_{\sigma \in \Phi_Z(p)} \mathbb{K}_\sigma(m) = \mathcal{C}^p(\Phi_{m,h,Z}; \mathbb{K})$$

est le $p-$ème morceau du complexe d'Ishida de $\Phi_{m,h,Z}$ (*cf.* la définition 6, page 45) et en raison du lemme II.4.6, le morphisme

$$(\varphi_p)_{p \geq 0} : \mathcal{GC}^*_m \to \mathcal{C}^*(\Phi_{m,h,Z}; \mathbb{K})$$

est un isomorphisme de complexes (*i.e.* tous les φ_p sont des isomorphismes et commutent avec les différentielles des deux complexes).

En conséquence :

$$\forall\, m \in M',\; \forall\, i \geq 0,\; H^i_Z(\mathscr{L}_h)_{\widehat{m}} = H^i(\Phi_{m,h,Z}; \mathbb{K})\ .$$

Q.e.d.

Chapitre III

Actions de groupes réductifs

Dans ce chapitre, on considère un groupe réductif G et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Après avoir posé les principales notations propres à G, on va introduire la classe des $\mathfrak{g}-B-$modules (B étant un sous-groupe de Borel de G) (*cf.* la section III.1). Les termes des complexes de Grothendieck-Cousin dont on se servira aux chapitres IV et V sont de cette classe.

On va notamment rappeler comment ces $\mathfrak{g} - B-$modules se décomposent grâce aux caractères centraux de $\mathfrak{g}$ (*cf.* la proposition III.1.2). On mentionnera aussi la définition des modules de Verma tordus qui apparaîtront au chapitre V comme quotients successifs de certains groupes de cohomologie à support.

On rappellera également la définition générale des faisceaux linéarisés pour un groupe algébrique linéaire†(*cf.* la section III.2) et comment l'algèbre de Lie agit sur les groupes de cohomologie à support de tels faisceaux (*cf.* le théorème III.2.2).

On utilisera ensuite le complexe de Grothendieck-Cousin pour redémontrer le théorème de Borel-Weil-Bott (III.3.2) par la méthode qu'on emploiera pour démontrer les théorèmes principaux du chapitre V.

Enfin, on étudiera les groupes de cohomlogie du faisceau structural de G, à support dans les $B \times B^-$-orbites.

Pour ce chapitre et pour les suivants, soient (*cf.* [Di, 1.10.2 et 1.10.22] et [Sp81]) :

G un groupe algébrique réductif et connexe sur $\mathbb{K}$;

$\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie ;

$\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ (*cf.* [Di, 1.10.2 et 1.10.22]) ;

$\mathfrak{b} :\, = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{b}^- :\, = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$;

$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ le système de racines associé ;

$(X_{-\alpha}, H_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ un système de générateurs de Cartan de $\mathfrak{g}$‡;

† qui est équivalente à celle donnée pour les tores à la page 30.

‡ c'est-à-dire tel que :

– $\forall\, \alpha \in \Phi,\ \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, H \in \mathfrak{h},\ [H, X] = \alpha(H)X\} = \mathbb{K}.X_\alpha$;

$\mathfrak{g}_\alpha : = \mathbb{K}.X_\alpha \ (\forall\, \alpha \in \Phi)$;

$\mathbb{Z}.\Phi \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids radiciels ;

Δ la base de Φ associée à $\mathfrak{b}$;

B et B^- les sous-groupes de Borel de G d'algèbres de Lie $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}^-$;

U et U^- les sous-groupes unipotents maximaux de B et B^- ;

T le tore maximal $B \cap B^-$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$) ;

U_α le sous-groupe additif ($\simeq \mathbb{K}$) de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$;

$\langle\, ,\, \rangle \ : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ le crochet de dualité ;

$\mathcal{X} : = X^*(T)$ le réseau des caractères de T ;

$\mathcal{Y} : = X_*(T)$ le réseau des sous-groupes à un paramètre de T ;

Remarque : $\forall\, \lambda \in \mathcal{X},\ \forall\, \nu \in \mathcal{Y},\ \langle \lambda, \nu \rangle \in \mathbb{Z}$

$\alpha^\vee$ le sous-groupe à un paramètre de T tel que :

$$\forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ \forall\, \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \lambda(H_\alpha) \ ;$$

$\rho : = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$ et $\rho^\vee : = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha^\vee$ †;

$W : = N(T)/T$ le groupe de Weyl de G ;

$\forall\, w \in W,\ l(w) : = |\{\alpha \in \Phi^+ \ : \ w(\alpha) \in \Phi^-\}| = \dim BwB - \dim B$ la *longueur* de w ;

$w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur ;

$\leq$ l'ordre de Bruhat sur $W : \forall\, w, w' \in W, w \leq w'$ si $\overline{BwB} \subseteq \overline{Bw'B}$.

On écrira $w < w'$ si $w \leq w'$ et $w \neq w'$.

Comme au chapitre II, section II.2.1, on identifie $\mathcal{X}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$ et $\mathcal{Y}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{h}$.

Le groupe W agit sur T par conjugaison. Il en résulte une action de W sur $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$:

$$\forall\, w \in W, \forall\, H \in \mathfrak{h}, \forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ w.H = \mathrm{Ad}(w)(H) \text{ et } (w.\lambda)(H) = \lambda(w^{-1}.H) \ .$$

On note $*$ l'action «tordue» de W sur $\mathfrak{h}^*$:

$$\forall\, w \in W, \forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ w * \lambda : = w(\lambda + \rho) - \rho \ .$$

Si $\alpha \in \Phi$, la réflexion s_α est l'unique élément de W tel que :

$$\forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*, s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \ .$$

On pose aussi :

$\mathfrak{h}^{*+} : = \left\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \ : \ \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0\right\}$ l'ensemble des poids **DOMINANTS** ;

– $\forall\, \alpha \in \Phi,\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$;

– $\forall\, \alpha \in \Phi,\ \alpha(H_\alpha) = 2$.

† On a : $\forall\, \alpha \in \Delta,\ \langle \rho, \alpha^\vee \rangle = \langle \alpha, \rho^\vee \rangle = 1$

$\mathfrak{h}^{*++} :=\big\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \;:\; \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0\big\}$ l'ensemble des poids **DOMINANTS RÉGULIERS** ;

$\mathcal{X}^+ := \mathcal{X} \cap \mathfrak{h}^{*+}$ et $\mathcal{X}^{++} := \mathcal{X} \cap \mathfrak{h}^{*++}$;

$P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \;:\; \forall\, \alpha \in \Phi, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des poids **ENTIERS** ;

$P^+ := P \cap \mathfrak{h}^{*+}$;

$P^{++} := P \cap \mathfrak{h}^{*++}$;

$Q^+ := \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{N}.\alpha$.

De Q^+, provient une relation d'ordre partiel sur $\mathfrak{h}^*$; on pose :

$$\lambda \leq \mu \text{ si } \mu - \lambda \in Q^+ \quad (\forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*) \ .$$

Soient aussi :

$\mathcal{Y}^+ := \{\nu \in \mathcal{Y} \;:\; \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \alpha, \nu \rangle \geq 0\}$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre dominants ;

$\mathcal{Y}^- := -\mathcal{Y}^+$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre antidominants ;

$\mathcal{Y}^{++} := \{\nu \in \mathcal{Y} \;:\; \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \alpha, \nu \rangle > 0\}$

Pour un sous-groupe à un paramètre ν, on notera $\nu > 0$, respectivement $\nu < 0$, la propriété $\nu \in \mathcal{Y}^{++}$, respectivement $-\nu \in \mathcal{Y}^{++}$.

$U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante † de $\mathfrak{g}$;

$Z(\mathfrak{g})$ son centre ;

$Z(\mathfrak{g})' := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-\mathrm{alg}}(\mathbb{Z}(\mathfrak{g}), \mathbb{K})$ l'ensemble des **CARACTÈRES CENTRAUX** ;

$M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} \mathbb{K}_\lambda$ le **MODULE DE VERMA** de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ‡.

Les modules de Verma sont des exemples de $\mathfrak{g}-$modules admissibles (en tant que $\mathfrak{h}-$modules) (*cf.* la page 26).

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a :

$$[M(\lambda)] = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Phi^+}(1 - e^{-\alpha})}$$

(*cf.* [Di, prop. 7.5.7]).

On notera aussi :

$L(\lambda)$ le $\mathfrak{g}-$module simple de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$;

χ_λ le caractère central de $M(\lambda)$ (et de $L(\lambda)$) ;

$W\chi := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \;:\; \chi_\lambda = \chi\}$ $(\chi \in Z(\mathfrak{g})')$.

† Et plus généralement, $U(\mathfrak{a})$ sera l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$.

‡ $\mathbb{K}_\lambda$ est la droite $\mathbb{K}$ munie de l'action de $\mathfrak{b}$ définie ainsi :

$$\forall\, b \in \mathfrak{b}, \forall\, x \in \mathbb{K}, b.x := \lambda(b)x$$

avec $\lambda(b) = \lambda(h)$ si $b = h + n$ $(h \in \mathfrak{h}, n \in \mathfrak{n}^+)$.

Remarque : $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple de $M(\lambda)$ et si $\lambda \in \mathfrak{X}^+$, $L(\lambda)$ est un $G-$module (rationnel) : le $G-$module irréductible de plus haut poids λ.

On dira qu'un poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est **RÉGULIER** si $\forall\, \alpha \in \Phi, \langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ et **SINGULIER** sinon.

Dans ce cas, on désignera comme au chapitre II par $[M]$ le caractère de M.

Enfin, soit $\phi : G \to G$ l'unique automorphisme de G tel que

1° $\forall\, t \in T$, $\phi(t) = t^{-1}$;

2° $\forall\, \alpha \in \Phi$, $\varphi(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ où $\varphi :\, = d\phi_{|e} \,: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Apparaîtront des modules d'un type particulier :

III.1 Les $\mathfrak{g} - \mathrm{B}-$modules

Définition 7 *Soit M un $\mathfrak{g}-$module. On dit que M est un* $\mathfrak{g} - \mathbf{B}-$**MODULE** *si l'action de la sous-algèbre $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ dérive d'une action rationnelle de B sur M. Si M est finiment engendré en tant que $U(\mathfrak{g})-$module, on dit que c'est un $\mathfrak{g} - B-$module de* **TYPE FINI**.

EXEMPLE : Si $\lambda \in \mathfrak{X}$, alors le module de Verma $M(\lambda)$ est un $\mathfrak{g} - B-$module de type fini.

Les $\mathfrak{g} - B-$modules de type fini sont des $\mathfrak{g}-$modules réguliers au sens de [Di, §7.8.15]. En particulier, à isomorphisme près, les $\mathfrak{g} - B-$modules simples sont les

$$L(\lambda),\ \ \lambda \in \mathfrak{X}$$

(Cf. [Di, 7.1.11, 7.1.12 et exercice 7.8.15])

Remarque : Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, un sous-$\mathfrak{g}-$module d'un $\mathfrak{g} - B-$module est encore un $\mathfrak{g} - B-$module (*cf.* [Hu95, théorème 13.2]).

III.1.1 Caractères centraux

III.1.1.1 Espaces propres généralisés et décomposition des $\mathfrak{g}-B-$modules

On rappelle d'abord le :

Théorème III.1.1 (cf. [Di, proposition 7.4.7]) *$\chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow \lambda \in W * \mu$.*

Pour chaque $\mathfrak{g}-$module M et chaque caractère central χ, on définit des sous-$\mathfrak{g}-$modules :

$$M_\chi^{(k)} :\, =$$

$$\{m \in M \mid \forall\, z_1, \ldots, z_k \in Z(\mathfrak{g}),\ (z_1 - \chi(z_1)\mathrm{id}) \cdots (z_k - \chi(z_k)\mathrm{id}).m = 0\}$$

$$\text{et } M_\chi :\, = \bigcup_{k>0} M_\chi^{(k)}$$

L'ESPACE PROPRE GÉNÉRALISÉ associé à χ.

Si M est un $\mathfrak{g}-$module, on dira que M *admet un caractère central (respectivement un caractère central généralisé)* $\chi \in Z(\mathfrak{g})'$ si $M = M_\chi^{(1)}$ (respectivement $M = M_\chi$).

De même que les $T-$modules se décomposent en somme directe d'espaces propres pour les caractères de T, les $\mathfrak{g} - B-$modules se décomposent en somme directe d'espaces propres généralisés pour les caractères centraux de $\mathfrak{g}$:

Proposition III.1.2 i) *Pour tout $k > 0$, $M_\chi^{(k)} \subseteq M_\chi^{(k+1)}$ et on a :*

$$\sum_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi = \bigoplus_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi \ .$$

Si M est un $\mathfrak{g} - B-$ module ou si M admet un caractère alors :

ii)

$$M = \bigoplus_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi \ ;$$

iii) *Si M est de type fini comme $U(\mathfrak{g})-$module, alors M admet un caractère et une suite de Jordan-Hölder.*

On trouve l'énoncé dans [Di, exercice 7.8.15]. Cette proposition est démontrée dans [BGG] lorsque M est de type fini. Cette démonstration s'adapte sans difficultés au cas général, *cf.* la section C.1 en annexes. [Cf. exercice 7.8.15 de [Di] et [BGG]]

Le fait (ii) a pour conséquence que le foncteur :

$$M \mapsto M_\chi$$

est exact sur la catégorie des $\mathfrak{g} - B-$modules, autrement dit :

Si $M' \to M \to M''$ est une suite exacte de $\mathfrak{g} - B-$modules ou de $\mathfrak{g}-$modules ayant un caractère, alors pour chaque $\chi \in Z(\mathfrak{g})'$, la suite $M'_\chi \to M_\chi \to M''_\chi$ est aussi exacte.

La proposition suivante est évidente :

Proposition III.1.3 *Si M est un $\mathfrak{g}-$module ayant une suite de Jordan-Hölder, alors*† *:*

$$[M_\chi : L(\lambda)] = 0 \text{ si } \chi_\lambda \neq \chi \ .$$

Si M est un $\mathfrak{g} - B-$module dont toutes les composantes M_χ $(\chi \in Z(\mathfrak{g})')$ sont de longueur finie, on notera

$$[M : L]$$

la multiplicité de tout $\mathfrak{g}-$module simple L dans M_χ où χ est le caractère central de L.

Proposition III.1.4 *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathfrak{g} - B-$modules, alors sont équivalentes :*

i) Pour tout χ, M_χ est de longueur finie ;

ii) Pour tout χ, M'_χ et M''_χ sont de longueur finie.

Dans ces conditions, on a $[M' : L] + [M'' : L] = [M : L]$ pour tout $\mathfrak{g}-$module simple L.

Remarque : Les conditions de cette proposition sont vérifiées si par exemple M est admissible (*cf.* [Di, §7.6.1]).

† Si M est un $\mathfrak{g}-$module qui a une suite de Jordan-Hölder, on notera $[M : L]$ la multiplicité d'un $\mathfrak{g}-$module simple L dans M.

III.1.1.2 Caractères des espaces propres généralisés

En général, il est difficile de déterminer les composantes M_χ de M (par exemple de calculer leur caractère). Mais si M est admissible et si on sait exprimer le caractère de M comme une « combinaison linéaire » de caractères de modules de Verma, on aura le caractère de M_χ en ne gardant dans cette combinaison que les modules de Verma de plus haut poids dans $W\chi$. En effet :

Proposition III.1.5 *Soit E une partie d'une réunion finie d'ensembles de la forme $\nu - Q^+$ ($\nu \in \mathfrak{h}^*$).*

Alors, pour toute famille d'entiers $(n_\lambda)_{\lambda \in E}$, le caractère (formel) :

$$\sum_{\lambda \in E} n_\lambda [M(\lambda)]$$

est défini.

De plus, si M est un $\mathfrak{g} - B-$module admettant un caractère de la forme :

$$[M] = \sum_{\lambda \in E} n_\lambda [M(\lambda)] \ ,$$

alors pour tout caractère central χ de $\mathfrak{g}$, le $\mathfrak{g}-$module M_χ a pour caractère :

$$[M_\chi] = \sum_{\lambda \in E \cap W\chi} n_\lambda [M(\lambda)]$$

où $W\chi : = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \ : \ \chi_\lambda = \chi\}$.

Remarque :

Supposons que M est un $\mathfrak{g} - B-$module dont le support du caractère vérifie la même condition que E ci-dessus. Alors le caractère de M s'écrit :

$$[M] = \sum_{\lambda \in \mathrm{supp}[M]} n_\lambda [M(\lambda)]$$

avec pour tout λ, $n_\lambda = \left((\prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha})) \cdot [M] \right) (\lambda)$.

Démonstration : Pour justifier que le caractère

$$\sum_{\lambda \in E} n_\lambda [M(\lambda)]$$

est défini, il suffit de montrer que pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, l'ensemble :

$$\{\lambda \in E \ : \ [M(\lambda)](\mu) > 0\}$$

est fini. Compte tenu de la condition sur le support de $[M]$, il suffit de vérifier que :

$$\{\lambda \in \nu - Q^+ \ : \ [M(\lambda)](\mu) > 0\}$$

est fini.

Or :

– $[M(\lambda)](\mu) \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \lambda$ (*cf.* [Di, proposition 7.1.8.ii]) ;

– si $q \in Q^+$, $\mu \leq \nu - q \Leftrightarrow q \leq \nu - \mu$;

– $\forall\, \xi \in \mathfrak{h}^*$, $\{q \in Q^+ \,:\, q \leq \xi\}$ est un ensemble fini (*cf.* [Di, Chapitre 7]).

Cela démontre la première partie de la proposition.

Soient $\nu_1, \ldots, \nu_f \in \mathfrak{h}^*$ et F la réunion des ensembles $\nu_i - Q^+$.

On suppose que $E \subseteq F$. En particulier, $\mathrm{supp}[M] \subseteq F$. Soit χ un caractère central.

Le $\mathfrak{g}-$module M_χ est de longueur finie d'après la proposition III.1.4 ; donc, le caractère $[M_\chi]$ est une combinaison linéaire finie des caractères $[L(\lambda)]$ où λ décrit l'ensemble fini $W\chi$. Puisque M_χ est un sous-$\mathfrak{g}-$module de M, on peut se restreindre aux $\lambda \in W\chi$ qui sont inférieurs (selon l'ordre $\leq$) à un poids $\mu \in \mathrm{supp}[M]$.

Mais, les $[L(\lambda)]$ s'expriment, à leur tour, en fonction des $[M(\nu)]$ avec $\nu \in W\chi$ et $\nu \leq \lambda$ (*cf.* [Ke78, théorème 12.9]). Il existe donc une famille d'entiers $(n'_{\chi,\lambda})_{\lambda \in W\chi}$ tels que :

$$[M_\chi] = \sum_{\lambda \in W\chi} n'_{\chi,\lambda}[M(\lambda)]$$

et $n'_{\chi,\lambda} \neq 0$ seulement si λ est inférieur à un poids de M. A fortiori, les λ pour lesquels $n'_{\chi,\lambda} \neq 0$ appartiennent à F.

Or :

$$\begin{aligned}[M] &= [\bigoplus_\chi M_\chi] \\ &= \sum_\chi \sum_{\lambda \in W\chi} n'_{\chi,\lambda}[M(\lambda)] \\ &= \sum_{\lambda \in F} n'_{\chi_\lambda,\lambda}[M(\lambda)] = \sum_{\lambda \in F} n_\lambda [M(\lambda)] \ .\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{\sum_{\lambda \in F} n'_{\chi_\lambda,\lambda} e^\lambda}{\prod_{\alpha>0}(1-e^\alpha)} = \frac{\sum_{\lambda \in F} n_\lambda e^\lambda}{\prod_{\alpha>0}(1-e^\alpha)}$$

(*cf.* la section II.2.2 sur le produit de caractères), d'où :

$$\forall\, \lambda \in F,\ n'_{\chi_\lambda,\lambda} = n_\lambda \ .$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}[M_\chi] &= \sum_{\lambda \in W\chi} n'_{\chi,\lambda}[M(\lambda)] \\ &= \sum_{\lambda \in W\chi} n'_{\chi_\lambda,\lambda}[M(\lambda)] \\ &= \sum_{\lambda \in E \cap W\chi} n_\lambda [M(\lambda)]\end{aligned}$$

Q.e.d.

* * *

Dual restreint

Si M est un $\mathfrak{g}-$module qui admet un caractère, en général, le dual usuel de M n'est pas admissible. Aussi à l'aide de l'endomorphisme ϕ vu en page 54, on définit un autre dual M^*, le **DUAL RESTREINT** de M :

1º on munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ d'une structure de $\mathfrak{g}-$module définie par

$$\forall\, X \in \mathfrak{g},\, \forall\, \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K}),\ X.\lambda :\ = -\lambda(\varphi(X).\,—)\ ;$$

2º on note M^* le sous-$\mathfrak{g}-$module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ défini par :

$$M^* :\ = \{\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})\ :\ U(\mathfrak{h}).\lambda \text{ est de dimension finie sur } \mathbb{K}\}\ .$$

Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, on retrouve le dual restreint défini en section II.2.1. Si $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$, alors $M^* = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M_\lambda, \mathbb{K})$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur M^* est telle que $(M^*)_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M_\lambda, \mathbb{K})$ si bien que M^* admet le même caractère que M.

Proposition III.1.6 ([AL]) *Si M est un $\mathfrak{g} - B-$module admissible, alors M^* aussi.*

Une famille importante (au moins pour la suite de ce texte) de $\mathfrak{g} - B-$modules est constituée par :

III.1.2 Les modules de Verma tordus, d'après [FF] et [AL]

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on note $M^w(\lambda)$ le **MODULE DE VERMA $w-$TORDU** de plus haut poids λ. C'est un $\mathfrak{g} - B-$module de type fini, de plus haut poids λ qui est $U(w(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{n}^-)-$libre et dont le dual restreint est $U(w(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{n})-$libre †.

Remarque : $M^w(\lambda) :\ =$ le module $\mathcal{M}^{ww_0}(\lambda)$ de [AL, p. 13].

De plus, $M^w(\lambda)$ admet χ_λ comme caractère central et a le même caractère que $M(\lambda)$:

$$[M^w(\lambda)] = [M(\lambda)] = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Phi^+}(1 - e^{-\alpha})}\ .$$

En particulier :

$$M^1(\lambda) = M(\lambda)^* \text{ et } M^{w_0}(\lambda) = M(\lambda)$$

et plus généralement, les sous-quotients simples de $M^w(\lambda)$ et de $M(\lambda)$ sont les mêmes et apparaissent avec la même multiplicité (*cf.* le §2.2 de [FF]). Donc, si μ est un poids dominant :

$$\text{(III.1)}\qquad [M^w(\lambda) : L(\mu)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} [M^w(\lambda) : L(\mu)] = [M(\lambda) : L(\mu)] > 0 \\ \Rightarrow \mu \le \lambda \text{ et } \chi_\mu = \chi_\lambda \\ \Rightarrow \mu \le \lambda \text{ et } \mu \in W * \lambda\ . \end{aligned}$$

Or, si μ est dominant, alors :

$$\forall\, w \in W,\ w(\mu + \rho) \le \mu + \rho \ \textit{c-à-d}\ \ w * \mu \le \mu\ .$$

Ainsi, $\lambda \le \mu$ et finalement, $\lambda = \mu$.

† où l'on note $w(\mathfrak{n})$ l'algèbre de Lie du groupe wUw^{-1}.

III.1.3 Suite de composition

Au chapitre suivant, on aura besoin de calculer des caractères de certains $\mathfrak{g}-B-$modules. On utilisera pour cela, et surtout pour obtenir des expressions en fonction des caractères des modules de Verma, des filtrations «en forme de $w-$drapeau».

Définition 8 *Soit $w \in W$. Si V est un $\mathfrak{g}-B-$module et si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ est un ensemble de caractères, on dit que V admet un* **w−DRAPEAU DE TYPE** $\mathcal{D}$ *s'il existe une suite de composition de V :*

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_N \supseteq V_{N+1} = (0)$$

telle que

1° chaque quotient V_i/V_{i+1} $(0 \leq i \leq N)$ est isomorphe à $M^w(\nu)$ pour un $\nu \in \mathcal{D}$;

2° pour chaque $\nu \in \mathcal{D}$, il y a un et un seul entier i pour lequel $M^w(\nu) \simeq V_i/V_{i+1}$.

On conviendra que (0) est le seul $\mathfrak{g}-B-$module qui admette un $w-$drapeau de type $\emptyset$.

Il résulte de la définition précédente qu'un $\mathfrak{g}-B-$module, V, qui possède un $w-$drapeau de type $\mathcal{Y}$ est de type fini et a pour caractère :

$$[V] = \sum_{\nu \in \mathcal{D}} [M(\nu)] \ .$$

La proposition suivante est immédiate :

Proposition III.1.7 *Soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte de $\mathfrak{g}-B-$module. Si V' et V'' admettent un $w-$drapeau respectivement de type $\mathcal{D}'$ et de type $\mathcal{D}''$ où $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont deux ensembles disjoints de caractères, alors :*

$$V \text{ admet un } w-\text{drapeau de type } \mathcal{D}' \bigcup \mathcal{D}''.$$

III.2 Faisceaux linéarisés

Soit K un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{K}$ son algèbre de Lie.

III.2.1 Définition

Soit X une variété algébrique munie d'une action à gauche (algébrique) de K :

$$\sigma : \begin{cases} K \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g.x \end{cases} .$$

Cette action induit des isomorphismes d'anneaux :

$$\sigma(g,.)^\sharp : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(g^{-1}U)$$

$(\forall\, g \in K, \forall\, U$ ouvert de $X)$. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ est un exemple de $K-$faisceau. Kempf a donné dans [Ke78, §I.1] la définition générale des $K-$faisceaux quasi cohérents :

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi cohérent sur X, on lui associe une fibration

$$\pi : F \to X$$

qui est un morphisme affine de schémas tel que :

$$\pi_* \mathcal{O}_F = S^* \mathcal{F} = \bigoplus_{k \geq 0} S^k \mathcal{F}$$

l'algèbre symétrique de $\mathcal{F}$ (*cf.* [Ha97, ex. II.5.17]). Une telle fibration est unique (à isomorphisme de schémas sur X près), on dit que c'est le **SPECTRE RELATIF** de l'algèbre symétrique de $\mathcal{F}$ sur X et on le note :

$$F = \mathrm{Spec}_X S^* \mathcal{F} \ .$$

Remarque : Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau inversible, F est un fibré en droites et tous les fibrés en droites sur X s'obtiennent ainsi (*cf.* [Ha97, ex. II.5.18]).

Définition 9 *On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau **$K-$LINÉARISÉ**, ou un **$K-$FAISCEAU**, s'il existe une action à gauche (algébrique) de K sur $F = \mathrm{Spec}_X S^* \mathcal{F}$:*

$$\sigma' : K \times F \to F$$

– *qui rende π $K-$équivariant, c-à-d que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} K \times F \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_K \times \pi"] & F \arrow[d, "\pi"] \\ K \times X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

commute ;

et

– *qui soit «linéaire dans les fibres», c-à-d que pour tout $g \in K$, les isomorphismes*

$$\sigma'(g, .) : F \to F$$

sont induits par des isomorphismes de $\mathcal{O}_X(U)-$modules :

$$(*) \ \mathcal{F}(U) \stackrel{\simeq}{\to} \mathcal{F}(g^{-1}U)$$

(où l'on considère $\mathcal{F}(g^{-1}U)$ comme un $\mathcal{O}_X(U)-$module via l'isomorphisme $\sigma(g, .)^\sharp : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(g^{-1}U)$).

Remarque : Une autre définition (équivalente) des $K-$faisceaux est celle de Mumford : si $p_X : K \times X \to X$ est la projection canonique sur X, alors $\mathcal{F}$ est $K-$linéarisé s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_{K \times X}-$modules

$$\phi : \sigma^* \mathcal{F} \simeq p_X^* \mathcal{F}$$

qui vérifie les conditions de cocycle de [Mu, 3, définition 1.6].

EXEMPLE : Si X est une $K-$variété normale et si D est un diviseur de Weil $K-$invariant (combinaison linéaire de diviseurs premiers $K-$invariants), alors le faisceau cohérent associé $\mathcal{O}_X(D)$ est un $K-$faisceau.

Les produits tensoriels, extérieurs, symétriques et les restrictions à des sous-variétés $K-$invariantes (et en particulier à des points fixes pour K) de faisceaux $K-$linéarisés sont encore $K-$linéarisés.

Étant donné un faisceau $K-$linéarisé sur X, on a d'après $(*)$ des isomorphismes :

$$T_{g,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(gU)$$

pour tout $g \in K$ et tout U ouvert de X.

On en déduit :

Proposition III.2.1 *Pour tout $g \in K$ et tout $x \in X$, il existe des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules*† *:*

$$T_{g,x} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{g.x}$$

tels que

1° $\forall\, g, g' \in K,\ \forall\, x \in X,\ T_{g',g.x} \circ T_{g,x} = T_{g'g,x}$;

2° $\forall\, x \in X,\ T_{1,x} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_x}$.

Démonstration : Il suffit de poser :

$$T_{g,x} : = \varinjlim_{U \ni x} T_{g,U} \ .$$

Le fait que $\sigma' : K \times F \to F$ soit une action (à gauche) entraîne les conditions 1° et 2° . De plus, en raison de 1° et 2° , chaque morphisme $T_{g,x}$ est un isomorphisme d'inverse $T_{g^{-1},g.x}$. **Q.e.d.**

Lorsque K laisse l'ouvert U stable, les isomorphismes $T_{g,U}$ font de $\mathcal{F}(U)$ un $K-$module rationnel. Mais, en général, si U est un ouvert quelconque de X, $\mathcal{F}(U)$ n'est pas un $K-$module. Néanmoins, on va voir qu'il subsiste une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$.

III.2.2 Action de l'algèbre de Lie sur les groupes de cohomologie

On note encore $\mathcal{F}$ un faisceau $K-$linéarisé sur X.

Kempf a montré dans [Ke78] :

Théorème III.2.2 ([Ke78, Lemmes 11.1 et 11.3, théorème 11.6]) *(cf. aussi [Ku, lemme 2.11])*

Pour des fermés $Z' \subseteq Z$ de X les groupes de cohomologie à support (cf. la section I.1) $H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F})$ sont «naturellement» des $\mathfrak{K}-$modules et pour cette structure, on a :

1° *si $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est un morphisme de $K-faisceaux$, alors les morphismes*

$$H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F}) \to H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F}')$$

sont des morphismes de $\mathfrak{K}-$modules ;

† $\mathcal{O}_{X,x}$ opère sur $\mathcal{F}_{g.x}$ via l'isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{X,g.x}$ induit par $\sigma(g,.)$

2° *le complexe du lemme de Grothendieck I.1.3 et par conséquent les morphismes de la suite spectrale de Grothendieck-Cousin (cf. le théorème I.3.1) sont des morphismes de $\mathfrak{K}-$modules ;*

3° *si $\mathbb{K}[X]$ est l'anneau des fonctions régulières sur X, alors les morphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F}) \\ f \otimes m & \longmapsto & f.m \end{array}$$

sont des morphismes de $\mathfrak{K}-$modules.

4° *Si Z et Z' sont $K-$invariants, alors l'action de $\mathfrak{K}$ sur les $H^*_{Z/Z'}(\mathcal{F})$ dérive d'une action rationnelle (algébrique) de K et les faisceaux $\mathscr{H}^*_{Z/Z'}(\mathcal{F})$ sont $K-$linéarisés.*

Dans le paragraphe qui suit, on rappelle la paramétrisation par des caractères des faisceaux inversibles et linéarisés sur un espace homogène.

III.2.3 Espaces homogènes

Soient H un sous-groupe fermé de K, K/H le quotient muni de sa structure de variété algébrique et $p : K \to K/H$ la surjection canonique (*cf.* [Ja] et [Sp81]). Pour l'action à gauche de K, K/H est une $K-$variété.

Soit $\nu : H \to \mathbb{K}^*$ un caractère de H. On note $\mathbb{K}_\nu$ la droite affine $\mathbb{K}$ munie de l'action de H via ν.

On peut alors définir une relation d'équivalence sur $K \times \mathbb{K}_\nu$ (*cf.* [Ja] et [KKLV, exemple §2.1] :

$$\forall\, g \in K, \forall\, a \in \mathbb{K}_\nu, \forall\, h \in H,\ (g,a) \sim (gh, h^{-1}.a)\ .$$

D'après [Ja], le quotient $K \times \mathbb{K}_\nu / \sim$ est une $K-$variété algébrique (pour l'action de K à gauche sur K et triviale sur $\mathbb{K}_\nu$. On la notera :

$$K \times_H \mathbb{K}_\nu \ \ (\text{ou } L_{K/H}(\nu))\ .$$

On a également une surjection $K-$équivariante:

$$\pi : K \times_H \mathbb{K}_\nu \to K/H$$

qui envoie la classe d'un couple (g,a) sur gH. C'est en fait une fibration et même un fibré en droites. Le faisceau associé est donc un faisceau inversible $K-$linéarisé sur K/H : c'est le faisceau

$$\mathscr{L}_{K/H}(\nu)$$

tel que pour tout ouvert V de K/H, $\mathscr{L}_{K/H}(\nu)(V)$ est l'ensemble des applications régulières

$$f : p^{-1}(V) \to \mathbb{K}$$

vérifiant :

$$\forall\, v \in p^{-1}(V), \forall\, h \in H,\ f(vh) = \nu^{-1}(h) f(v)\ .$$

Proposition III.2.3 ([KKLV, exemple §2.1]) *En le point $H \in K/H$, la fibre $\mathscr{L}_{K/H}(\nu)|_H$ est une droite dans laquelle H opère par le poids ν. Réciproquement, si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible, $K-$linéarisé sur K/H, alors $\mathscr{L}$ est isomorphe (en tant que faisceau $K-$linéarisé) à $\mathscr{L}_{K/H}(\nu)$ où ν est le poids de la droite ($H-$équivariante) $\mathscr{L}|_H$.*

III.3 Cas des variétés de drapeaux et théorème de Borel-Weil-Bott

On revient aux notations du début du chapitre.

Soit $X :\ = G/B^-$ une variété de drapeaux. Si $\lambda \in \mathcal{X}$, λ se prolonge de manière unique en un caractère de B^- (de valeur 1 sur U^-) que l'on appellera encore λ. On considérera le faisceau inversible et $G-$linéarisé $\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)$ (*cf.* la section III.2.3).

III.3.1 Cohomologie à support dans les $B-$orbites

D'après la décomposition de Bruhat :

$$G/B^- = \bigsqcup_{w \in W} BwB^-/B^- \ .$$

Les $B-$orbites sont des sous-variétés localement fermées et lisses de X. On peut donc former les groupes de cohomologie à support

$$H^k_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) \ .$$

D'après le théorème I.4.1, ils sont nuls sauf (éventuellement) en degré

$$k = \operatorname{codim}(BwB^-/B^-, G/B^-) = l(w) \ .$$

D'après le théorème III.2.2, ce sont des $\mathfrak{g} - B-$modules et on a :

Théorème III.3.1 *(***[Ke78, lemme 12.8], [Br, prop. 7 et rem. p.55] et [FF, §2, p. 165]***)*

1° $H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$ est un $\mathfrak{g} - B-$module de type fini, de caractère central χ_λ et de caractère :

$$\left[H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))\right] = \frac{e^{w*\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-\alpha})} = [M(w*\lambda)] \ .$$

2° Si G est semi-simple,

$$H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) \simeq M^w(w*\lambda)$$

en tant que $\mathfrak{g} - B-$modules.

Remarque : Pour démontrer le 1° , il suffit d'appliquer la formule du théorème II.3.2. En effet, comme dans l'exemple page 32, on vérifie que BwB^-/B^- est une cellule de Bialynicki-Birula associée au point wB^- et à un sous-groupe à un paramètre > 0. On utilise aussi que :

$$\mathcal{P}(T_{wB^-}G/B^-) = w.\mathcal{P}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}^-) = \{w(\alpha) \ : \ \alpha > 0\}$$

et que le poids de la droite $\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)|_{wB^-}$ est $w.\lambda$.

Pour la suite, on posera

$$\forall\, w \in W, \forall\, \mu \in \mathcal{X},\ M^w(\mu) :\ = H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(w^{-1} * \mu))$$

(même si G est réductif sans être semisimple) et on dira que $M^w(\mu)$ est le *module de Verma $w-$tordu de plus haut poids μ.*

On déduit du 1° que le $\mathfrak{g}-B-$module $H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$ admet une suite de Jordan-Hölder et comme son caractère est celui de $M(w*\lambda)$, il en a la suite de Jordan-Hölder (à permutation près des termes). En particulier si μ est un poids dominant :

$$\text{(III.2)} \qquad \left[H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) : L(\mu)\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = w*\lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(*cf.* le paragraphe III.1.2).

A partir de cette description des groupes de cohomologie à support dans les $B-$orbites, on peut retrouver le :

III.3.2 Théorème de Borel-Weil-Bott

Les groupes de cohomologie $H^i(G/B^-, \mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$ sont des $G-$modules et leur description est contenue dans le théorème suivant :

Théorème III.3.2 (Borel-Weil-Bott)

$$H^i(G/B^-, \mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda+\rho \text{ est singulier ou si } i \neq l(w_\lambda) \\ L(w_\lambda * \lambda) \text{ sinon ,} \end{cases}$$

où lorsque $\lambda+\rho$ est régulier, w_λ est l'unique élément de W pour lequel $w_\lambda*\lambda$ est dominant.

Remarque : Si G est semi-simple et simplement connexe, tout fibré en droites (ou faisceau inversible) est isomorphe à un unique $\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)$ (*cf.* [A81]). Donc ce théorème détermine tous les groupes de cohomologie de tous les fibrés en droites sur G/B^-.

Démonstration : On applique le théorème de Grothendieck-Cousin à $\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)$ et à la filtration

$$G/B^- = \bigcup_{p\geq 0} Z_p$$

où pour tout $p \geq 0$, $Z_p := \bigcup_{w\,:\,l(w)\geq p} BwB^-/B^-$ est la réunion des $B-$orbites de codimension $\geq p$.

Comme $Z_p - Z_{p+1}$ est union disjointe d'ouverts : les orbites de codimension p, on a :

$$H^{p+q}_{Z_p\setminus Z_{p+1}}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) = \bigoplus_{w\,:\,l(w)=p} H^{p+q}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) = (0) \text{ si } q \neq 0$$

et la suite spectrale de Grothendieck-Cousin (théorème I.3.1) dégénère au rang 2 :

$$H^k(G/B^-, \mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$$

est le $k-$ième groupe d'homologie du complexe :

$$\mathcal{GC}^* \quad : \ldots \to \bigoplus_{l(w)=p} H^p_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda)) \to \ldots$$

Or, $H^k(G/B^-, \mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$ est un $G-$module (de dimension finie) ; il suffit donc de calculer ses multiplicités selon les $\mathfrak{g}-$modules simples de plus haut poids $\mu \in \mathcal{X}^+$. On peut même se contenter des plus hauts poids

$$\mu \in \mathcal{X}^+ \cap W_{\chi_\lambda}$$

car les termes du complexe $\mathcal{GC}^*$ ayant tous χ_λ comme caractère central, il en est de même pour $H^k(G/B^-, \mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$ et pour ses sous-quotients simples.

Mais d'après III.2 (à la fin de la section précédente), les seuls termes du complexe de Grothendieck-Cousin ayant une multiplicité non nulle en un poids $\mu \in \mathcal{X}^+ \cap W_{\chi_\lambda}$ sont les

$$H^k_{BwB^-/B^-}(\mathscr{L}_{G/B^-}(\lambda))$$

avec $w * \lambda = \mu$ (et $l(w) = k$). Comme dans ce cas la multiplicité est 1 et puisqu'il existe au plus un tel $w \in W$ et au plus un seul $\mu \in \mathcal{X}^+ \cap W_{\chi_\lambda}$, on trouve le résultat annoncé.

Q.e.d.

Le point important de cette démonstration a été l'étude des multiplicités des termes du complexe de Grothendieck-Cousin.

On généralisera cette méthode au chapitre V pour déterminer les groupes de cohomologie des faisceaux inversibles sur d'autres $G-$variétés : les compactifications de groupes réductifs.

Avant cela, on va s'intéresser au cas du faisceau structural $\mathscr{O}_G$:

III.4 Cohomologie à support du faisceau structural de G

Les caractères des $\mathfrak{g}-$modules $H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(\mathscr{O}_{G/B^-})$ sont bien connus, en revanche, les $H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$ n'ont en général pas de caractères comme $T \times T-$modules.

D'après les paragraphes précédents, ce sont des $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - B \times B^-$$-$modules car G est une $G \times G-$variété (pour les actions par multiplications à gauche et à droite de G sur lui-même). Il sont nuls sauf (éventuellement) en degré $i = l(w)$ la codimension de BwB^- dans G, car BwB^- est une sous-variété affine, lisse de G (*cf.* le théorème I.4.1). On sait aussi que ces groupes font partie d'une résolution de $\mathbb{K}[G]$, l'algèbre des fonctions régulières de G :

Lemme III.4.1 *La suite*

$$0 \to \mathbb{K}[G] \to \ldots \to \bigoplus_{w\,:\,l(w)=i} H^i_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \to \ldots \to H^{l(w_0)}_{w_0B^-}(\mathscr{O}_G) \to 0$$

est exacte.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de Grothendieck-Cousin à la filtration

$$\bigcup_{p\geq 0} Z_p$$

avec $Z_p = \bigcup_{w\,:\,l(w)\geq p} BwB^-$, pour obtenir le complexe ci-dessus. On a affaire à une suite exacte car puisque G est affine :

$$\forall\, i > 0,\ H^i(G, \mathscr{O}_G) = 0\ .$$

Q.e.d.

A priori, les $H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$ ne sont pas de type fini en tant que $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-$modules (a posteriori non plus selon le chapitre suivant). Ils le sont néanmoins en tant que modules sur l'algèbres des opérateurs différentiels d'ordre fini de G, $\mathcal{D}(G)$ comme on pourra le déduire du théorème démontré dans cette section

III.4.1 Formule de récurrence

Pour la structure de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-$module de :

$$H^0_{BB^-}(\mathscr{O}_G) = \mathbb{K}[BB^-]\ ,$$

cf. le chapitre V et la proposition V.3.7 (page 124) où l'on fait appel à une compactification de G. On y montrera que ses espaces propres généralisés ont une filtration finie avec gradué associé une somme directe de duaux de modules de Verma (pour $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$). Je n'ai pas de réponse par une approche directe.

On peut exprimer les groupes de cohomologie à support

$$H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$$

en fonction des groupes « qui précèdent », *c-à-d* les :

$$H^{l(w')}_{Bw'B^-}(\mathscr{O}_G)$$

avec $w' < w$.

Pour cela on introduit la notion suivante :

Définition 10 *Étant donnés deux $\mathfrak{g}-$modules $N\subseteq M$ et un sous-groupe fermé H de G, on dit que N est un* SOUS-$H-$MODULE RATIONNEL *de M si N est un $H-$module rationnel et si les deux actions de l'algèbre de Lie de H : par restriction de celle de $\mathfrak{g}$ et par dérivation de celle du groupe H, coïncident.*

La somme des sous-$H-$modules rationnels de M est encore un sous-module rationnel : il s'agit du PLUS GRAND SOUS-H-MODULE RATIONNEL *de M. On le notera :*

$$(M)_{H-\mathrm{rat}}\ .$$

Pour toute racine simple $\alpha\in\Delta$, on introduit le sous-groupe parabolique minimal engendré par B et s_α (ou par B et $U_{-\alpha}$). Rappelons que $P_\alpha = B\sqcup Bs_\alpha B$ et que plus généralement :

Proposition III.4.2 ([Hu95, lemmes A, C du §29.3]) *Soit $\alpha\in\Delta$. Si $w,\tau\in W$ vérifient :*

$$w = s_\alpha\tau \text{ avec } l(w) = l(\tau)+1\ ,$$

alors :

$$P_\alpha \tau B^- = BwB^- \sqcup B\tau B^- \ .$$

C'est une réunion de deux $B \times B^-$−orbites, l'une, BwB^-, fermée et l'autre, $B\tau B^-$, ouverte (dans $P_\alpha \tau B^-$).

Avec ces notations, on a :

Théorème III.4.3 *Soient $w, \tau \in W$ tels que $w = s_\alpha \tau$ pour une racine simple $\alpha \in \Delta$ et $l(w) > l(\tau)$.*

Pour l'action de P_α à gauche (c-à-d celle de $P_\alpha \times \{1\}$ vu comme sous-groupe de $G \times G$),

$$\left(H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)\right)_{P_\alpha-\mathrm{rat}}$$

est un sous-module de $H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ pour les actions de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et de $\mathbb{K}[G]$ et on a :

$$H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \simeq H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) / \left(H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)\right)_{P_\alpha-\mathrm{rat}}$$

(en tant que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et $\mathbb{K}[G]$−modules).

Remarque : On va au passage démontrer que :

$$(H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G))_{P_\alpha\text{-rat}} = H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \ .$$

III.4.2 Démonstration du théorème

Soient w, τ comme dans le théorème.

1−ière étape

On va d'abord montrer que

$$H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) / H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) = H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$$

puis que $H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ est le plus grand sous-P_α−module rationnel de :

$$H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \ .$$

On aura pour cela besoin de la proposition suivante :

Proposition III.4.4 *Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. Pour tout $w \in W$, la variété PwB est affine.*

Démonstration : Comme $PwB \simeq PwBw^{-1}$, il suffit de démontrer que $PwBw^{-1}$ est affine.

Soient $R_u(P)$ le radical unipotent de P et $R_u(P)^-$ le sous-groupe unipotent opposé. On a :

$$\begin{aligned} PwBw^{-1} &= PwUw^{-1} = P.(wUw^{-1} \cap R_u(P)) \\ &\simeq P \times w(U) \cap R_u(P)^- \end{aligned}$$

comme $T-$variété algébrique.

Or P et $w(U) \cap R_u(P)^-$ sont affines, d'où le résultat. **Q.e.d.**

Lemme III.4.5 *On a une suite exacte de* $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{K}[G])-$*modules :*

$$0 \to H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \overset{j(G)}{\to} H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \overset{q(G)}{\to} H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \to 0$$

Démonstration : $P_\alpha \tau B^-$, $B\tau B^-$ et BwB^- sont localement fermés dans G car ce sont des orbites (pour $P_\alpha \times B^-$ ou $B \times B^-$). On peut donc former les groupes de cohomologie à support dans ces sous-variétés. A cause des hypothèses sur w et τ et de la proposition III.4.2, si on pose :

$$Z_1 : = \overline{P_\alpha \tau B^-} = \overline{B\tau B^-}\ ,\ Z_2 : = \overline{BwB^-}$$

$$\text{et } Z_3 : = \partial P_\alpha \tau B^- (: = \overline{P_\alpha \tau B^-} \setminus P_\alpha \tau B^-)\ ,$$

alors sont vérifiées :

$$Z_1 \setminus Z_3 = P_\alpha \tau B^-, Z_1 \setminus Z_2 = B\tau B^-, Z_2 \setminus Z_3 = BwB^-\ .$$

Après avoir appliqué le lemme de Grothendieck I.1.3 à $\mathscr{O}_G$ et aux fermés $Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$, on obtient une suite exacte longue :

$$(*)\quad \ldots \to H^i_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to H^i_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to H^{i+1}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \to \ldots$$

Or, $P_\alpha \tau B^-, B\tau B^-, BwB^-$ sont des variétés lisses (car ce sont des orbites) et affines (pour $P_\alpha \tau B^-$ *cf.* la proposition III.4.4). Donc d'après le théorème I.4.1,

$$H^i_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) = H^i_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) = H^{i+1}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) = (0)$$

si $i \neq l(\tau) = \mathrm{codim}(B\tau B^-, G)$.

On tire donc de $(*)$ une suite exacte courte :

$$0 \to H^i_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to H^i_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to H^{i+1}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \to 0$$

C'est une suite de $\mathbb{K}[G]-$modules et aussi de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}-$modules d'après le théorème III.2.2. **Q.e.d.**

Si on note

$$j : \mathscr{H}^i_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to \mathscr{H}^i_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$$

et

$$q : \mathscr{H}^i_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \to \mathscr{H}^{i+1}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$$

les morphismes correspondants pour la cohomologie locale, l'inclusion et la surjection du lemme sont respectivement $j(G)$ et $q(G)$.

* * *

2−ième étape

En tenant compte de la première étape, il ne reste plus qu'à montrer que $H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ est le plus grand sous-P_α−module rationnel de $H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$.

Si K est un groupe algébrique et si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est une K−variété algébrique affine, on dira qu'un A−module M est G−*linéarisé* si le faisceau quasi cohérent $\widetilde{M}$ associé sur X est un G−faisceau. Cela revient à dire que : M a une structure de G−module rationnel qui rend l'application :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{K}} M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longmapsto & a.m \end{array}$$

G−équivariante (l'action de G sur A étant celle induite par l'action de G sur X).

Soit M le plus grand sous-P_α-module rationnel de $H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$.

Proposition III.4.6 *M est un sous-$\mathbb{K}[G]$-module de $H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$.*

Démonstration : Posons $N = H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ et considérons le morphisme de $\mathrm{Lie}(P_\alpha)$-modules (*cf.* le théorème III.2.2) :

$$m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} N & \longrightarrow & N \\ a \otimes n & \longmapsto & a.n \end{array} \right. .$$

Il s'agit de montrer que $m(\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M) \subseteq M$.

L'application m induit un isomorphisme de $\mathrm{Lie}(P_\alpha)$-modules :

$$m(\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M) \simeq \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M \Big/ \ker(m) \bigcap \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M \quad .$$

Or $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M$ est un P_α-module rationnel dont $\ker(m) \bigcap \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M$ est un sous-$\mathrm{Lie}(P_\alpha)$-module. Donc $\ker(m) \bigcap \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M$ est en fait un sous-P_α-module rationnel de $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M$. Ainsi, $m(\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M)$ est un sous-P_α-module rationnel de N qui contient M. Mais M est le plus grand, d'où $M = m(\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} M)$.

Q.e.d.

On a en particulier montré que M est un $\mathbb{K}[G]$−module P_α−linéarisé, c'est-à-dire que le faisceau $\widetilde{M}$ associé est P_α−linéarisé sur G.

Comme $P_\alpha \tau B^-$ est $P_\alpha \times \{1\}$−invariant, $H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ est déjà un sous-P_α−module rationnel de $H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ d'après le lemme III.4.5. Comme M les contient tous,

$$H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G) \subseteq M \quad .$$

La démonstration s'achèvera donc avec la proposition suivante sur l'inclusion opposée :

Proposition III.4.7

$$M \subseteq H^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G).$$

Démonstration : Comme $B\tau B^-$ est un ouvert de $P_\alpha \tau B^-$, si $u \in B\tau B^-$, on a :

$$\mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)_u = \mathscr{H}^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)_u = (\widetilde{M})_u \ .$$

Pour ce qui va suivre, soient $\widetilde{w}$,$\widetilde{\tau}$ et $\widetilde{s_\alpha}$ des relevés de w, τ et s_α dans $N(T)$ (forcément, $\widetilde{s_\alpha}^2 \in T$) et soit q la surjection de $\mathscr{O}_G$−modules :

$$\mathscr{H}^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G) \xrightarrow{q} \mathscr{H}^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \ .$$

On remarque d'abord que si $x \in M$, $q(G)(x)_{\widetilde{w}} = 0$. En effet, soit $s := q(G)(x)$; $s_{\widetilde{w}} = q_{\widetilde{w}}(x_{\widetilde{w}}) \in (\mathscr{H}^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G))_{\widetilde{w}}$. Avec les notations de la proposition III.2.1,

$$T_{\widetilde{s_\alpha}^{-1}, \widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}} \circ T_{\widetilde{s_\alpha}, \widetilde{w}}$$

est l'application identité sur $(\widetilde{M})_{\widetilde{w}}$ et sur $(\mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G))_{\widetilde{w}}$. Donc :

$$x_{\widetilde{w}} = T_{\widetilde{s_\alpha}^{-1}, \widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}} \circ T_{\widetilde{s_\alpha}, \widetilde{w}}(x_{\widetilde{w}}) \ .$$

Or :

$$T_{\widetilde{s_\alpha}^{-1}, \widetilde{w}}(x_{\widetilde{w}}) \in \widetilde{M}_{\widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}} = \mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)_{\widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}}$$

car $\widetilde{s_\alpha}\widetilde{w} \in B\tau B^-$. De plus, puisque $\mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)$ est un P_α-faisceau,

$$x_{\widetilde{w}} \in T_{\widetilde{s_\alpha}, \widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}}(\mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathscr{O}_G)_{\widetilde{s_\alpha}\widetilde{w}}) \subseteq \mathscr{H}^{l(\tau)}_{P_\alpha \tau B^-}(\mathcal{O}_G)_{\widetilde{w}} = \ker(q_{\widetilde{w}}).$$

En fait, grâce à la proposition I.5.3 sur les points associés, cela suffit car $\widetilde{w} \in \overline{BwB^-} = \overline{\{g\}}$ (où g est le point générique de BwB^- dans G). **Q.e.d.**

III.4.3 $\mathcal{D}(G)$−modules

On note $\mathcal{D}_G$ le faisceau des opérateurs différentiels sur G (*cf.* [Ka90, §1.1]) et $\mathcal{D}(G)$ l'algèbre $\Gamma(G, \mathcal{D}_G)$ (*cf.* [DG70, Cha. II n° 5.3] et [Ja, partie I, §7.18]).

On va étudier ici les groupes de cohomologie à support du faisceau structural de G en tant que $\mathcal{D}(G)$−modules.

Remarque : Cette algèbre est la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[G])$ engendrée par les multiplications par des fonctions de $\mathbb{K}[G]$ et par $\mathfrak{g}$ qui opère dans $\mathbb{K}[G]$ par dérivation à gauche †, respectivement par dérivation à droite.

En effet, comme G est lisse, $\mathcal{D}(G)$ est engendré, comme $\mathbb{K}$−algèbre par $\mathbb{K}[G]$ et par $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[G], \mathbb{K}[G])$, l'ensemble des dérivations de $\mathbb{K}[G]$ (*cf.* [Bo87, §1.1, p. 207] ou [Bj93, théorème 1.1.8]). Or, d'après [Sp81, corollaire 3.3.4], on a un isomorphisme de $\mathbb{K}[G]$−modules entre $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[G], \mathbb{K}[G])$ et $\mathbb{K}[G] \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathfrak{g}$.

D'après [Ka78, §1, lemme 1.1], les faisceaux $\mathscr{H}^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$ sont des faisceaux de $\mathcal{D}_G$−modules (ou $\mathcal{D}_G$−faisceaux) et les morphismes :

$$\mathscr{H}^{l(w)}_{BwB^-}(\mathscr{O}_G) \to \mathscr{H}^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathscr{O}_G)$$

sont $\mathcal{D}_G$−équivariants.

† cette opération est appelée convolution à droite dans [Hu95, §9.2]

En prenant leurs sections globales $\Gamma(G, \ )$, on s'aperçoit que l'on a des morphismes surjectifs de $\mathcal{D}(G)-$modules:

$$H^{l(\tau)}_{B\tau B^-}(\mathcal{O}_G) \to H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathcal{O}_G)$$

lorsque $w = s_\alpha \tau$ pour une racine simple α, $w, \tau \in W$, tels que $w > \tau$.

On en déduit le fait suivant :

Proposition III.4.8 *Quand G est semi-simple et simplement connexe, pour tout $w \in W$,*

$$H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathcal{O}_G)$$

est un $\mathcal{D}(G)-$module monogène.

Démonstration : Grâce aux morphismes surjectifs rappelés ci-dessus, il suffit de traiter le cas $w = 1$. Or, comme G est simplement connexe, l'algèbre $\mathbb{K}[G]$ est factorielle, le fermé $G \setminus BB^-$ a donc un idéal de définition principal. Si on le note (f), alors :

$$H^0_{BB^-}(\mathcal{O}_G) = \Gamma(BB^-, \mathcal{O}_G) = \mathbb{K}[G][\frac{1}{f}] \ .$$

Ce $\mathcal{D}(G)-$module est de type fini selon [Ka78, prop. 2.9]. ; il est donc engendré par $\dfrac{1}{f^k}$ pour un $k > 0$ assez grand.

En effet, soient $f_1, \dots, f_e \in \Gamma(BB^-, \mathcal{O}_G)$ des générateurs. Pour tout $1 \leq j \leq e$, il existe $k_j \geq 0$ tel que $f_j \in \mathbb{K}[G].f^{-k_j}$. Si on pose $k := \max_{j=1}^{e} k_j$, alors $f_j \in \mathbb{K}[G].f^{-k}$ pour tout j.

Comme $\mathcal{D}(G)$ contient en particulier $\mathbb{K}[G]$, la fonction f^{-k} engendre bien $\Gamma(BB^-, \mathcal{O}_G)$ comme $\mathcal{D}(G)-$module. **Q.e.d.**

Remarque *(Levasseur)* :

Plus généralement, on peut montrer que les $\mathcal{D}(G)-$modules $H^{l(w)}_{BwB^-}(\mathcal{O}_G)$ sont monogènes si G est seulement réductif et connexe. En effet, le faisceau de $\mathcal{D}_G-$modules $\mathscr{H}^0_{BB^-}(\mathcal{O}_G)$ est holonome (*cf.* [Ka78, Théorème 1.3]). Donc, comme G est affine,

$$\Gamma(G, \mathscr{H}^0_{BB^-}(\mathcal{O}_G)) = H^0_{BB^-}(\mathcal{O}_G)$$

est un $\mathcal{D}(G)-$module de longueur finie. Puisque $\mathcal{D}(G)$ est un anneau simple et non artinien, il en résulte que $H^0_{BB^-}(\mathcal{O}_G)$ est monogène (*cf.* [Bj93, Chap. I, théorème 8.18]) ; on conclut après comme ci-dessus.

Chapitre IV

Variétés régulières

Soit G un groupe réductif connexe pour lequel on adopte les notations du début du chapitre III.

On va rappeler ci-après la définition des variétés sphériques. On compte étudier les groupes de cohomologie des fibrés en droites sur une telle variété X, avec le complexe de Grothendieck-Cousin. Pour cela, on va utiliser une filtration de X par des fermés telle que les termes du complexe associé soient des (sommes directes de) groupes de cohomologie à support dans des cellules de Bialynicki-Birula ou des $B-$orbites (B étant un sous-groupe de Borel de G).

On va s'intéresser dans ce chapitre à de tels groupes de cohomologie à support, principalement à leur structure de $\mathfrak{g} - B-$modules. On va commencer par construire des filtrations de ces $\mathfrak{g} - B-$modules et déterminer les gradués associés correspondants. Puis, on va prendre pour chaque caractère central χ de $\mathfrak{g}$, l'espace propre généralisé associé (*cf.* la proposition III.1.2). On va ainsi se ramener à l'étude de $\mathfrak{g} - B-$modules de longueur finie, par exemple dans le cas où le support est une $B-$orbite de *rang maximal* (pour la définition *cf.* la page 74). On donnera une suite de composition de ces espaces propres généralisés avec des quotients successifs isomorphes à des « modules de Verma généralisés ». Ces derniers sont en fait des groupes de cohomologie de fibrés en droites sur des variétés de drapeaux et à support dans des $B-$orbites. On en connaît le caractère central et la multiplicité selon tout $G \times G-$module simple. Cela nous suffira pour les démonstrations du dernier chapitre.

Juste après avoir donné la définition des variétés sphériques, on va rappeler la notion de variété régulière. Ces variétés présentent des avantages. En effet, les adhérences de leurs $G-$orbites sont des intersections transverses de diviseurs lisses et leurs $B-$orbites sont exactement les intersections de cellules de Bialynicki-Birula et de $G-$orbites (*cf.* la définition 11 et la section IV.1.5). C'est pour cela qu'on mènera l'étude des groupes de cohomologie à support sur des variétés régulières. Pour l'objectif final qui est la détermination des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur une variété sphérique, ce n'est pas une restriction trop forte : on peut toujours se ramener au cas où X est régulière, d'après la proposition IV.0.11.

Une variété X, sur laquelle G agit est **sphérique** si elle est normale et n'a qu'un nombre fini de $B-$orbites.

Les **couleurs** de X sont ses diviseurs premiers $B-$invariants qui contiennent une $G-$orbite mais ne sont pas $G-$invariants (*cf.* [BB96, §2.2]).

Désormais, X est une $G-$variété irréductible.

Parmi les fonctions rationnelles sur une $B-$variété irréductible Y, on considère celles qui sont des $B-$vecteurs propres. Dans le réseau des caractères de B, $X^*(B) = \mathfrak{X}$, leurs poids forment un sous-réseau de rang fini $r(Y)$: c'est la définition du **RANG** de Y.

Proposition IV.0.9 ([Kn, corollaire 2.4]) *Pour toute sous-variété (localement fermée) irréductible $B-$invariante Y de X, on a : $r(Y) \leq r(X)$.*

Cela entraîne que pour toute $B-$orbite Ω de X, $r(\Omega) \leq r(G.\Omega)$; en cas d'égalité, on dit que Ω est une orbite de **RANG MAXIMAL**.

Remarque : Soit $x \in X$. Si on note B_x le stabilisateur de x dans B, alors le rang de l'orbite $B \cdot x$ est :

$$r(B \cdot x) = r(B/B_x) = r(B) - r(B_x) = \dim T - r(B_x)$$

où $r(B_x)$ est la dimension d'un (de tout) tore maximal de B_x.

Lien avec les variétés régulières

La notion de variété régulière est due à Bifet, De Concini et Procesi dans [BCP], *cf.* aussi [B98] et [BB96].

Définition 11 *On dit que X est* **RÉGULIÈRE** *si sont vérifiées :*

1° *X est lisse et a une $G-$orbite ouverte et dense X_G^0 dont le complémentaire est un diviseur à croisements normaux†. On appellera* **DIVISEURS LIMITROPHES** *les composantes irréductibles de $X - X_G^0$.*

2° *Chaque adhérence de $G-$orbite est l'intersection transverse des diviseurs limitrophes qui la contiennent (c-à-d que si A est l'adhérence d'une $G-$orbite et si $D_1, \ldots, D_n$ sont les diviseurs limitrophes contenant A, alors l'idéal de définition de A est la somme des idéaux de définition des D_i :*

$$\mathscr{I}_A = \mathscr{I}_{D_1} + \ldots + \mathscr{I}_{D_n} \quad).$$

3° *Si $x \in X$ alors sur l'espace normal à $G \cdot x$ dans X, $T_xX/T_xG \cdot x$, le groupe d'isotropie de x, G_x, agit avec une orbite dense.*

(Pour cette définition on peut remplacer G par n'importe quel groupe algébrique linéaire connexe.)

Les variétés toriques complètes lisses sont des exemples de variétés régulières.

Remarque : Si F est un fermé $G-$invariant et irréductible d'une $G-$variété régulière X, alors non seulement F est lisse mais c'est aussi une variété régulière (*cf.* [BB96, prop. 2.5]).

Le rapport avec les variétés sphériques est donné par la proposition suivante :

Proposition IV.0.10 ([BB96, 2.2.1.]) *Si on suppose que X est complète et lisse, alors X est régulière si et seulement si X est sphérique et sans couleur.*

† Cela signifie que si $D_1, \ldots, D_n$ sont des composantes irréductibles de $X - X_G^0$, alors ce sont des diviseurs lisses et si elles se rencontrent en un point $x \in X$, alors les équations locales $f_1, \ldots, f_n$ des D_i en x sont linéairement indépendantes modulo m_x^2 (*c-à-d* que les f_i sont une partie d'un système régulier de paramètres en x).

De plus, pour toute variété sphérique complète, on a :

Théorème IV.0.11 *Il existe une variété sphérique régulière $\widetilde{X}$ et un morphisme*

$$\varphi : \widetilde{X} \to X$$

birationnel, $G-$invariant et propre.

En particulier, pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X :

$$H^i(X, \mathscr{L}) = H^i(\widetilde{X}, \varphi^* \mathscr{L})$$

pour tout $i \geq 0$.

Compactifications

On appelle **COMPACTIFICATION** d'un espace homogène Θ pour G, toute $G-$variété complète et normale qui contient Θ comme ouvert $G-$invariant.

On a la :

Proposition IV.0.12 ([BB96, 2.2.2.]) *Un espace homogène pour G admet une compactification régulière si et seulement s'il est sphérique.*

ON SUPPOSERA DORÉNAVANT QUE X EST UNE $G-$VARIÉTÉ RÉGULIÈRE COMPLÈTE.

IV.1 Quelques propriétés des variétés régulières

On notera X_G^0 la $G-$orbite ouverte de X et X_B^0 sa $B-$orbite ouverte.

IV.1.1 Poids des diviseurs limitrophes

Si D est un diviseur limitrophe de X, le faisceau cohérent $\mathscr{O}_X(D)$ est inversible car X est lisse.

Donc si $x \in X^T$, la fibre $\mathscr{O}_X(D)|_x$ est une droite où T, et même G_x, agissent avec un poids $p_x(D) \in \mathfrak{X}$.

L'axiome 3° de la définition des variétés régulières a pour conséquence :

Proposition IV.1.1 *Soient $x \in X^T$ et $D_1, \ldots, D_s$ les diviseurs limitrophes de X contenant x.*

Les caractères $p_x(D_1), \ldots, p_x(D_s)$ sont $\mathbb{Z}-$linéairement indépendants (dans $\mathfrak{X}$).

Démonstration : Soit G_x le groupe d'isotropie de x.

L'adhérence d'orbite $\overline{G \cdot x}$ est l'intersection transverse des D_i ($i = 1$ à s). Donc l'espace normal à $G \cdot x$ dans X est :

$$T_x X / T_x G \cdot x = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathscr{O}_X(D_i)|_x \quad (*)$$

(*cf.* [BB96, §2.4]).

C'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension s avec une base (correspondant à la décomposition $(*)$) de G_x-vecteurs propres $e_1, \ldots, e_s$ de valeurs propres respectives $p_x(D_1), \ldots, p_x(D_s)$. Dans cette base, l'action de G_x sur $T_xX/T_xG\cdot x$ est ainsi donnée par :

$$\forall\, g \in G_x,\, \forall\, a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{K},$$
$$g.(a_1, \ldots, a_s) = (a_1 p_x(D_1)(g), \ldots, a_s p_x(D_s)(g)) \quad .$$

Pour que cette action ait une orbite dense, il faut (et il suffit) que les $p_x(D_i)$ soient $\mathbb{Z}-$linéairement indépendants. **Q.e.d.**

IV.1.2 La « grosse cellule »

On pose $X_0 : = \{x \in X \ : \ B\cdot x \text{ est ouvert dans } G\cdot x\}$ et

$$P : = \left\{g \in G \ : \ g.X_B^0 = X_B^0\right\} \quad .$$

P est un sous-groupe parabolique de G qui contient B. Soit L le sous-groupe de Levi de P qui contient T. D'après [B01, §2], il existe une sous-variété fermée et irréductible, S, de X_0, $L-$invariante, dont tous les points sont fixés par le sous-groupe dérivé (L, L) et telle que l'application :

$$\begin{array}{ccc} R_u(P) \times S & \to & X_0 \\ (n, s) & \mapsto & n.s \end{array}$$

est un isomorphisme de variétés algébriques.

De plus, S rencontre chaque $G-$orbite $\mathcal{O}$, de X en une seule $T-$orbite (donc S admet une $T-$orbite ouverte dense).

IV.1.3 G-orbites fermées

D'après [B98, §1.4] et [BB96, §2.2], toutes les $G-$orbites fermées de X sont isomorphes à G/Q où $Q \supseteq B^-$ est le sous-groupe parabolique opposé à P.

IV.1.4 Intersections propres

Soit Y une sous-variété fermée, irréductible et $B-$invariante de X.

Alors $G.Y : = \{g.y \ : \ g \in G, y \in Y\}$ est une sous-variété fermée, irréductible et $G-$invariante de X qui vérifie :

Théorème IV.1.2 ([B98, 1.4. ii)]) *Pour toute sous-variété fermée irréductible et $G-$invariante $Z \subseteq G.Y$, et toute composante irréductible C de $Y \cap Z$, on a :*

$$\operatorname{codim}(C, Z) = \operatorname{codim}(Y, G.Y) \ \ (Y \textit{ et } Z \textit{ s'intersectent proprement dans } G.Y)$$

$$\textit{et } G.C = Z \quad .$$

IV.1.5 Cellules de Bialynicki-Birula et $B-$orbites

On va de nouveau faire appel aux cellules de Bialynicki-Birula (*cf.* la section II.3).

L'ensemble des points fixes de T, X^T, est fini. En effet, chaque $B-$orbite comporte au plus un point fixé par T et il n'y a qu'un nombre fini de $B-$orbites.

On peut trouver un sous-groupe à un paramètre $\zeta > 0$ (*c-à-d* que pour tout $\alpha \in \Phi^+$, $\langle \alpha, \zeta \rangle > 0$) tel que

$$X^\zeta = X^T$$

(*cf.* par exemple [BB73, lemme 2.3]) (X^ζ est l'ensemble des points fixes de l'action de $\zeta(\mathbb{K}^*)$).

On fixe ce ζ pour la suite.

Pour un tel ζ, les cellules de Bialynicki-Birula :

$$C(x) = \{y \in X \ : \ \lim_{a \to 0} \zeta(a).y = x\}$$

sont des sous-variétés $B-$invariantes de X car pour tout $b \in B$, $\lim_{a \to 0} \zeta(a) b \zeta(a^{-1})$ existe et appartient à T.

On a vu au cours de la remarque sur le théorème III.3.1 que, dans la variété de drapeaux G/B^-, les cellules de Bialynicki-Birula (pour un sous-groupe à un paramètre > 0) coïncidaient avec les $B-$orbites. Plus généralement, d'après [BL, §2.1 p. 219 et prop. du §2.3], l'intersection d'une cellule et d'une $G-$orbite de X est soit vide soit une $B-$orbite.

On obtient ainsi toutes les $B-$orbites de X :

$$\forall\, y \in X,\ B\cdot y = C(x) \cap G\cdot y$$

où $x :\, = \lim_{a \to 0} \zeta(a).y$.

IV.2 Filtration des groupes de cohomologie à support dans les B−orbites

L'objectif est d'obtenir des filtrations dont les quotients successifs sont de la forme : un groupe de cohomologie, à support dans une $B-$orbite, d'un faisceau inversible sur une $G-$variété homogène (par exemple une variété de drapeaux) dont on connaît un peu mieux la structure de $\mathfrak{g} - B-$module (*cf.* le lemme IV.4.3).

* * *

Afin d'étudier les groupes de cohomologie sur X à support dans une $B-$*orbite*, on va aussi s'intéresser aux groupes de cohomologie sur X à support dans une intersection d'une cellule et de l'adhérence d'une $G-$orbite. Dans cette intension, on fixe les notations qui serviront dans la suite.

IV.2.1 Notations

Soit $\mathcal{D} :\, = \{D_1, \ldots, D_r\}$ l'ensemble des diviseurs limitrophes de X.

Si $x \in X^T$ et si $C(x)$ est la cellule de Bialynicki-Birula associée (à x et à ζ), on note $c(x)$ la codimension de $C(x)$ dans X, $b(x)$ la codimension de $B\cdot x$ dans X et $\widetilde{b}(x)$ la codimension de $B\cdot x$ dans $G\cdot x$. Soit Z un fermé de X, irréductible et $G-$invariant, d'idéal de définition $\mathcal{I}_Z$ et tel que :

$$x \in Z \subseteq G.\overline{C(x)}\ .$$

On pose $C_Z(x) :=C(x)\cap Z$ (c'est la cellule de Bialynicki-Birula de Z associée à x et ζ) et $c_Z(x)$ la codimension de $C_Z(x)$ dans X.

Comme Z est $G-$invariant et $x \in Z$, on a : $\overline{G\cdot x} \subseteq Z$; soit $\mathcal{I}_{\overline{Gx}}$ l'idéal de définition de $\overline{G\cdot x}$ dans Z.

En ce qui concerne les diviseurs, on note $\mathcal{D}^x$ l'ensemble des diviseurs limitrophes contenant x. On divise cet ensemble en deux parties :

$$\widetilde{I}_{x,Z} := \{D \in \mathcal{D} \, : \, x \in D \text{ mais } Z \not\subseteq D\} \text{ et } \widetilde{J}_{x,Z} := \{D \in \mathcal{D} \, : \, Z \subseteq D\} \ .$$

Cette partition s'explique par le :

Lemme IV.2.1 *Comme faisceaux cohérents sur Z :*

$$\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2 = \bigoplus_{D\in\widetilde{J}_{x,Z}} \mathcal{O}_X(-D)|_Z$$

et comme faisceaux cohérents sur $\overline{G\cdot x}$:

$$\mathcal{I}_{\overline{Gx}}/\mathcal{I}^2_{\overline{Gx}} = \bigoplus_{D\in\widetilde{I}_{x,Z}} \mathcal{O}_X(-D)|_{\overline{Gx}} \ .$$

Démonstration : En effet, Z (respectivement $\overline{G.x}$) est l'intersection transverse des diviseurs limitrophes qui le contiennent (respectivement des diviseurs limitrophes de Z qui le contiennent).

Cela suffit pour la première égalité (*cf.* [BB96, début du §2.4]). Pour la seconde, on utilise en outre que, dans la variété régulière Z, les diviseurs limitrophes sont les $D\cap Z$ non vides avec $D \in \mathcal{D}$ ne contenant pas Z (*cf.* [BB96, §2.4 et §2.5, prop. 2.5]). Or, pour un diviseur premier $G-$invariant, on a :

$$D \supseteq \overline{G\cdot x} \Leftrightarrow D \ni x;$$

ce qui montre l'égalité annoncée. **Q.e.d.**

Remarque :

– Comme Z est lisse, on en déduit que pour tout $m \geq 0$:

$$\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1} = S^m(\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2) = S^m \left(\bigoplus_{D\in\widetilde{I}_{x,Z}} \mathcal{O}_X(-D) \right) |_Z$$

$$= \bigoplus_E \mathcal{O}_X(-E)$$

où E parcourt l'ensemble des diviseurs de la forme $\displaystyle\sum_{D\in\widetilde{I}_{x,Z}} n_D.D$ avec :

$$\forall\, D,\ n_D \geq 0 \text{ et } \sum_D n_D = m \ .$$

– De même, pour chaque $m \geq 0$, on a :

$$\mathcal{I}^{m}_{\overline{Gx}}/\mathcal{I}^{m+1}_{\overline{Gx}} = \bigoplus_{E} \mathcal{O}_X(-E)$$

où cette fois E parcourt l'ensemble des diviseurs de la forme $\sum_{D \in \widetilde{J}_{x,Z}} n_D.D$ avec :

$$\forall\, D,\ n_D \geq 0 \text{ et } \sum_{D} n_D = m \ .$$

– On vérifie aussi que :

$$\begin{aligned}\omega_{Z/X} &= \bigwedge^{\dim X - \dim Z} (\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2)^{\vee} \\ &= \mathcal{O}_X\Big(\sum_{D \in \widetilde{I}_{x,Z}} D\Big)\end{aligned}$$

(*cf.* la définition 2 page 23).

On conservera ces notations jusqu'à la fin du chapitre.

IV.2.2 Début du cas général

On va ici obtenir une filtration des groupes de cohomologie à support dans les $B-$orbites en utilisant que ces dernières sont l'intersection d'une cellule et d'une $G-$orbite (*cf.* la section IV.1.5).

Dans le théorème suivant, on exprime le groupe de cohomologie à support dans une $B-$orbite d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur X comme une réunion de groupes de cohomologie à support dans des cellules de la forme $C_Z(x)$ ($x \in X^T$ et Z une adhérence de $G-$orbite comme ci-dessus). Ensuite, dans la section suivante (IV.3), on traitera le cas de ces derniers groupes de cohomologie à support.

Théorème IV.2.2 *Soit $B{\cdot}y$ une $B-$orbite de X de codimension $b(y)$.*

Si $y \in C(x)$ pour un (unique) $x \in X^T$, alors le $\mathfrak{g} - B-$module $H^{b(y)}_{By}(\mathscr{L})$ est la réunion croissante

$$H^{b(y)}_{By}(\mathscr{L}) = \bigcup_{n \geq 0} H^{b(y)}_{C_{\overline{Gy}}(x)}(\mathscr{L} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{I}_F^{-n})$$

où $\mathscr{I}_F$ est l'idéal de définition (sur X) du fermé F, réunion des diviseurs limitrophes D_i qui contiennent x mais ne contiennent pas y.

Remarque : Par définition, F est un diviseur, donc puisque X est lisse, son idéal $\mathcal{I}_F$ est inversible ce qui permet de définir les faisceaux inversibles $\mathcal{I}_F^{-n}$ lorsque $n > 0$.

Démonstration : On rappelle que $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_r\}$ désigne l'ensemble des diviseurs limitrophes de X.

On a $B{\cdot}y = G{\cdot}y \cap C(x)$. De plus, F est ainsi défini que :

$$B{\cdot}y = (\overline{G{\cdot}y} \ \setminus \ F) \cap C(x) \ .$$

. En effet, l'adhérence $\overline{G\cdot y}$ est l'intersection transverse des diviseurs limitrophes qui la contiennent *c-à-d* qui contiennent y :

$$\overline{G\cdot y} = \bigcap_{D\in\mathcal{D}\,:\,D\ni y} D \ .$$

$G\cdot y$ étant l'unique orbite ouverte de $\overline{G\cdot y}$, elle est obtenue en retranchant à $\overline{G\cdot y}$ tous les diviseurs limitrophes qui ne contiennent pas y :

$$G\cdot y = \overline{G\cdot y} \ \setminus \bigcup_{D\,:\,y\notin D} D$$

$$= (\overline{G\cdot y} \ \setminus \bigcup_{D\,:\,y\notin D, x\in D} D)\bigcap(X \ \setminus \bigcup_{D\,:\,y\notin D, x\notin D} D)$$

$$= (\overline{G\cdot y} \ \setminus \ F)\bigcap(X \ \setminus \bigcup_{D\,:\,x\notin D} D)$$

car comme $X \ \setminus \ D$ est un ouvert $T-$stable, on a :

$$x \notin D \Rightarrow C(x) \subseteq X \ \setminus \ D \Rightarrow y \notin D \ .$$

Dès lors :

$$B\cdot y = C(x) \cap G\cdot y = C(x) \cap (\overline{G\cdot y} \ \setminus \ F) \ .$$

Supposons pour simplifier que F est la réunion des diviseurs limitrophes $D_1, \ldots, D_s$ $(1 \leq s \leq r)$, posons $C : = C_{\overline{Gy}}(x)$ et notons $\mathcal{F}(D) : = \mathcal{F} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X(D)$ pour chaque faisceau de $\mathcal{O}_X-$modules $\mathcal{F}$ et chaque diviseur D de X.

Si on appelle $j : X \ \setminus \ F \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique, alors :

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathcal{L} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{I}_F^{-n} = j_*\mathcal{L}\big|_{X \setminus F} \ .$$

Or, l'inclusion j est affine car F est un diviseur et X est lisse (*cf.* [Ma70] et [Ha68, exemple 1 p. 421]). Donc :

$$\varinjlim_{n\geq 0} H_C^{b(y)}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}) = H_C^{b(y)}(\varinjlim_{n\geq 0} \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n})$$

$$= H_C^{b(y)}(j_*\mathcal{L}\big|_{X \setminus F})$$

$$= H_{C \setminus F}^{b(y)}(\mathcal{L}\big|_{X \setminus F})$$

(la dernière égalité se déduit d'une suite spectrale de Leray qui dégénère (*cf.* [Ke78, lemme p. 377] et [G62, V.3.2])).

En conséquence :

$$\varinjlim_{n\geq 0} H_C^{b(y)}\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n} = H_{By}^{b(y)}(\mathcal{L}) \ .$$

Pour terminer, il ne reste plus qu'à démontrer que les morphismes

$$\phi_n : H_C^{b(y)}\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n} \to H_C^{b(y)}\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n-1}$$

sont injectifs pour tout n.

Remarquons que pour tout $1 \leq i \leq s$, $C \not\subseteq D_i$ car $y \notin D_i$; en particulier, $C \cap D_i \underset{\neq}{\subseteq} C$ et $\dim C \cap D_i = \dim C - 1$.

Puisque $\mathcal{I}_F^{-1} = \mathscr{O}_X(\sum_{i=1}^s D_i)$, les ϕ_n sont les composés des morphismes †

$$\phi_n^i : H_C^{b(y)}(\mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}(\sum_{j=1}^{i-1} D_j)) \to H_C^{b(y)}(\mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}(\sum_{j=1}^{i} D_j)) \ ,$$

$$0 \leq i \leq s \ .$$

Mais, les ϕ_n^i sont tous injectifs.

En effet, si $0 \leq i \leq s$, $n \geq 0$ et si on pose :

$$\mathcal{M} : \ = \mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}(\sum_{j=1}^{i} D_j) \ ,$$

alors :

$$\phi_n^i : H_C^{b(y)}(\mathcal{M}(-D_i)) \to H_C^{b(y)}(\mathcal{M})$$

a pour noyau $H_{C\cap D_i}^{b(y)-1}(\mathcal{M}|_{D_i})$. Ce noyau est nul car d'une part, $\mathcal{M}|_{D_i}$ est un faisceau inversible sur D_i et d'autre part, $C \cap D_i$, qui est une cellule de Bialynicki-Birula de D_i, est une sous-variété affine et lisse de codimension $b(y)$ dans D_i.

Q.e.d.

IV.3 Filtration des groupes de cohomologie à support dans les cellules

On conserve les notations de la section IV.2.1

Soient notamment $x \in X^T$ et $Z \subseteq G.\overline{C(x)}$.

Si $\mathscr{M}$ est un faisceau cohérent, localement libre sur X, alors, d'après le théorème I.4.1, $H^c_{C_Z(x)}(\mathscr{M}) = (0)$ lorsque $c \neq c_Z(x)$. Le théorème qui suit donne une « double-filtration » de $H^{c_Z(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{M})$ dont le gradué associé est somme de groupes de cohomologie sur la $G-$orbite $G\cdot x$, à support dans la $B-$orbite $B\cdot x$ (qui a la particularité d'être aussi une cellule de Bialynicki-Birula de $G\cdot x$ vu que $B\cdot x = C(x) \cap G\cdot x$).

Théorème IV.3.1 *On a une filtration croissante de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels :*

$$H^{c_Z(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{M}) = \bigcup_{m\geq 0} M^m$$

avec $M^0 = (0)$ et pour tout $m \geq 0$, une filtration décroissante :

$$M^{m+1}/M^m = \bigcup_{n\geq 0} M^m_n$$

† *c-à-d* que : $\forall\, n \geq 0, \phi_n = \phi_n^s \circ \ldots \circ \phi_n^0$

avec $\bigcap_{n\geq 0} M_n^m = (0)$ *et dont les quotients successifs sont:*

$$M_n^m/M_{n+1}^m = H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{M}_n^m)$$

où $\mathscr{M}_n^m$ *est le faisceau cohérent localement libre sur* $\overline{G\cdot x}$ *suivant:*

$$\mathscr{M}_n^m = \left(\bigoplus_E \mathscr{O}_X(E)\right) \underset{\mathscr{O}_{\overline{G\cdot x}}}{\otimes} \mathscr{M}|_{\overline{G\cdot x}} ,$$

E décrivant l'ensemble $\mathcal{D}_{m,n}^{x,Z}$ *des diviseurs de* X *de la forme:*

$$-\sum_{D\in\widetilde{I}_{x,Z}} n_D.D + \sum_{D\in\widetilde{J}_{x,Z}} n_D.D$$

avec

a) $\forall\, D \in \widetilde{I}_{x,Z}$ *(respectivement* $\widetilde{J}_{x,Z}$*),* $n_D \in \mathbb{N}$ *(respectivement* $n_D \in \mathbb{N}^*$*);*

b) $\displaystyle\sum_{D\in\widetilde{I}_{x,Z}} n_D = n$ *et* $\displaystyle\sum_{D\in\widetilde{J}_{x,Z}} (n_D - 1) = m.$

De plus, si $\mathscr{M}$ *est* $G-$*linéarisé alors il s'agit de filtrations et de quotients de* $\mathfrak{g} - B-$*modules.*

Remarque : Grâce aux remarques sur le lemme IV.2.1, le faisceau $\mathscr{M}_n^m$ s'écrit aussi :

$$\mathscr{M}_n^m = (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee \,|_{\overline{Gx}} \underset{\mathscr{O}_{\overline{Gx}}}{\otimes} \mathcal{I}_{\overline{Gx}}^n/\mathcal{I}_{\overline{Gx}}^{n+1} \underset{\mathscr{O}_{\overline{Gx}}}{\otimes} \mathscr{M} \,|_{\overline{Gx}} \underset{\mathscr{O}_{\overline{Gx}}}{\otimes} (\omega_{Z/X}) \,|_{\overline{Gx}} \;;$$

c'est sous cette forme qu'il apparaîtra dans la démonstration.

* * *

On va démontrer ce théorème en trois étapes.

On se ramène d'abord à un calcul de groupes de cohomologie sur Z grâce au lemme et au corollaire suivants :

Lemme IV.3.2 *Soient* V *une variété algébrique (sur* $\mathbb{K}$*) lisse, irréductible et* Z *une sous-variété fermée, lisse de* V *de codimension* z*.*

Si $\mathscr{M}$ *est un faisceau localement libre, de rang fini sur* V *alors le faisceau de cohomologie locale* $\mathscr{H}_Z^z(\mathscr{M})$ *est la réunion croissante des sous-faisceaux*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathscr{M}) \;.$$

Et, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_V-$*modules (ou de* $\mathscr{O}_Z-$*modules):*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathscr{M})/\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathscr{M}) \simeq \left(\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee\right) \;.$$

Remarque : Si V est une $G-$variété, si Z est laissé stable par G et si $\mathscr{M}$ est $G-$linéarisé, alors l'isomorphisme ci-dessus est $G-$équivariant.

Démonstration : De la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1} \to \mathscr{O}_V/\mathcal{I}_Z^{m+1} \to \mathscr{O}_V/\mathcal{I}_Z^m \to 0$$

dérive une suite exacte longue :

$$(\bigstar)\quad \ldots \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{M}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathcal{M})$$
$$\to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathcal{M}) \to \ldots$$

Or comme Z est lisse,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{M}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq z \\ \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_V) \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{M} = \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{M} & \text{si } j = z \end{cases}$$

d'après [Ha66, proposition 7.2].

On en déduit que la suite spectrale [CE, $(2)_4$, §5 XVI]

$$\left(\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{M})\right) \Rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i+j}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathcal{M})$$

dégénère et donne un isomorphisme pour tout $m \geq 0$:

$$\left(\underline{\mathrm{Ext}}^{i-z}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{M})\right) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathcal{M})$$

Le faisceau $\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}$ est localement libre sur Z car Z est lisse (*cf.* [Ha97, Théorème 8.17 (2)] et [Ma70, p.110]). On note $(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee$ son dual en tant que $\mathcal{O}_Z$−module.

On a donc, pour chaque i et chaque m :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1}, \mathcal{M}) &\simeq \left(\underline{\mathrm{Ext}}^{i-z}_{\mathcal{O}_Z}\left(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{M}|_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee\right)\right) \\ &= \left(\underline{\mathrm{Ext}}^{i-z}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{M}|_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee)\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq z \\ \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{M}|_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee & \text{si } i = z \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la proposition I.6.2 :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{z+1}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{M}) = (0)$$

pour tout $m \geq 0$.

D'où la suite exacte courte, tirée de $(\bigstar)$, pour chaque $m \geq 0$:

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{M}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{M})$$
$$\to \omega_{Z/X} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{M}|_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee \to 0$$

qui achève la démonstration car

$$\mathcal{H}^z_Z(\mathcal{M}) = \varinjlim_{m \geq 0} \underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{M}) \ .$$

Q.e.d.

* * *

Corollaire IV.3.2.1 *Soient*

– V *une variété algébrique irréductible et lisse sur* $\mathbb{K}$ *;*

– *Z une sous-variété de V, lisse, fermée, irréductible et de codimension z dans V ;*

– *C une sous-variété de Z, localement fermée, affine, lisse et de codimension c dans V.*

Si $\mathscr{M}$ est un faisceau cohérent et localement libre sur V alors on a la filtration croissante :

$$H^c_C(\mathscr{M}) = \bigcup_{m\geq 0} H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})\right)$$

et pour tout $m \geq 0$:

$$H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})\right) / H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})\right)$$
$$= H^{c-z}_C\left(\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z)^\vee\right) \ .$$

Remarque : Si V est une $G-$variété, si Z est laissé stable par G et si $\mathscr{M}$ est $G-$linéarisé, il s'agit d'une filtration et de quotients de $\mathfrak{g}-$modules, de $\mathfrak{g}-B-$modules si, en outre, C est stable par B.

Démonstration : Comme Z est un fermé lisse de V et comme $\mathscr{M}$ est localement libre de rang fini sur V, le faisceau $\mathscr{H}^j_Z(\mathscr{M})$ est nul si $j \neq \mathrm{codim}(Z, X) = z$ (*cf.* le théorème I.4.1). En particulier, la suite spectrale [Ke78, 8.4 d)]

$$H^i_C(\mathscr{H}^j_Z(\mathscr{M})) \Rightarrow H^{i+j}_C(\mathscr{M})$$

dégénère et donne un isomorphisme

$$\diamond \ \ H^{c-z}_C(\mathscr{H}^z_Z(\mathscr{M})) \simeq H^c_C(\mathscr{M}) \ .$$

D'un autre côté, d'après le lemme IV.3.2, on a une suite exacte courte :

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})$$
$$\to \omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z)^\vee \to 0 \ .$$

Maintenant, si on applique le foncteur $\Gamma_C(\ldots)$, on obtient une suite exacte longue :

$$(\star) \quad \ldots \to H^j_C(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})) \to H^j_C(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M}))$$
$$\to H^j_C\left(\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z)^\vee\right) \to \ldots$$

Or :

$$H^j_C\left(\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z)^\vee\right) \quad = \quad (0) \text{ si } j \neq c-z$$

car C est affine, lisse, de codimension $c-z$ dans Z et $\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \left(\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z\right)^\vee$ est un faisceau localement libre et de rang fini sur Z.

Par conséquent, pour tous $m \geq 0$ et $j > c-z$, le morphisme :

$$H^j_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})\right) \twoheadrightarrow H^j_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})\right)$$

est surjectif. Il en résulte, par récurrence sur m, que pour tout $j > c - z$,

$$H^j_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})\right) = (0)$$

pour tout $m \geq 0$.

On déduit donc de $(\star)$ les suites exactes courtes

$$0 \to H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^m_Z, \mathscr{M})\right) \to H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})\right)$$

$$\to H^{c-z}_C\left(\omega_{Z/X} \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} (\mathcal{I}^m_Z/\mathcal{I}^{m+1}_Z)^\vee\right) \to 0$$

Finalement, en utilisant $\diamond$ on a :

$$\begin{array}{rcl} H^c_C(\mathscr{M}) & \simeq & H^{c-z}_C(\mathscr{H}^z_Z(\mathscr{M})) \\ & \simeq & \varinjlim_{n\geq 0} H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})\right) \\ & \simeq & \bigcup_{n\geq 0} H^{c-z}_C\left(\underline{\mathrm{Ext}}^z_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{O}_V/\mathcal{I}^{m+1}_Z, \mathscr{M})\right) \quad . \end{array}$$

<u>**Q.e.d.**</u>

On applique ce corollaire à $C = C_Z(x)$, Z, $V = X$ et $\mathscr{M}$.

* * *

Ensuite, on utilise le

Lemme IV.3.3 *Soient $C, H \subseteq V$ trois variétés algébriques telles que*

- *H soit une sous-variété fermée et lisse de V, d'idéal de définition $\mathcal{I}_H$;*
- *C soit une sous-variété localement fermée, affine et lisse de V ;*
- *$C \bigcap H$ soit lisse ;*
- $\mathrm{codim}(C \bigcap H, H) = \mathrm{codim}(C, V)$ *;*
- *C, $C \cap H$ et V sont irréductibles.*

Si c est cette codimension commune, alors pour chaque faisceau localement libre de rang fini, $\mathscr{L}$ sur V, on a :

$$H^c_C(\mathscr{L}) = \bigcup_{n\geq 0} H^c_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^n_H)$$

et pour tout $n \geq 0$:

$$H^c_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^n_H) \Big/ H^c_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^{n+1}_H) = H^c_{C\cap H}(\mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}^n_H/\mathcal{I}^{n+1}_H) \quad .$$

Démonstration : Soit $n \geq 0$. On a une suite exacte courte de $\mathscr{O}_V$−modules :

$$0 \to \mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^{n+1}_H \to \mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^n_H \to \mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}^n_H/\mathcal{I}^{n+1}_H \to 0$$

dont dérive une suite exacte longue :

$$(\ast)\quad \ldots \to H^i_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^{n+1}) \to H^i_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes})\mathcal{I}_H^n \to H^i_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}) \to \ldots$$

Or, d'une part, C est affine, lisse de codimension c et le faisceau $\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^{n+1}$ est quasi-cohérent sur V donc :

$$H^i_C(\mathscr{L} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^{n+1}) = (0) \text{ si } i > c$$

(*cf.* le théorème I.4.1).

D'autre part :

$$\mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1} = \mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}$$

et :

$$H^i_C\left(\mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}\right) = H^i_{C\cap H}\left(\mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}\right)$$

pour tout $i \geq 0$ (*cf.* le lemme I.1.4). Puisque $C \cap H$ est affine (c'est un fermé de la variété affine C), lisse et de codimension c danc H, puisque $\mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}$ est un faisceau localement libre et de rang fini sur H (car H est une sous-variété fermée, lisse de V) on a :

$$H^i_{C\cap H}(\mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}) = (0) \text{ si } i \neq c\ .$$

On extrait donc de $(\ast)$ une suite exacte courte :

$$(\circledast)\quad 0 \to H^c_C(\mathscr{M} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^{n+1}) \to H^c_C(\mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n) \to H^c_{C\cap H}(\mathscr{M}|_H \underset{\mathscr{O}_H}{\otimes} \mathcal{I}_H^n/\mathcal{I}_H^{n+1}) \to 0$$

Par ailleurs, l'égalité $\mathscr{M} = \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n$ entraîne que

$$\begin{aligned} H^c_C(\mathscr{M}) &= \varinjlim_{n\geq 0} H^c_C(\mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n) \\ &= \bigcup_{n\geq 0} H^i_C(\mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_V}{\otimes} \mathcal{I}_H^n) \end{aligned}$$

à cause de $(\circledast)$. **Q.e.d.**

On vérifie maintenant que

$$C = C_Z(x), H = \overline{G\cdot x}, V = Z \text{ et } \mathscr{L} = (\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}|_Z$$

satisfont aux hypothèses du dernier lemme. Or,

- l'intersection $C_Z(x) \cap \overline{G\cdot x} = C(x) \cap \overline{G\cdot x} = B\cdot x$ est lisse ;
- $\overline{C_Z(x)}$ et $\overline{G\cdot x}$ sont des sous-variétés irréductibles, respectivement $B-$stable et $G-$stable. Elles s'intersectent donc proprement dans $G.\overline{C_Z(x)} = Z$ d'après [B98, ii) du théorème §1.4]. A fortiori, $C_Z(x)$ qui est un ouvert de $\overline{C_Z(x)}$ et qui rencontre $\overline{G\cdot x}$ (au moins en x), l'intersecte proprement dans Z. Dès lors :

$$\operatorname{codim}(C_Z(x) \cap \overline{G\cdot x}, \overline{G\cdot x}) = \operatorname{codim}(C_Z(x), Z)\ .$$

– $\mathscr{L}$ est un faisceau localement libre de rang fini sur Z car les faisceaux $\mathscr{M}|_Z$, $(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee, \omega_{Z/X}$ le sont aussi.

Pour terminer la démonstration du théorème IV.3.1, il reste à montrer que : $\bigcap_{n\geq 0} M_n^m = (0)$; il suffit pour cela d'appliquer le corollaire II.3.2.1 aux faisceaux

$$(\mathcal{I}_Z^m/\mathcal{I}_Z^{m+1})^\vee \underset{\mathscr{O}_Z}{\otimes} \mathscr{M}\,|_Z \ ,$$

à $C = C_Z(x)$ et à $F = \overline{G\cdot x}$.

Q.e.d.

* * *

On va se servir de ces filtrations pour analyser les $\mathfrak{g}-B-$modules $H_{By}^{b(y)}(\mathscr{L})$ ($y \in X$, $\mathscr{L}$ faisceau inversible et $G-$linéarisé sur X). En général, ceux-ci ne sont pas de type fini, c'est pourquoi on s'intéressera plutôt à leurs espaces propres généralisés

$$(H_{By}^{b(y)}(\mathscr{L}))_\chi$$

associés aux caractères centraux χ de $\mathfrak{g}$.

IV.4 Suites de composition

On va démontrer ci-dessous (*cf.* le corollaire IV.4.4.1) que pour toute $B-$orbite Ω de codimension b et de rang maximal (*cf.* la définition page 74), et pour chaque χ,

$$(H_\Omega^b(\mathscr{L}))_\chi$$

est un $\mathfrak{g}-B-$module de longueur finie et on va en donner une suite de composition finie dont le gradué associé fait apparaître certains *modules de Verma généralisés*.

Dans le cas où le support est une $B-$orbite de rang maximal, le point important est que les quotients successifs des filtrations de la section précédente (*cf.* le théorème IV.3.1) sont des $\mathfrak{g}-$modules qui ont un caractère central (*cf.* lemme IV.4.3 et la sous-section III.1.1.1).

Pour les groupes de cohomologie à support dans une cellule de Bialynicki-Birula, c'est plus facile car on a affaire à des $\mathfrak{g}-B-$modules avec un caractère (*cf.* le lemme IV.4.1).

Rappelons en effet que si M est un $\mathfrak{g}-B-$module qui admet un caractère, alors pour chaque caractère central $\chi \in Z(\mathfrak{g})'$, le $\mathfrak{g}-B-$module M_χ est de longueur finie (*cf.* la remarque sur la proposition III.1.4).

* * *

Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible, $G-$linéarisé sur X, sur la droite $\mathscr{L}|_x$, le groupe d'isotropie G_x agit via un caractère que l'on notera $p_x(\mathscr{L})$ (on a déjà posé $p_x(D) \ : \ = p_x(\mathscr{O}_X(D))$, au paragraphe IV.1.1). En particulier, avec les notations de la section III.2.3,

$$\mathscr{L}|_{Gx} = \mathscr{L}_{Gx}(p_x(\mathscr{L})) \text{ et } \mathscr{O}_X(D_j)|_{Gx} = \mathscr{L}_{Gx}(p_x(D_j)) \ .$$

On continue de noter $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_r\}$ la famille des diviseurs limitrophes de X. Les ensembles suivants vont intervenir pour la description de suites de composition :

$$\widetilde{I}_x := \widetilde{I}_{x,G.\overline{C(x)}} = \{D \in \mathcal{D} \ : \ x \in D \text{ mais } C(x) \not\subseteq D\}$$

$$I_x := \{p_x(D) \ : \ D \in \widetilde{I}_x\}$$
$$\widetilde{J}_x := \widetilde{J}_{x,G.\overline{C(x)}} = \{D \in \mathcal{D} \ : \ C(x) \subseteq D\}$$
$$J_x := \{p_x(D) \ : \ D \in \widetilde{J}_x\}$$
$$\text{et } \mathscr{W}_{x,\chi} \ ,$$

l'ensemble des caractères ν de G_x, le groupe d'isotropie de x, tels que :

$$(H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{L}_{Gx}(\nu)))_\chi \neq (0) \ .$$

On garde les notations de la sous-section IV.2.1.

IV.4.1 Cas où le support est une cellule

Les groupes de cohomologie à support $(H_{C(x)}^{c(x)}(\mathscr{L}))$ ayant un caractère (*cf.* le théorème II.3.2), leurs espaces propres généralisés, $(H_{C(x)}^{c(x)}(\mathscr{L}))_\chi$ sont de longueur finie. Plus précisément :

Lemme IV.4.1 *Si $x \in X^T$, si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible, $G-$linéarisé sur X et si χ est un caractère central, alors le $\mathfrak{g} - B-$module $(H_{C(x)}^{c(x)}(\mathscr{L}))_\chi$ a une suite de composition finie :*

$$\left(H_{C(x)}^{c(x)}(\mathscr{L})\right)_\chi = M_0 \supseteq M_1 \ldots \supseteq M_N \supseteq M_{N+1} = (0) \quad (N \geq -1)$$

et il existe une bijection

$$\{0, \ldots, N\} \xrightarrow{\sigma} (p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}.I_x + \mathbb{N}^*.J_x) \bigcap \mathscr{W}_{x,\chi}$$

telle que pour chaque $0 \leq i \leq N$,

$$M_i/M_{i+1} = \left(H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{L}_{Gx}(\sigma(i))\right)_\chi$$

On a noté $p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}.I_x + \mathbb{N}^*.J_x$ l'ensemble des caractères de G_x de la forme :

$$p_x(\mathscr{L}) - \sum_{\delta \in I_x} m_\delta \delta + \sum_{\delta \in J_x} n_\delta \delta$$

où $m_\delta \in \mathbb{N}$ si $\delta \in I_x$ et $n_\delta \in \mathbb{N}^*$ si $\delta \in J_x$.

Remarque : Rappelons que ζ est le sous-groupe à un paramètre grâce auquel sont définies les cellules de Bialynicki-Birula de X.

On verra plus loin que :

$$I_x = \{p_x(D) \ : \ D \text{ est un diviseur limitrophe, } x \in D \text{ et } \langle p_x(D), \zeta \rangle > 0\}$$

et que :

$$J_x = \{p_x(D) \ : \ D \text{ est un diviseur limitrophe et } \langle p_x(D), \zeta \rangle < 0\}$$

(*cf.* la proposition IV.4.2).

Démonstration du lemme IV.4.1 : On reprend les notations du théorème IV.3.1 avec $\mathscr{M} = \mathscr{L}$, on pose $M := H^{c(x)}_{C(x)}(\mathscr{L})$, on note pour tout $m \geq -1$

$$\pi_{m+1} : M^{m+1} \twoheadrightarrow M^{m+1}/M^m$$

la surjection canonique (par convention, $M^{-1} := (0)$) et

$$\widetilde{M}_n^{m+1} := \pi_{m+1}^{-1}(M_n^m) \ .$$

On trouve ainsi en prenant les composantes associées à χ une filtration croissante :

$$M_\chi = \bigcup_{m \geq 0} M_\chi^m$$

et des filtrations décroissantes :

$$\ldots \supseteq \widetilde{M}_{0,\chi}^{m+1} \supseteq \widetilde{M}_{1,\chi}^{m+1} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{M}_{n,\chi}^{m+1} \supseteq \ldots$$

$$\ldots \supseteq \widetilde{M}_{0,\chi}^{m} \supseteq \widetilde{M}_{1,\chi}^{m} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{M}_{n,\chi}^{m} \supseteq \ldots$$

$$\ldots$$

Or M_χ et a fortiori les M_χ^p sont de longueur finie (*cf.* la remarque de la proposition III.1.4). Il existe donc un entier m_0 et pour chaque p, un entier n_p tels que :

$$M_\chi = M_\chi^{m+1} \text{ si } m \geq m_0 \text{ et } M_{n,\chi}^p = (0) \text{ si } n \geq n_p \ .$$

On obtient une suite de composition finie :

$$M_\chi = M_\chi^{m_0+1}$$

$$= \widetilde{M}_{0,\chi}^{m_0+1} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{M}_{n_{m_0+1},\chi}^{m_0+1} =$$

$$\widetilde{M}_{0,\chi}^{m_0} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{M}_{n_{m_0},\chi}^{m_0} =$$

$$\widetilde{M}_{0,\chi}^{m_0-1} \supseteq \ldots \supseteq (0)$$

dont les quotients successifs non triviaux sont les $\mathfrak{g}-B-$modules non nuls parmi les

$$\left(H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{M}_n^m) \right)_\chi \quad ,$$

$m, n \geq 0$. Or, d'après le lemme d'excision $H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{M}_n^m) = H_{Bx}^{\widetilde{b}(x)}(\mathscr{M}_n^m|_{Gx})$.

D'autre part, si on pose $Z := G.\overline{C(x)}$, on a :

$$\mathscr{M}_n^m = \bigoplus_E \mathscr{O}_X(E) \underset{\mathscr{O}_{Gx}}{\otimes} \mathscr{L}|_{\overline{Gx}}$$

où E décrit l'ensemble de diviseurs $\mathcal{D}_{m,n}^{x,Z}$ (*cf.* le théorème IV.3.1).

D'où, en tant que faisceaux $G-$linéarisés :

$$\mathscr{M}_n^m|_{Gx} = \bigoplus_\nu \mathscr{L}_{Gx}(p_x(\mathscr{L}) + \nu)$$

et en tant que $\mathfrak{g} - B-$modules :

$$\left(H_{Bx}^{\widetilde{b(x)}}(\mathscr{M}_n^m)\right)_\chi = \bigoplus_\nu \left(H_{Bx}^{\widetilde{b(x)}}(\mathscr{L}_{Gx}(p_x(\mathscr{L}) + \nu))\right)_\chi$$

où l'on somme, à chaque fois, sur les poids ν de la forme :

$$\nu = -\sum_{\delta \in I_x} n_\delta \delta + \sum_{\delta \in J_x} n_\delta \delta$$

avec, pour tout $\delta \in I_x$ (respectivement J_x), $n_\delta \in \mathbb{N}$ (respectivement $n_\delta \in \mathbb{N}^*$) et $\sum_{\delta \in I_x} n_\delta = n$ (respectivement $\sum_{\delta \in J_x} n_\delta = m$).

La réunion sur m, $n \geq 0$ de ces ensembles de caractères est exactement :

$$-\mathbb{N}I_x + \mathbb{N}^* J_x \ .$$

Finalement, on trouve que $M_\chi = (H_{C(x)}^{c(x)}(\mathscr{L}))_\chi$ possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont les $\mathfrak{g} - B-$modules

$$\left(H_{Bx}^{\widetilde{b(x)}}(\mathscr{L}_{Gx}(\xi))\right)_\chi \text{ non nuls}$$

tels que $\xi \in p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}I_x + \mathbb{N}^* J_x$. De plus, comme les caractères de l'ensemble $I_x \bigcup J_x$ sont $\mathbb{Z}-$linéairement indépendants (*cf.* la proposition IV.1.1), chaque ξ élément de $p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}I_x + \mathbb{N}^* J_x$ apparaît au plus une fois dans cette suite de composition. **Q.e.d.**

Pour déterminer les ensembles I_x et J_x, il s'agit de savoir si, étant donnés un $x \in X^T$ et un diviseur limitrophe D,

$$C(x) \subseteq D \text{ ou } C(x) \not\subseteq D \ .$$

La proposition suivante donne une réponse à cette question en fonction du signe de $\langle p_x(D), \zeta \rangle$ où ζ est le sous-groupe à un paramètre avec lequel sont définies les cellules.

Proposition IV.4.2 *Soient D un diviseur limitrophe et $x \in X^T$. On a :*

$$[x \in D \ \textit{et}\ C(x) \not\subseteq D] \Leftrightarrow \langle p_x(D), \zeta \rangle > 0 \ .$$

Cette proposition justifie la remarque qui suit le lemme IV.4.1.

Démonstration : Sont équivalentes :

$$x \in D \text{ et } C(x) \underset{\neq}{\subseteq} D$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \neq C(x) \cap D \underset{\neq}{\subseteq} C(x)$$

$$\Leftrightarrow x \in D \text{ et } T_x(C(x) \cap D) \underset{\neq}{\subset} T_x C(x)$$

$$\Leftrightarrow x \in D \text{ et } (T_x D)_+ \underset{\neq}{\subset} (T_x X)_+ \quad (*)$$

(pour cette dernière équivalence, *cf.* le théorème II.3.1).

Or, si $x \in D$, sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(-D)|_x &= (\mathcal{O}_X(-D)|_D)|_x \\ &= (\mathcal{I}_D/\mathcal{I}_D^2)|_x \\ &= (T_x X/T_x D)^* \quad . \end{aligned}$$

On remarque qu'en particulier, $p_x(D)$ est un poids de $T_x X/T_x D$ donc de $T_x X$ et $\langle p_x(D), \zeta \rangle \neq 0$.

On a ainsi une somme directe de $T-$modules :

$$T_x X = T_x D \oplus (\mathcal{O}_X(-D)|_x)^* \quad .$$

En prenant les parties positives, on trouve :

$$(\diamond) \quad (T_x X)_+ = \begin{cases} (T_x D)_+ \oplus (\mathcal{O}_X(-D)|_x)^* & \text{si } \langle p_x(D), \zeta \rangle > 0 \\ (T_x D)_+ & \text{si } \langle p_x(D), \zeta \rangle < 0 \end{cases}$$

De plus, si $x \notin D$, alors $p_x(D) = 0$ car c'est le poids de la droite :

$$\mathcal{O}_X(D)|_x = \mathcal{O}_X|_x \quad .$$

Il en résulte, par $(*)$ et $(\diamond)$, l'équivalence voulue :

$$x \in D \text{ et } C(x) \underset{\neq}{\subset} D \Leftrightarrow \langle p_x(D), \zeta \rangle > 0 \quad .$$

Q.e.d.

IV.4.2 Cas où le support est une $B-$orbite de rang maximal

On suppose toujours que $x \in X^T$. On note encore P le sous-groupe parabolique de G associé à X et Q son groupe parabolique opposé (*cf.* les paragraphes IV.1.2 et IV.1.3).

Dans cette section, on fait l'hypothèse que l'orbite $G{\cdot}x$ est fermée.

Alors d'après le paragraphe IV.1.3, $G{\cdot}x \simeq G/Q$. Il existe donc un $w \in W$ tel que $x = w.z_x$ pour un unique $z_x \in X$ fixé par Q. On peut choisir $w \in W^Q := \{w \in W \ : \ \forall\, \alpha \in \Phi_L^+, w(\alpha) > 0\}$ (où L est le sous-groupe de Levi $P \cap Q$ et Φ_L^+ l'ensemble de ses racines positives par rapport à $B \cap L$) et, dans ce cas, un tel w est unique et sa longueur vérifie : $l(w) = \mathrm{codim}(BwQ/Q, G/Q)$ (*cf.* [B98, §1.1]) ; on le note w_x. En résumé, il existe un unique couple $(w_x, z_x) \in W^Q \times X^Q$ tel que $x = w_x.z_x$.

Remarque : En particulier, $l(w_x) = \widetilde{b}(x)$.

Cela étant dit, on a :

$$\begin{aligned} p_x(\mathscr{L}|_{Gx}) = p_{w_x z_x}(\mathscr{L}|_{Gx}) &= w_x.(p_{z_x}(\mathscr{L}|_{Gx})) \\ &= w_x.(p_{z_x}(\mathscr{L}|_{Gx})) \\ &= w_x.(p_{Q/Q}(\mathscr{L}|_{G/Q})) \end{aligned}$$

et, en conséquence, $\mathscr{W}_{x,\chi}$ est l'ensemble des caractères ν de $G_x = w_x Q w_x^{-1}$ tels que :

$$(H^{\widetilde{b(x)}}_{Bx}(\mathscr{L}_{Gx}(\nu)))_\chi = (H^{l(w_x)}_{Bw_xQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(w_x^{-1}.\nu)))_\chi \neq (0)$$

(où l'on a repris, pour $\mathscr{L}_{Gx}(\ \cdot\ )$ et $\mathscr{L}_{G/Q}(\ \cdot\ )$, les notations concernant les faisceaux inversibles sur les espaces homogènes de la section III.2.3).

Mais :

Lemme IV.4.3 ([Br, §3, prop. 3] et [BB82, prop. 3.5]) *Avec les notations ci-dessus, si $w \in W^Q$ et si λ est un caractère de Q, alors le $\mathfrak{g}-B-$module $H^{l(w)}_{BwQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda))$ n'est pas nul et admet χ_λ pour caractère central.*

On appellera les $\mathfrak{g}-B-$modules $H^{l(w)}_{BwQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda))$ ci-dessus *modules de Verma généralisés.*

Ainsi, $\mathscr{W}_{x,\chi}$ est aussi l'ensemble des caractères ν de $w_x Q w_x^{-1}$ tels que $\chi_{w_x^{-1}.\nu} = \chi$ *c-à-d* l'ensemble :

$$w_x.\{\nu \in X^*(Q)\ :\ \chi_\nu = \chi\}$$

($X^*(Q)$ désigne le réseau des caractères de Q). C'est un ensemble fini de cardinal $\leq |W|$ (*cf.* [Di, prop. 7.4.7]).

On va déduire de tout cela que

$$(H^{c_Z(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L})_\chi$$

et en corollaire que

$$(H^{b(y)}_{By}(\mathscr{L}))_\chi$$

sont des $\mathfrak{g}-B-$modules de longueur finie pour tout Z, sous-variété fermée, irréductible et $G-$invariante de $G.\overline{C(x)}$, et tout $y \in C(x)$.

A cette fin, on rappelle que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des diviseurs limitrophes de x et que :

$$\widetilde{I}_{x,Z} = \{D \in \mathcal{D}\ :\ x \in D \text{ et } Z \not\subseteq D\}\ ,$$
$$\widetilde{J}_{x,Z} = \{D \in \mathcal{D}\ :\ Z \subseteq D\}\ .$$

On note aussi :

$$I_{x,Z} :\ = \left\{p_x(D)\ :\ D \in \widetilde{I}_{x,Z}\right\}\quad,\quad J_{x,Z} :\ = \left\{p_x(D)\ :\ D \in \widetilde{J}_{x,Z}\right\}$$

et $-\mathbb{N}I_{x,Z} + \mathbb{N}^* J_{x,Z}$ l'ensemble des caractères de G_x de la forme $-\sum_{\delta \in I_{x,Z}} n_\delta \delta + \sum_{\delta \in J_{x,Z}} n_\delta \delta$ avec, pour tout $\delta \in I_{x,Z}$ (respectivement $J_{x,Z}$), $n_\delta \in \mathbb{N}$ (respectivement $n_\delta \in \mathbb{N}^*$).

Théorème IV.4.4 *Pour tout caractère central χ de $\mathfrak{g}$, le $\mathfrak{g}-B-$module*

$$H^{c_Z(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L})_\chi$$

admet une suite de composition finie

$$H^{cz(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L})_\chi = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_N \supseteq M_{N+1} = (0)$$

dont les quotients successifs M_i/M_{i+1} $0 \leq i \leq n$ *sont à permutation près les*

$$H^{l(w_x)}_{Bx}(\mathscr{L}_{Gx}(\nu))$$

où ν *décrit l'ensemble*

$$(p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}I_{x,Z} + \mathbb{N}^* J_{x,Z}) \cap w_x.\{\nu \in X^*(Q) \ : \ \chi_\nu = \chi\} \ .$$

Remarque : En particulier, on a :

$$(H^{cz(X)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L}))_\chi = (0) \Leftrightarrow (p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}I_{x,Z} + \mathbb{N}^* J_{x,Z}) \cap \mathscr{W}_{x,\chi} = \emptyset$$

Démonstration : En reprenant *mutatis mutandis* la démonstration du lemme IV.4.1, on trouve cette fois que les $\mathfrak{g} - B-$modules

$$(H^{cz(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L}))_\chi$$

ont une suite de composition, *a priori* infinie, dont les quotients successifs non nuls sont à permutation près :

$$H^{\widetilde{b}(x)}_{Bx}(\mathscr{L}|_{Gx}(\xi))$$

avec $\xi \in (p_x(\mathscr{L}) - \mathbb{N}I_{x,Z} + \mathbb{N}^* J_{x,Z}) \cap \mathscr{W}_{x,\chi}$.

Or, $\mathscr{W}_{x,\chi}$ est fini.

Par conséquent, pour chaque caractère central χ, il n'y a qu'un nombre fini de quotients successifs non nuls parmi les :

$$H^{\widetilde{b}(x)}_{Bx}(\mathscr{L}|_{Gx}(\xi))$$

(on utilise encore que $I_{x,Z} \bigcup J_{x,Z}$ est constitué de poids $\mathbb{Z}-$linéairement indépendants).

On a donc une suite de composition finie pour chaque

$$(H^{cz(x)}_{C_Z(x)}(\mathscr{L}))_\chi \ .$$

Q.e.d.

D'après [B01, §3, théorème 3], lorsque $y \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $y \in C(x)$ pour un $x \in X^T$ dont l'orbite $G{\cdot}x$ est fermée ;

(ii) la $B-$orbite $B{\cdot}y$ est de rang maximal (*cf.* la définition page 74).

On déduit de ce fait et du théorème précédent le :

Corollaire IV.4.4.1 *Soit* Ω *une* $B-$*orbite de* X *de rang maximal. Soient* b *la codimension de* Ω *dans* X *et* x *l'unique point fixe de* T *tel que* $\Omega \subseteq C(x)$. *On garde les notations* w_x, Q *et* $\mathscr{L}_{Gx}(\,\cdot\,)$ *du début de la section.*

Alors pour tout caractère central χ de $\mathfrak{g}$, $\left(H^b_\Omega(\mathscr{L})\right)_\chi$ est un $\mathfrak{g}-B-$module de type fini qui admet une suite de composition finie :

$$\left(H^b_\Omega(\mathscr{L})\right)_\chi = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_N \supseteq M_{N+1} = (0) \ .$$

dont les quotients successifs M_i/M_{i+1} $0 \leq i \leq n$ sont à permutation près les « modules de Verma généralisés » (cf. la page 92) :

$$H^{l(w_x)}_{Bx}(\mathscr{L}_{Gx}(\nu))$$

où ν décrit l'ensemble

$$\left(p_x(\mathscr{L}) + \mathbb{Z}I_{x,\overline{G.\Omega}} + \mathbb{N}^* J_{x,\overline{G.\Omega}}\right) \cap w_x.\{\nu \in X^*(Q) \ : \ \chi_\nu = \chi\} \ .$$

Remarque : Puisque $x = w_x.z_x$, que $p_x(\mathscr{L}) = w_x.p_{z_x}(\mathscr{L})$ et que :

$$H^{l(w_x)}_{Bx}(\mathscr{L}_{Gx}(\nu)) \simeq H^{l(w_x)}_{Bw_x.z_x}(\mathscr{L}_{Gz_x}(w_x^{-1}.\nu)) \simeq H^{l(w_x)}_{Bw_xQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(w_x^{-1}\nu)) \ ,$$

ce corollaire signifie aussi que

$$\left(H^b_\Omega(\mathscr{L})\right)_\chi$$

admet une suite de composition finie dont les quotients successifs sont à permutation près les

$$H^{l(w_x)}_{Bw_xQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(\nu))$$

où, cette fois-ci, ν décrit l'ensemble :

$$\left(p_{z_x}(\mathscr{L}) + \mathbb{Z}I_{z_x,\overline{G.\Omega}} + \mathbb{N}^* J_{z_x,\overline{G.\Omega}}\right) \cap W\chi \ .$$

Démonstration :

Soit y tel que $\Omega = B \cdot y$. Posons $C := C_{\overline{Gy}}(x)$ et F le diviseur de X qui est la réunion des diviseurs limitrophes D contenant x mais non y.

D'après le théorème IV.2.2 :

$$H^b_{By}(\mathscr{L}) = \bigcup_{n \geq 0} H^b_C(\mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}) \ .$$

Soit χ un caractère central. On a une réunion croissante de $\mathfrak{g}-B-$modules :

$$(H^b_{By}(\mathscr{L}))_\chi = \bigcup_{n \geq 0} (H^b_C(\mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}))_\chi \ \ (*) \ .$$

S'il s'agit d'une union finie, *c-à-d* si à partir d'un rang N, on a :

$$\forall\, n \geq N, \ (H^b_{By}(\mathscr{L}))_\chi = (H^b_C(\mathscr{L} \otimes \mathcal{I}_F^{-n}))_\chi$$

alors le théorème précédent permet de conclure. En effet, d'une part :

$$\mathcal{I}_F^{-n} = \mathscr{O}_X(n. \sum_{i \,:\, D_i \ni x, D_i \not\ni y} D_i)$$

$$\Rightarrow p_x(\mathscr{L}\otimes \mathcal{I}_F^{-n}) = p_x(\mathscr{L}) + n.(\sum_{i\,:\,D_i\ni x, D_i\not\ni y} p_x(D_i))$$
$$= p_x(\mathscr{L}) + n.(\sum_{\delta\in \widetilde{I}_{x,\overline{Gy}}} p_x(\delta))$$
$$= p_x(\mathscr{L}) + n.(\sum_{\delta\in I_{x,\overline{Gy}}} \delta)$$

et d'autre part : $\bigcup_{n\geq 0}(n-\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$.

En fait, la réunion $(*)$ est bien finie. Pour le vérifier, il suffit de montrer que pour tout $\mathfrak{g}-B-$module simple $L(\lambda)$, de plus haut poids $\lambda\in\mathfrak{X}$, la multiplicité

$$[(H_C^b(\mathscr{L}\otimes \mathcal{I}_F^{-n}))_\chi : L(\lambda)]$$

est finie et majorée indépendamment de n.

Or, le théorème ci-dessus entraîne que :

$$[(H_C^b(\mathscr{L}\otimes \mathcal{I}_F^{-n}))_\chi : L(\lambda)]$$
$$= \sum_\nu [H^{l(w_x)}_{Bw_xQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(w_x^{-1}.\nu)]$$

(où ν parcourt l'ensemble $p_x(\mathscr{L}\otimes \mathcal{I}_F^{-n}) - \mathbb{N}I_{x,\overline{Gy}} + \mathbb{N}^* J_{x,\overline{Gy}} \cap w_x.\{\mu\in X^*(Q) : \chi_\mu = \chi\}$)

$$\leq \sum_{\nu\,:\,\chi_\nu=\chi} [H^{l(w_x)}_{Bw_xQ/Q}(\mathscr{L}_{G/Q}(\nu)) : L(\lambda)]$$

qui est un entier indépendant de n car $\{\nu : \chi_\nu = \chi\}$ est fini de cardinal $\leq |W|$.

Q.e.d.

* * *

Lorsque X est une compactification régulière d'un groupe réductif G, considéré comme une $G\times G-$variété, tout point fixe de $T\times T$ appartient à une $G\times G-$orbite fermée, autrement dit, toutes les $B\times B^- -$orbites sont de rang maximal, (*cf.* [B98, proposition A1] et [DCP]). Donc, pour ces variétés, tous les groupes de cohomologie à support dans les $B\times B^- -$orbites sont de longueur finie et ont une suite de composition donnée par le corollaire ci-dessus. Cela s'applique en particulier aux groupes $H^i_{BwB^-}(\mathscr{O}_G)$ vu en section III.4, *cf.* aussi V.3.7.

Mais en général, dans une variété régulière, les orbites d'un sous-groupe de Borel ne sont pas toutes de rang maximal et les groupes de cohomologie à support n'ont pas toujours de filtrations avec des modules de Verma généralisés comme gradués associés. Par exemple :

Considérons $H := GL(2,\mathbb{C})$ comme un sous-groupe fermé de $G := PGL(3,\mathbb{C})$ via l'injection :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d\end{bmatrix} .$$

Parmi les compactifications régulières de l'espace homogène G/H, il y a: $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^*}$, où l'on a noté $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^{2^*}$ l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ et son dual $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{3^*})$ (*cf.* [BB96, §2.1]).

L'action de G sur X est diagonale:

$$\forall\, g \in PGL(3,\mathbb{C}),\ \forall\, v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^{3^*} \setminus \{0\},$$

$$g.([v],[\lambda]) = ([g.v],[g.\lambda]) \ .$$

Pour cette action, X admet deux G−orbites:

$$G/H = \{([v],[\lambda]) \in X \ : \ \lambda(v) \neq 0\}$$

qui est ouverte et:

$$D = \{([v],[\lambda]) \in X \ : \ \lambda(v) = 0\}$$

qui est fermée.

Choisissons un sous-groupe de Borel et un tore maximal de G:

$$B : = \left\{ \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix} \ : \ b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} \neq 0 \right\}$$

$$\text{et } T : = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \ : \ x_1x_2x_3 \neq 0 \right\} \ .$$

La variété G/H est de rang 1.

En effet, si on note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ sa base duale, alors le point $x_1 : = ([e_3],[e_1^* + e_2^* + e_3^*])$ a pour stabilisateur dans B:

$$B_{x_1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in B \right\} \ .$$

D'où:

$$\begin{aligned} \dim B \cdot x_1 &= \dim B - \dim B_{x_1} \\ &= 5 - 1 = 4 \\ &= \dim X \ . \end{aligned}$$

Ainsi, $B \cdot x_1$ est la B−orbite ouverte de G/H et:

$$\begin{aligned} r(G/H) &= r(B \cdot x_1) \\ &= \dim T - r(B_{x_1}) \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

D'un autre côté, le point $x_0 : = ([e_3],[e_3^*])$ de X est fixé par T et appartient à l'orbite ouverte G/H. Son stabilisateur (dans B) est

$$B_{x_0} = \left\{ \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix} \in B \right\}$$

et le rang de sa $B-$orbite est :

$$r(B\cdot x_0) = \dim T - r(B_{x_0})$$

$$= \dim T - \dim T$$

$$= 0 \ .$$

La $B-$orbite $B\cdot x_0$ n'est donc pas de rang maximal.

Remarquons également que Bx_0 est une cellule de Bialynicki-Birula (de codimension 1 dans X). On peut donc calculer le caractère du $T-$module $H^1_{Bx_0}(\mathscr{O}_X)$ à l'aide de la formule du théorème II.3.2 ; on trouve :

$$[H^1_{Bx_0}(\mathscr{O}_X)] = \frac{e^{-(\alpha+2\beta)}}{(1-e^{-(\alpha+\beta)})^2(1-e^{-\beta})^2}$$

où α et βsont les caractères de T suivants :

$$\alpha : \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{x_1}{x_2}$$

$$\beta : \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{x_2}{x_3}$$

(ce sont les racines simples associées à G, B, T).

Ce caractère s'exprime comme une somme de caractères de $sl(3,\mathbb{C})-$modules de Verma (on note $sl(3,\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $PGL(3,\mathbb{C})$) :

$$[H^1_{Bx_0}(\mathscr{O}_X)] = \sum_\lambda n_\lambda [M(\lambda)]$$

où λ décrit l'ensemble des poids de la forme $-\mathbb{N}\alpha - \mathbb{N}\beta$.

En se servant de la remarque qui suit la proposition III.1.5, on s'aperçoit que :

$$n_\lambda = \left[(1-e^{-\alpha})(1-e{-}\beta)(1-e^{-(\alpha+\beta)})\frac{e^{-\alpha-2\beta}}{(1-e^{-\alpha-\beta})^2(1-e^{-\beta})^2}\right](\lambda)$$

$$= \left[\frac{(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha-2\beta}}{(1-e^{-\alpha-\beta})(1-e^{-\beta})}\right](\lambda) \ .$$

En particulier, $n_{-2\alpha-2\beta} = -1 \ < 0$.

Il résulte alors de ce coefficient négatif que le $\mathfrak{g}-B-$module $H^1_{Bx_0}(\mathscr{O}_X)$ ne peut pas avoir de filtration dont le gradué associé soit une somme directe de modules de Verma tordus $M^w(\lambda)$.

Chapitre V

Compactifications des groupes réductifs

Pour les notations, *cf.* le début du chapitre III.

Une **COMPACTIFICATION DE G** est une variété complète normale qui contient G comme ouvert et où se prolonge l'action de $G \times G$ sur G (par multiplication à gauche et à droite). On va s'intéresser aux compactifications régulières : celles qui sont des variétés régulières pour l'action de $G \times G$ (*cf.* le chapitre précédent).

On va déterminer les groupes de cohomologie de tous les fibrés en droites sur les compactifications de G. On commencera par le cas particulier de la compactification magnifique pour lequel l'énoncé et sa démonstration sont plus simples.

Rappelons que si G_{ad} désigne le groupe $G/Z(G)$, alors d'après [B98, prop. A2], toute compactification régulière $\mathbf{X}$ de G *domine* la compactification magnifique $\overline{G_{ad}}$ (*cf.* la section V.2.3). Cela signifie qu'il existe un morphisme

$$\varphi : \mathbf{X} \to \overline{G_{ad}}$$

qui induit la surjection canonique sur G (ce morphisme est forcément $G \times G-$équivariant).

Pour la compactification magnifique et pour les compactifications générales, on rappellera, à chaque fois, une paramétrisation de leurs faisceaux inversibles (à isomorphisme près) avant d'énoncer le résultat principal. Comme ces faisceaux inversibles ne sont pas toujours linéarisés pour $G \times G$ on fera appel dans les deux cas à une isogénie $r : \widetilde{G} \to G$ pour obtenir des faisceaux linéarisés au moins pour $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$.

Pour la démonstration des deux résultats principaux (les théorèmes V.2.2 et V.3.2), on utilisera le théorème de Grothendieck-Cousin.

Pour ce qui concerne la compactification magnifique, on l'emploiera avec une filtration qui fait apparaître, comme termes de la suite spectrale du théorème I.3.1, des groupes de cohomologie à support dans des cellules de Bialynicki-Birula. On étudiera ensuite, grâce aux suites de compositions du lemme IV.4.1 (au chapitre précédent), leurs multiplicités selon les $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$modules simples. Cela permettra de conclure presque immédiatement.

Avec les compactifications générales, l'étude des termes de la suite spectrale du théorème I.3.1 est insuffisante : on a aussi besoin des morphismes impliqués dans cette suite spectrale. C'est pourquoi on utilisera plutôt le théorème I.3.1 dans sa version du complexe de Grothendieck-Cousin. En contrepartie on devra analyser les groupes de cohomologie à support dans les $B \times B^-$−orbites. On conclura en passant par des calculs de caractères de groupes de cohomologie à support dans le cadre torique.

On commence par quelques

V.1 Remarques sur les $G \times G$−modules

V.1.1 Les plus hauts poids

On considére le sous-groupe de Borel $B \times B^-$ de G ; c'est par rapport à lui qu'on ordonne les poids de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$: si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ sont des caractères de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, alors :

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \text{ et } \mu_1 \leq \mu_2$$

pour l'ordre usuel $\leq$ sur $\mathcal{X}$ (défini à partir de B (*cf.* la page 53)).

Pour cet ordre-là, le module de Verma de plus haut poids $(\lambda, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est :

$$M(\lambda, \mu) = U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}^-)}{\otimes} \mathbb{K}_{\lambda,\mu}$$

et l'ensemble des poids dominants est $\mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$.

Si $(\lambda, \mu) \in \mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$, on note

$$L(\lambda, \mu)$$

le $G \times G$−module simple de « plus haut » poids (λ, μ).

L'espace $\mathrm{End}(L(\lambda))$ des endomorphismes de $L(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{X}^+$) muni de l'action de $G \times G$ définie par :

$$\forall\, g_1,\, g_2 \in G,\ \forall\, f \in \mathrm{End}(L(\lambda)),\ \forall\, v \in L(\lambda),$$

$$((g_1, g_2).f)(v) = g_1.f(g_2^{-1}.v) \quad ,$$

est un $G \times G$−module simple. Avec les notations qui précèdent, on a :

$$\mathrm{End}(L(\lambda)) = L(\lambda, -\lambda) \quad .$$

On aura aussi besoin d'une nouvelle action décalée $*$ de $W \times W$:

$$\forall\, w_1, w_2 \in W,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathcal{X},$$

$$(w_1, w_2) * (\lambda, \mu) :\ = (w_1(\lambda + \rho) - \rho,\ w_2(\lambda - \rho) + \rho) \quad .$$

V.1.2 Les multiplicités

Soit M un $G \times G-$module.

Puisque les caractères centraux χ_λ sont deux à deux distincts quand λ décrit $\mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$, l'espace propre généralisé M_{χ_λ} est un $G \times G-$module dont tous les sous-quotients simples sont isomorphes à $L(\lambda)$ (pour tout $\lambda \in \mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$).

En particulier, si $\lambda \in \mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$ et si l'on note d'un indice λ l'espace propre associé à λ, on a :

$$\dim(L(\lambda)_\lambda) = 1$$

(*cf.* [Di, proposition 7.1.8 ii]) ; d'où :

$$[M : L(\lambda)] = [M_{\chi_\lambda} : L(\lambda)] = \dim(M_{\chi_\lambda})_\lambda \ .$$

Par conséquent, la multiplicité est juste la dimension d'un espace propre.

V.2 La compactification magnifique $\overline{\mathrm{G}}$

On suppose ici que G est un groupe semi-simple, adjoint et connexe sur $\mathbb{K}$. En plus des notations du chapitre III, on notera :

$$\widetilde{G} \to G$$

le revêtement universel de G ($\widetilde{G}$ est semi-simple, simplement connexe et $\widetilde{G}/Z(\widetilde{G})$ est isomorphe à G). On notera aussi $\widetilde{B}, \widetilde{B^-}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}, \widetilde{\mathcal{X}}^+, \widetilde{\mathcal{Y}}^+$ les objets correspondant à B, B^-, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}^+$, $\mathcal{Y}^+$, pour $\widetilde{G}$.

De Concini et Procesi ont construit (*cf.* [DCP, §2.1]) la compactification « magnifique », ou « canonique » de G†:

$$\overline{G} \ .$$

On en rappellera une construction en V.2.3.

V.2.1 Les faisceaux inversibles sur $\overline{G}$

$\overline{G}$ n'a qu'une seule $G \times G-$orbite fermée, que l'on nomme $\mathcal{O}_\Delta$. En tant que $G \times G-$variétés, on a :

$$\mathcal{O}_\Delta \simeq G/B^- \times G/B$$

(*cf.* [DCP]).

On se sert de $\mathcal{O}_\Delta$ pour paramétrer les faisceaux inversibles sur $\overline{G}$. En effet, la restriction à $\mathcal{O}_\Delta$ induit un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(\overline{G}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_\Delta) \simeq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ [\mathscr{L}] & \longmapsto & [\mathscr{L}_{|\mathcal{O}_\Delta}] \end{array}$$

(où l'on note entre [ ] la classe d'isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathcal{O}_\Delta}-$modules d'un faisceau inversible). Ce morphisme vérifie le :

Lemme V.2.1 ([DCP, §4]) *La restriction à $\mathcal{O}_\Delta$ est injective d'image :*

$$\{[\mathscr{L}_{G/B^- \times G/B}(\lambda, -\lambda)] \ : \ \lambda \in \widetilde{\mathcal{X}}\}$$

† et plus généralement de toute variété symétrique.

Étant donné $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, on peut trouver un faisceau inversible sur $\overline{G}$, $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$linéarisé (et cette linéarisation est unique) représentant de l'antécédent de $[\mathscr{L}(\lambda, -\lambda)]$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ (Cf. [KKLV, rem. p. 67, prop. 4.6 p. 74], [KKV, prop. 2.3 p. 81] et [BP, 1.]). Pour chaque $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, on choisit, une fois pour toutes, un tel représentant $\mathscr{L}_\lambda$.

Remarque : Si $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, la fibre de $\mathscr{L}_\lambda$ en le point $B^- \times B$ de $\mathcal{O}_\Delta$ est :

$$\mathbb{K}_{\lambda, -\lambda} \ ,$$

la droite affine munie de l'action de $\widetilde{B^-} \times \widetilde{B}$ via le poids $(\lambda, -\lambda)$.

V.2.2 Le résultat principal

Comme $\overline{G}$ est une $G \times G-$variété (a fortiori une $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$variété) et les faisceaux $\mathscr{L}_\lambda$ sont $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$linéarisé sur $\overline{G}$, chaque groupe de cohomologie $H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda)$ est un $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$module rationnel. Il se décompose donc en une somme directe de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$modules simples avec certaines multiplicités. Pour les exprimer, on définit les ensembles :

$$I_t : = \{\alpha \in \Delta \ : \ t(\alpha) > 0\} \text{ et } J_t : = \{\alpha \in \Delta \ : \ t(\alpha) < 0\} \ .$$

Théorème V.2.2 *Soit λ un poids entier. On a :*

$$H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+} m_\lambda^i(\mu) \mathrm{End}(L(\mu))$$

où $m_\lambda^i(\mu)$ est le nombre de $t \in W$ tels que

$$2l(t) + |J_t| = i \ \textit{et}\ t^{-1} * \mu \in \lambda - \mathbb{N} I_t + \mathbb{N}^* J_t \ .$$

Remarques :

1° On retrouve les faits connus suivants (cf. [DCP]) :

- si $i = 0$, $H^0(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+, \mu \leq \lambda} \mathrm{End}(L(\mu))$;
- si λ est dominant, $H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

2° Les multiplicités sont majorées indépendamment de λ (par exemple en degré i, par le nombre de $t \in W$ tels que $2l(t) + |J_t| = i$) et elles peuvent être plus grandes que 2 : par exemple si $G = \mathrm{PSO}(8, \mathbb{C})$ et $i = 5$, alors pour tout $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$, il existe un poids entier λ tel que $m_\lambda^5(\mu) = 3$.

On retrouve aussi la *dualité de Serre* pour les faisceaux inversibles sur $\overline{G}$.

En effet, si $\omega_{\overline{G}}$ est le faisceau canonique de $\overline{G}$, montrer que :

$$\forall\, i \geq 0, \forall\, \lambda \in \widetilde{\mathfrak{X}},\ H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) \simeq \left(H^{\dim G - i}(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda^\vee \underset{\mathcal{O}_{\overline{G}}}{\otimes} \omega_{\overline{G}}) \right)^*$$

revient à vérifier que pour tout $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$, les multiplicités

$$\left[H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) : \mathrm{End}(L(\mu)) \right]$$

et

$$\left[(H^{\dim G-i}(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda^\vee \underset{\mathscr{O}_{\overline{G}}}{\otimes} \omega_{\overline{G}}) : \mathrm{End}(L(-w_0\mu))\right]$$

sont égales.

Or, $\mathscr{L}_\lambda^\vee = \mathscr{L}_{-\lambda}$ et :

$$\omega_{\overline{G}} = \mathscr{L}_{-2\rho-\sum_{\alpha\in\Delta}\alpha}$$

(*cf.* [Str, §3]).

De plus, si $t \in W$, on a :

$$t^{-1} * (-w_0\mu) = -t^{-1}w_0\mu + t^{-1}\rho - \rho = -t^{-1}w_0(\mu+\rho) - \rho$$

$$= -(t^{-1}w_0(\mu+\rho) - \rho) - 2\rho = -((t^{-1}w_0) * \mu) - 2\rho$$

et :

$$(\diamond) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2l(t) + |J_t| = \dim G - i \\ t^{-1} * (-w_0\mu) \in -\lambda - 2\rho - \sum_{\alpha\in\Delta}\alpha - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^*J_t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2l(t) + |J_t| = 2l(w_0) + |\Delta| - i \\ -(t^{-1}w_0) * \mu \in -\lambda - \mathbb{N}^*I_t + \mathbb{N}J_t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2l(w_0t) + |I_t| = i \\ -((w_0t)^{-1}) * \mu \in -\lambda - \mathbb{N}^*I_t + \mathbb{N}J_t \end{array} \right.$$

Or, $I_t = J_{w_0t}$ et $J_t = I_{w_0t}$ d'où :

$$(\diamond) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2l(w_0t) + |J_{w_0t}| = i \\ -((w_0t)^{-1}) * \mu \in -\lambda - \mathbb{N}^*J_{w_0t} + \mathbb{N}I_{w_0t} \end{array} \right.$$

Il en résulte, grâce à la bijection : $t \in W \mapsto w_0t \in W$ et à la formule du théorème, que les multiplicités sont bien égales.

* * *

Exemple : Lorsque $G = PGL(3,\mathbb{C})$, on peut montrer que le nombre $2l(t)+|J_t|$ ne peut prendre que les valeurs 0, 3, 5, 8. On a donc, pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $\overline{PGL(3,\mathbb{C})}$:

$$H^i(\overline{PGL(3,\mathbb{C})}, \mathscr{L}) = (0) \text{ si } i \notin \{0,3,5,8\} \ .$$

On vérifie aussi que les multiplicités $m_\lambda^i(\mu)$ sont 0 ou 1.

V.2.3 Construction de $\overline{G}$

Voici les grandes lignes d'une construction de $\overline{G}$, due à De Concini et Procesi (*cf.* [DCP, §2.1] et aussi [Str]) :

Soit $L(\lambda)$ un $\widetilde{G}$−module irréductible de plus haut poids λ, dominant et régulier.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathrm{End}(L(\lambda)) \\ g & \longmapsto & (v \mapsto g.v) \end{array}$$

vérifie :

$$(*) \ \ \varphi_1(g) \in \mathbb{K}.\mathrm{id} \Leftrightarrow g \in Z(\widetilde{G}) \ .$$

En effet :

$\Leftarrow$ **:** car puisque V est irréductible, le centre $Z(\widetilde{G})$ agit via des homothéties (en raison du lemme de Schur) ;

$\Rightarrow$ **:** car λ est régulier.

($*$) permet de définir un morphisme injectif vers l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{End}(L(\lambda))$:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G = \widetilde{G}/Z(\widetilde{G}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{End}(L(\lambda)) \\ g & \longmapsto & [v \mapsto g.v] \end{array} \right. .$$

En fait, φ est une immersion (localement fermée) et on pose $\overline{G} := \overline{\varphi(G)}$.

Ce $\overline{G}$ est indépendant du plus haut poids λ choisi, du moment que λ est régulier.

Exemple : Si $G = PGL(2,\mathbb{C})$, alors $\widetilde{G} = SL(2,\mathbb{C})$. La représentation naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \to & GL(2,\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & (v \in \mathbb{C}^2 \mapsto g(v)) \end{array}$$

fait de $\mathbb{C}^2$ un $\widetilde{G}$−module irréductible de plus haut poids :

$$\frac{\alpha}{2} : \left\{ \begin{array}{ccc} \widetilde{T} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

qui est dominant et régulier.

L'application φ est l'injection naturelle :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C})) \simeq \mathbb{P}^3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{mod}\, \mathbb{K}^* & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{mod}\, \mathbb{K}^* \end{array} \right.$$

Comme $\dim G = \dim \mathbb{P}^3 = 3$, on a ici $\overline{\varphi(G)} = \overline{PGL(2,\mathbb{C})} = \mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C}))$.

On retrouve la variété projective de l'exemple 2) page 16. Appliqué à cette variété, le théorème V.2.2 donne les groupes de cohomologie des faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C}))$. Avec les notations introduites ci-dessus et à la page 16, on a :

$$\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\alpha,\ \widetilde{\mathfrak{X}} = \mathbb{Z}\frac{\alpha}{2},\ \widetilde{\mathfrak{X}}^+ = \mathbb{N}\frac{\alpha}{2},\ \rho = \frac{\alpha}{2} \text{ et } W = \{1, s_\alpha\}$$

où s_α est la classe de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ modulo le tore $\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{K}^*\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathscr{L}_n$ le faisceau $\mathscr{L}_{n\frac{\alpha}{2}}$; c'est aussi le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(n)$ sur $\mathbb{P}^3 \simeq \mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C}))$.

D'après le théorème V.2.2, la multiplicité $m^i_{n\frac{\alpha}{2}}(m\frac{\alpha}{2})$ est égale au nombre de $t \in \{1, s_\alpha\}$ tels que :

$$2l(t) + |J_t| = i \text{ et } t^{-1}((m+1)\frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} \in n\frac{\alpha}{2} - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^*J_t\ .$$

Il en résulte que si $i = 1$ ou 2, $H^i(\mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C})), \mathscr{L}_n) = (0)$ (pour tout n).

De plus, si on note $L_m := L(m\frac{\alpha}{2})$ le $SL(2,\mathbb{C})-$module simple $S^m(\mathbb{C}^2)$ (*cf.* par exemple [Se66, remarque page IV-7]), on en déduit aussi que :

$$H^0(\mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C})),\mathscr{L}_n) = \bigoplus_{0\leq m\leq n\,:\,m-n\in 2\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L_m)$$

et :

$$H^3(\mathbb{P}(\mathcal{M}(2,\mathbb{C})),\mathscr{L}_n) = \bigoplus_{0\leq m\leq -n-4\,:\,m-n\in 2\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L_m)$$

en tant que $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})-$modules.

V.2.4 Utilisation du complexe de Grothendieck-Cousin

La variété $\overline{G}$ est régulière † et ses diviseurs limitrophes sont indexés par les racines simples :

$$\overline{G}\setminus G = \bigcup_{\alpha\in\Delta} D_\alpha \ .$$

On peut choisir l'indexation des D_α telle que suivant les notations de la section V.2.1 :

$$\forall\,\alpha\in\Delta,\ \mathscr{O}_{\overline{G}}(D_\alpha) = \mathscr{L}_\alpha$$

(*cf.* [DCP], [Str, §3] ou [BP, p. 5]).

Une autre particularité de $\overline{G}$ est que $\mathcal{O}_\Delta \simeq G/B^-\times G/B$, l'unique $G\times G-$orbite fermée, contient tous les $T\times T-$points fixes de $\overline{G}$. En particulier :

$$\overline{G}^{T\times T} = \mathcal{O}_\Delta^{T\times T} = \{x_{w,t}\ :\ w,t\in W\times W\}$$

où $x_{w,t} := wB^-\times tB \in G/B^-\times G/B$.

Il existe un sous-groupe à un paramètre ζ de $T\times T$ tel que

$$\overline{G}^\zeta = \overline{G}^{T\times T} \text{ et } \zeta = (\zeta^+,\zeta^-)\in\mathcal{Y}^+\times\mathcal{Y}^-$$

(*cf.* le début de la section II.3 page 28).

On prend un tel sous-groupe à un paramètre ζ que l'on gardera jusqu'à la fin de la démonstration. On appellera $C_{w,t}$ la cellule de Bialynicki-Birula associée à ζ et au point $x_{w,t}$.

Remarques :

– ζ a été choisi dans $\mathcal{Y}^+\times\mathcal{Y}^-$ de sorte que toutes ces cellules soient $B\times B^-$−stables ;

– on a $\zeta\in\mathcal{Y}^{++}\times -\mathcal{Y}^{++}$ car :

$$\overline{G}^\zeta = \overline{G}^{T\times T} \Rightarrow {\mathcal{O}_\Delta}^\zeta = {\mathcal{O}_\Delta}^{T\times T}$$

$$\Rightarrow \forall\,\alpha\in\Phi^+,\ \langle\alpha,\zeta^+\rangle>0 \text{ et } \langle\alpha,\zeta^-\rangle<0\ .$$

† en tant que $G\times G-$variété

Ces notations étant posées, pour démontrer le théorème précédent, on va utiliser le théorème de Grothendieck-Cousin. Afin de l'appliquer, on a besoin de trouver une filtration « convenable » de $\overline{G}$ par des sous-variétés fermées. On aimerait bien que cette filtration :

$$\overline{G} = Z_0 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$$

soit telle que, pour chaque p, $Z_p \setminus Z_{p+1} = C_{w_p,t_p}$, une cellule de Bialynicki-Birula, car on a déjà des informations sur les groupes de cohomologie à support dans ces sous-variétés (*cf.* le lemme IV.4.1).

Cependant, en général, la famille des cellules ne constitue pas une *stratification* de $\overline{G}$, *c-à-d* que le bord d'une cellule :

$$\partial C : = \overline{C} \setminus C$$

n'est pas toujours une réunion de cellules (de codimension supérieure). Donc, a priori, contrairement aux cas des variétés de drapeaux (*cf.* la section III.3.2) (où les $B-$orbites coïncident avec les cellules) et des variétés toriques (avec les $T-$orbites à la place des cellules) la méthode qui consiste à prendre pour Z_i la réunion des cellules de codimension $\geq i$ n'est pas une filtration par des fermés.

Néanmoins, Bialynicki-Birula a démontré le :

Théorème V.2.3 ([BB76, théorème 3]) *Soit X une variété projective munie d'une action de $\mathbb{K}^*$.*

A chaque composante irréductible X_i de la sous-variété des points fixes $X^{\mathbb{K}^*}$ correspond une cellule

$$C_i : = \{x \in X \ : \ \lim_{a \to 0} a.x \in X_i\} \ .$$

Alors, la décomposition $X = \sqcup_i C_i$ est filtrable, c-à-d il existe une filtration de X

$$X = Z_0 \supseteq \ldots \supseteq Z_m = \emptyset$$

par des fermés Z_p tels que pour tout $p \geq 0$, $Z_p \setminus Z_{p+1}$ soit une des cellules C_i.

Puisque $\overline{G}$ est projective, on peut lui appliquer ce lemme ; on ordonne les cellules de Bialynicki-Birula :

$$C_{w_0,t_0}, C_{w_1,t_1}, \ldots$$

de sorte qu'il existe des fermés Z_p de $\overline{G}$ $(p \geq 0)$ vérifiant :

- $\overline{G} = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \ldots$;
- $\forall\, p \geq 0, Z_p \setminus Z_{p+1} = C_{w_p,t_p}$.

On fixe une telle filtration et on va s'en servir pour appliquer le théorème de Grothendieck-Cousin : il existe une suite spectrale qui converge :

$$(**) \ \ E_1^{p,q} = H^{p+q}_{C_{w_p,t_p}}(\mathscr{L}_\lambda) \Rightarrow H^{p+q}(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) \ .$$

On va maintenant analyser les $H^i_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda)$, qui sont les termes initiaux de cette suite spectrale.

V.2.5 Drapeaux

Soit χ un caractère central de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.
On pose :

$$I_{w,t} : = \{\alpha \in \Delta \,:\, \langle w(\alpha), \zeta^+ \rangle - \langle t(\alpha), \zeta^- \rangle > 0\}$$

$$J_{w,t} : = \{\alpha \in \Delta \,:\, \langle w(\alpha), \zeta^+ \rangle - \langle t(\alpha), \zeta^- \rangle < 0\}$$

(où $\zeta = (\zeta^+, \zeta^-)$).
Remarque : Comme $\zeta^+ \in \mathcal{Y}^{++}$ et $\zeta^- \in \mathcal{Y}^{--}$,

$$I_{t,t} = I_t = \{\alpha \in \Delta \,:\, t(\alpha) > 0\} \text{ et } J_{t,t} = J_t = \{\alpha \in \Delta \,:\, t(\alpha) < 0\}$$

sont indépendants de ζ.
En revanche, si $w \neq t$, $I_{w,t}$ et $J_{w,t}$ dépendent du choix de ζ (parmi les sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{Y}^+ \times \mathcal{Y}^-$ vérifiant $\overline{G}^\zeta = \overline{G}^{T\times T}$. Si par exemple :

$$\zeta^+ = n\rho^\vee \text{ et } \zeta^- = \rho^\vee \text{ avec } n > \max_{\alpha,\beta\in\Phi^+} \frac{\langle \alpha, \rho^\vee \rangle}{\langle \beta, \rho^\vee \rangle}$$

alors $I_{w,t} = I_w$ et $J_{w,t} = J_w$; inversement, si :

$$\zeta^+ = \rho^\vee \text{ et } \zeta^- = n\rho^\vee \text{ avec } n > \max_{\alpha,\beta\in\Phi^+} \frac{\langle \alpha, \rho^\vee \rangle}{\langle \beta, \rho^\vee \rangle}$$

alors $I_{w,t} = I_t$ et $J_{w,t} = J_t$.
On notera $c_{w,t}$ la codimension dans $\overline{G}$ de la cellule de Bialynicki-Birula $C_{w,t}$

Lemme V.2.4 *Si χ n'est pas de la forme $\chi_{\mu,-\mu}$ pour un $\mu \in \widetilde{\mathcal{X}}$, alors :*

$$(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_\chi = (0) \ .$$

Si, en revanche, $\chi = \chi_{\mu,-\mu}$ pour un $\mu \in \widetilde{\mathcal{X}}$, alors le $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B^-}-$module $(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_{\chi_{\mu,-\mu}}$ admet un $(w,t)-$drapeau† *de type :*

$$\{(\nu, -\nu) \,:\, \nu \in (\lambda - \mathbb{N}I_{w,t} + \mathbb{N}^* J_{w,t}) \cap W * \mu\}$$

Démonstration : On remarque d'abord que suivant les notations du lemme IV.4.1 et de la remarque qui le suit (ici, $G\times G$ et $B\times B^-$ jouent les rôles respectifs de G et B, là), on a :

$$I_{x_{w,t}} = \{p_{x_{w,t}}(D_\alpha) \,:\, \langle p_{x_{w,t}}(D_\alpha), \zeta \rangle > 0\}$$

$$J_{x_{w,t}} = \{p_{x_{w,t}}(D_\alpha) \,:\, \langle p_{x_{w,t}}(D_\alpha), \zeta \rangle < 0\}$$

($p_{x_{w,t}}(D_\alpha)$ désigne le poids de la droite $T\times T-$équivariante $\mathscr{O}_{\overline{G}}(D_\alpha)\big|_{x_{w,t}}$.).
Or,

- $x_{w,t} \in \mathcal{O}_\Delta = \bigcap_{\alpha\in\Delta} D_\alpha$;
- $p_{x_{w,t}}(D_\alpha) = (w(\alpha), -t(\alpha))$;
- $\zeta = (\zeta^+, \zeta^-)$;

† *cf.* la définition 8 page 59.

d'où :

$$I_{x_{w,t}} = (w,t).\{(\alpha,-\alpha) \ : \ \alpha \in I_{w,t}\}$$
$$J_{x_{w,t}} = (w,t).\{(\alpha,-\alpha) \ : \ \alpha \in J_{w,t}\}$$

ce qui invite à poser :

$$I^{\pm}_{w,t} :\ = \{(\alpha,-\alpha) \ : \ \alpha \in I_{w,t}\} \text{ et } J^{\pm}_{w,t} :\ = \{(\alpha,-\alpha) \ : \ \alpha \in J_{w,t}\} \ .$$

Ensuite, on a :

$$B \times B^-.x_{w,t} = BwB^-/B^- \times B^-tB/B$$

qui est une $B \times B^-$orbite de codimension $l(w)+l(t)$ dans $G/B^- \times G/B$. Avec les notations du lemme IV.4.1 : $\widetilde{b}(x_{w,t}) = l(w)+l(t)$.

D'après le lemme IV.4.1, le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B^-}$−module $(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_\chi$ admet une suite de composition finie dont les quotients successifs sont à permutation près les :

$$H^{l(w)+l(t)}_{B\times B^- x_{w,t}}(\mathscr{L}_{G\times G x_{w,t}}(\nu))$$

où ν décrit l'ensemble :

$$(p_{x_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda) - \mathbb{N}I_{x_{w,t}} + \mathbb{N}^* J_{x_{w,t}}) \bigcap \mathscr{W}_{x_{w,t},\chi} \ .$$

Or, $p_{x_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda) = (w,t)p_{x_{1,1}}(\mathscr{L}_\lambda) = (w,t).(\lambda,-\lambda)$ et :

$$H^{l(w)+l(t)}_{B\times B^- x_{w,t}}(\mathscr{L}_{G\times G x_{w,t}}(\nu)) \simeq H^{l(w)+l(t)}_{BwB^-/B^-\times B^-tB/B}(\mathscr{L}_{G/B^-\times G/B}((w^{-1},t^{-1}).\nu))$$

qui est un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B^-}$−module avec $\chi_{(w^{-1},t^{-1}).\nu}$ comme caractère central (*cf.* le théorème III.3.1). On en déduit que :

$$\mathscr{W}_{w,t} = (w,t).\{\nu' \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ : \ \chi_{\nu'} = \chi\} \ .$$

On fait maintenant le changement de variables :

$$\widetilde{\nu} = (w^{-1},t^{-1}).\nu$$

et on trouve que $(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_\chi$ a un (w,t)−drapeau de type :

$$((\lambda,-\lambda) - \mathbb{N}I^{\pm}_{w,t} + \mathbb{N}^* J^{\pm}_{w,t}) \bigcap (W \times W)_\chi \ .$$

Comme tous les poids de l'ensemble $(\lambda,-\lambda) - \mathbb{N}I^{\pm}_{w,t} + \mathbb{N}^* J^{\pm}_{w,t}$ sont de la forme $(\mu,-\mu)$, l'intersection ci-dessus est vide si χ n'est pas de la forme $\chi_{\mu,-\mu}$ ($\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}$).

En revanche, si $\chi = \chi_{\mu,\mu}$ pour un $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, alors :

$$(W \times W)_\chi = \{(w_1,w_2) * (\mu,-\mu) \ : \ (w_1,w_2) \in W \times W\}$$

et :

$$(W \times W)_\chi \cap \{(\xi,-\xi) \in \widetilde{\mathfrak{X}}\} = \{(w*\mu, -(w*\mu)) \ : \ w \in W\} \ .$$

D'où le lemme.

Q.e.d.

Avec la terminologie de la section V.1 pour les $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$modules simples, on en déduit le :

Corollaire V.2.4.1 *Selon le $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$module simple de plus haut poids (μ,ν), la multiplicité de $H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda)$ est nulle si $\mu+\nu\neq 0$. Lorsque $\mu+\nu=0$, le $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$module simple de plus haut poids $(\mu,-\mu)$ est* $\mathrm{End}(L(\mu))$ *et on a :*

$$\left[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda):\mathrm{End}(L(\mu))\right]=\begin{cases}1 & \text{si } w=t \textit{ et } \text{si } t^{-1}*\mu\in\lambda-\mathbb{N}I_t+\mathbb{N}^*J_t\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}$$

(pour tout $\mu\in\widetilde{\mathfrak{X}}^+$).

Démonstration : Si $L(\mu,\nu)$ est le $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$module simple de plus haut poids (μ,ν), alors $\mu\in\widetilde{\mathfrak{X}}^+$ et $\nu\in-\widetilde{\mathfrak{X}}^+$. Le caractère central associé est $\chi_{\mu,\nu}$.

Par définition (*cf.* le paragraphe qui précède la proposition III.1.4) :

$$[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda):L(\mu,\nu)]=[(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_{\chi_{\mu,\nu}}:L(\mu,\nu)]\ .$$

D'après le lemme précédent, pour que cette multiplicité ne soit pas nulle, il est nécessaire que $\chi_{\mu,\nu}=\chi_{\xi,-\xi}$ pour un $\xi\in\widetilde{\mathfrak{X}}$.

Or :

$$\chi_{\mu,\nu}=\chi_{\xi,-\xi}\Leftrightarrow\exists\, w_1,w_2\ :\ (\mu,\nu)=(w_1,w_2)*(\xi-\xi)$$
$$\Leftrightarrow\exists\, w_1,w_2\in W\ :\ \mu+\rho=w_1(\xi+\rho)\text{ et }-\nu+\rho=w_2(\xi+\rho)$$
$$\Leftrightarrow W.(\mu+\rho)=W.(-\nu+\rho)\ \ (*)$$

Mais puisque $\mu+\rho$ et $-\nu+\rho$ sont dominants et réguliers, $(*)$ entraîne que $\mu=-\nu$.

Remarque : Comme $\mu+\rho$ est régulier, on a aussi :

$$(\mu,-\mu)=(w_1,w_2)*(\xi,-\xi)\Rightarrow w_1=w_2\ .$$

Si $\mu+\nu=0$, alors $L(\mu,\nu)=L(\mu,-\mu)=\mathrm{End}(L(\mu))$ et comme le $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B^-}-$ module

$$(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda))_{\chi_{\mu,-\mu}}$$

a un $(w,t)-$drapeau de type :

$$\{(\nu,-\nu)\ :\ \nu\in(\lambda-\mathbb{N}I_{w,t}+\mathbb{N}^*J_{w,t})\cap W*\mu\}$$

(*cf.* le lemme V.2.4), on a (*cf.* la section III.1.3) :

$$[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda):L(\mu,-\mu)]=\sum_\nu[M((w,t)*(\nu-\nu)):L(\mu,-\mu)]\ \ (**)$$

où ν parcourt l'ensemble :

$$(\lambda-\mathbb{N}I_{w,t}+\mathbb{N}^*J_{w,t})\bigcap W*\mu$$

et où $M(\nu_1,\nu_2)$ est le module de Verma de plus haut poids (ν_1,ν_2).

Or, selon l'égalité III.2, page 64 :

$$[M((w,t)*(\nu-\nu)) : L(\mu,-\mu)] = \begin{cases} 1 & \text{si } (w,t)*(\nu-\nu)=(\mu,-\mu) \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

Mais, suivant la remarque ci-dessus, $(w,t)*(\nu-\nu)=(\mu,-\mu) \Rightarrow w=t$.

Pour terminer, on remarque que :

$$(t,t)*(\nu,-\nu)=(\mu,-\mu) \Leftrightarrow t^{-1}*\mu=\nu$$

et que cela est possible pour au plus un $t \in W$ vu que μ est dominant.

Donc d'après la formule $(**)$:

$$[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\mathscr{L}_\lambda) : L(\mu,-\mu)] = 1$$

si $t^{-1}*\mu \in \lambda - \mathbb{N}I_{t,t} + \mathbb{N}^* J_{t,t}$ et c'est 0 sinon. **Q.e.d.**

V.2.6 Démonstration du résultat principal

Grâce à la suite spectrale $(**)$ et au lemme V.2.4, on sait déjà que pour tout $i \geq 0$:

$$(H^i(\overline{G},\mathscr{L}_\lambda))_\chi = (0)$$

si le caractère central χ n'est pas de la forme $\chi_{\mu,-\mu}$ pour un $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$.

Soit $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$; on va calculer

$$[H^i(\overline{G},\mathscr{L}_\lambda) : \mathrm{End}(L(\mu))] \ .$$

Posons $\chi := \chi_{\mu,-\mu}$. En utilisant la remarque du paragraphe précédent, il suffit de calculer la dimension de l'espace propre de poids $(\mu,-\mu)$:

$$(H^i(\overline{G},\mathscr{L}_\lambda))_{\chi,\mu} := (H^i(\overline{G},\mathscr{L}_\lambda)_\chi)_{\mu,-\mu} \ .$$

Or les prises d'espace propre généralisé et d'espace propre, associés respectivement à un caractère central et à un caractère, sont des foncteurs exacts (sur la catégorie des $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B^-}-$modules (*cf.* le paragraphe suivant la proposition III.1.2). On conserve donc une suite spectrale convergente :

$$E_1^{p,q} = (H^{p+q}_{C_{w_p,t_p}}(\mathscr{L}_\lambda))_{\chi,\mu} \Rightarrow (H^{p+q}(\overline{G},\mathscr{L}_\lambda))_{\chi,\mu} \ .$$

On va voir (au théorème V.2.6) que cette suite spectrale est dégénérée. La raison principale constitue le :

Lemme V.2.5 *Si $t,t' \in W$ sont distincts et si on a l'inclusion :*

$$C_{t,t} \subseteq \overline{C_{t',t'}}$$

alors :

$$\mathrm{codim}(C_{t,t},\overline{G}) - \mathrm{codim}(C_{t',t'},\overline{G}) \geq 2 \ .$$

Démonstration : Étant donné que $\overline{G}$ n'a qu'une seule $G \times G-$orbite fermée, ce lemme est une conséquence immédiate de la proposition plus générale V.3.6, démontrée dans la section suivante. **Q.e.d.**

Théorème V.2.6 *Pour chaque caractère central* $\chi = \chi_{\mu,-\mu}$ *avec* $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$*, on a :*

$$\forall\, r \geq 1,\ (E_1^{p,q})_{\chi,\mu} = (E_r^{p,q})_{\chi,\mu}\ .$$

Démonstration : On procède par récurrence sur $r \geq 1$.
Il n'y a rien à dire pour le cas $r = 1$.
On suppose que $(E_1^{p,q})_{\chi,\mu} = (E_k^{p,q})_{\chi,\mu}$ si $1 \leq k \leq r$ et on va montrer que :

$$(E_r^{p,q})_{\chi,\mu} = (E_{r+1}^{p,q})_{\chi,\mu}\ .$$

Il s'agit de démontrer que les morphismes :

$$d_r^{p,q} : (E_r^{p,q})_{\chi,\mu} = (E_r^{p+r,q-r+1})_{\chi,\mu}$$

sont nuls pour tout (p,q).
Si $d_r^{p,q}$ n'était pas nul, on aurait certainement :

$$(E_r^{p,q})_{\chi,\mu} \neq (0) \text{ et } (E_r^{p+r,q-r+1})_{\chi,\mu} \neq (0)$$

c-à-d :

$$(E_1^{p,q})_{\chi,\mu} \neq (0) \text{ et } (E_1^{p+r,q-r+1})_{\chi,\mu} \neq (0)$$

d'après l'hypothèse de récurrence.
Mais alors, on aurait : $w_p = t_p$, $w_{p+r} = t_{p+r}$ d'après le corollaire V.2.4.1 et :

$$(*\,*\,*)\ \ p+q = \operatorname{codim}(C_{t_p,t_p}, \overline{G})\ ,\ p+q+1 = \operatorname{codim}(C_{t_{p+r},t_{p+r}}, \overline{G})$$

d'après le théorème I.4.1.
Selon le lemme I.5.1, on aurait aussi :

$$C_{t_{p+r},t_{p+r}} \subseteq \overline{C_{t_p,t_p}}$$

et par conséquent :

$$\operatorname{codim}(C_{t_{p+r},t_{p+r}}, \overline{G}) - \operatorname{codim}(C_{t_p,t_p}, \overline{G}) \geq 2$$

en raison du lemme V.2.5.
Ceci contredit $(*\,*\,*)$. **Q.e.d.**

Il résulte de ce théorème que :

$$\forall\, p,q,\ \ (E_1^{p,q})_{\chi,\mu} = (E_\infty^{p,q})_{\chi,\mu}\ .$$

D'où :

$$\begin{aligned}[H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda) : \operatorname{End}(L(\mu)] &= \dim(H^i(\overline{G}, \mathscr{L}_\lambda))_{\chi,\mu} \\ &= \sum_{p,q\,:\,p+q=i} \dim(E_\infty^{p,q})_{\chi,\mu}\end{aligned}$$

$$= \sum_{p,q\,:\,p+q=i} \dim(E_1^{p,q})_{\chi,\mu}$$

$$= \sum_{p,q\,:\,p+q=i, w_p=t_p} \delta(t_p)$$

$$= \sum_{t\in W} \delta(t)$$

avec, pour chaque $t \in W$:

$$\delta(t) : = \begin{cases} 1 & \text{si } t^{-1} * \mu \in \lambda - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^* J_t \text{ et } 2l(t) + |J_t| = i \\ 0 & \text{sinon } ; \end{cases}$$

d'après le corollaire V.2.4.1.

Ceci achève la démonstration du théorème V.2.2. **Q.e.d.**

V.3 Compactification générale X

G est maintenant un groupe réductif connexe sur $\mathbb{K}$.

On choisit une isogénie $r : \widetilde{G} \to G$ telle que $\mathrm{Pic}(\widetilde{G}) = (0)$ (*cf.* [Iv76] ou [KKLV, prop. 4.6]). Cela permettra de linéariser les faisceaux inversibles sur une compactification de G.

On notera $\widetilde{B}$, $\widetilde{B^-}$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{X}}^+$, $\widetilde{\mathcal{Y}}$ les ensembles correspondants à B, B^-, T, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^+$, $\mathcal{Y}$ dans G. On supposera aussi que l'isogénie a été choisie telle que les caractères de $\widetilde{T}$ soient des poids entiers.

Soit $\mathbf{X}$ une compactification régulière de G (en tant que $G \times G-$variété). Rappelons que $\mathbf{X}$ domine la compactification $\overline{G_{ad}}$.

Afin d'énoncer le théorème principal de cette partie, voici quelques données concernant $\mathbf{X}$:

V.3.1 Données combinatoires (d'après [B98])

On note :

$$\mathcal{C}^+ : = \left\{\nu \in \mathcal{Y}_\mathbb{R} \ : \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \alpha, \nu\rangle > 0\right\}$$

$$\overline{\mathcal{C}^+} : = \left\{\nu \in \mathcal{Y}_\mathbb{R} \ : \forall\, \alpha \in \Phi^+, \langle \alpha, \nu\rangle \geq 0\right\}$$

la chambre de Weyl positive et son adhérence.

V.3.1.1 La subdivision de $\overline{\mathcal{C}^+}$ associée à X

Soit $\overline{T}$ l'adhérence de T dans $\mathbf{X}$.

Sur G, la restriction de l'action de $G \times G$ à la diagonale de T, $\mathrm{diag}(T)$, est donnée par :

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, t \in T,\ (t,t).g = tgt^{-1} \ .$$

Elle se prolonge à $\mathbf{X}$ et puisque $G^{\mathrm{diag}(T)} = T$, la variété $\overline{T}$ est une composante irréductible de $\mathbf{X}^{\mathrm{diag}(T)}$. Ce dernier est lisse (*cf.* [Iv72, prop. 1.3]). Pour l'action de T à gauche (*i.e.* pour l'action de $T \times \{1\}$), $\overline{T}$ est donc une variété torique complète lisse ; on appelle $\mathcal{E}$ *l'éventail associé à* $\overline{T}$ (*cf.* la fin de la section II.4.1 et [B98, §3.1]).

Comme $\overline{T}$ est complète, $\mathcal{E}$ est une subdivision de $\mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$ (*i.e.* : $\bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}} \sigma = \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$) et comme $\overline{T}$ est invariant par l'action de diag(W) : $= \{(w,w) \ : \ w \in W\}$, $\mathcal{E}$ est aussi $W-$invariant.

Il résulte de [B98, prop. A2] que $\mathcal{E} = W\mathcal{E}^+$ où $\mathcal{E}^+$ est l'ensemble des cônes de $\mathcal{E}$ contenus dans $\overline{\mathcal{C}^+}$. De plus, $\mathcal{E}^+$ est une subdivision de $\overline{\mathcal{C}^+}$ qui paramètre les $G \times G-$orbites de $\mathbf{X}$ (*cf.* encore [B98, prop. A2]).

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}^+$, on désigne par z_σ, ou $z_{\mathcal{O}_\sigma}$, le point-base correspondant dans $\overline{T}$ (*cf.* page 38) et par $\mathcal{O}_\sigma$ sa $G\times G-$orbite. On dira que z_σ est le *point-base de l'orbite* $\mathcal{O}_\sigma$.

Les $G \times G-$orbites fermées correspondent aux cônes de $\mathcal{E}^+$ de dimension maximale. Ces cônes sont de dimension $\dim T$ et on note $\mathcal{E}^+(m)$ leur ensemble.

Lorsque $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$, z_σ a pour groupe d'isotropie $B^- \times B$; d'où :

$$G \times G{\cdot}z_\sigma \simeq G/B^- \times G/B$$

(*cf.* [B98, prop. A1 ii)]).

V.3.1.2 Les faisceaux inversibles sur X

Grâce à la paramétrisation des fibrés en droites sur les variétés sphériques décrite par M. Brion dans [B89, §2.2], on obtient celle des fibrés en droites sur $\mathbf{X}$ par les fonctions d'appui sur $\overline{\mathcal{C}^+}$. On utilise en particulier que $\mathbf{X}$ admet un recouvrement par des ouverts isomorphes à des espaces affines et les trivialisations des fibrés en droites restreints à ces ouverts.

Théorème V.3.1 ([B89, §2.2]) *Étant donnée une fonction d'appui* $h : \overline{\mathcal{C}^+} \to \mathbb{R}$ *à valeurs entières sur* $\widetilde{\mathcal{Y}}^+$, *il existe un faisceau* $\mathscr{L}$, *inversible et* $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$*linéarisé, tel que :*

$$\mathscr{L}|_{\mathcal{O}_\sigma} \simeq \mathscr{L}_{\widetilde{G}/\widetilde{B^-}\times\widetilde{G}/\widetilde{B}}(h_\sigma, -h_\sigma)$$

pour toute orbite fermée $\mathcal{O}_\sigma$ *(*$\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$*)*†.

A isomorphisme de faisceaux $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$*linéarisés sur* $\mathbf{X}$ *près,* $\mathscr{L}$ *est unique et on le note :* $\mathscr{L}_h$.

On obtient ainsi, à isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathbf{X}}-$*modules près, tous les faisceaux inversibles sur* $\mathbf{X}$.

ON CONSERVERA CETTE NOTATION $\mathscr{L}_h$ POUR LE FAISCEAU INVERSIBLE ET $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$LINÉARISÉ SUR $\mathbf{X}$ CORRESPONDANT À LA FONCTION D'APPUI h.

Remarque : Si $\mathscr{L}^{(1)}$ et $\mathscr{L}^{(2)}$ sont deux $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$linéarisations d'un même faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathbf{X}$, alors il existe un caractère θ de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ tel que :

$$\mathscr{L}^{(1)} = \mathscr{L}^{(2)} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathbb{K}_\theta$$

où $\mathbb{K}_\theta$ est la droite $\mathbb{K}$ munie de l'action de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ via θ. En effet, $\mathscr{O}(\mathbf{X})^* = \mathbb{K}^*$ et on peut appliquer [KKV, lemme 2.2].

---

† Il s'agit d'isomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathbf{X}}-$modules $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$linéarisés sur $\mathcal{O}_\sigma$. Rappelons que $h_\sigma \in \widetilde{\mathcal{X}}$ est tel que : $\forall\, n \in \overline{\mathcal{C}^+},\ h(n) = \langle h_\sigma, n\rangle$.

V.3.2 Énoncé du théorème principal

Soient h une fonction d'appui sur $\overline{\mathcal{C}^+}$ à valeurs entières sur $\widetilde{\mathcal{Y}}^+$.
On pose , pour tout $\lambda \in \mathcal{X}$:

$$V(h,\lambda) : = \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \langle\lambda, n\rangle - h(n) > 0\} \ .$$

Si $\alpha \in \Delta$, on note : $\alpha^\perp : = \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \langle\alpha, n\rangle = 0\}$. Rappelons que $J_t = \{\alpha \in \Delta \ : \ t(\alpha) < 0\}$. On utilisera encore la notation $H^*(\ , \ ;\mathbb{R})$ pour les groupes de cohomologie relative à valeurs dans $\mathbb{R}$ de parties de $\mathcal{Y}_\mathbb{R}$.

Cela étant posé :

Théorème V.3.2 *On a une égalité de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$modules :*

$$H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) = \bigoplus_{\mu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+} m_h^i(\mu)\mathrm{End}(L(\mu))$$

où pour tout poids entier dominant μ et tout entier i, $m_h^i(\mu)$ est égal à :

$$\sum_{t \in W \setminus \{1\}} \dim H^{i-2l(t)-1}\left(V(h, t^{-1} * \mu), V(h, t^{-1} * \mu) \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp ; \mathbb{R}\right)$$
$$+ \dim H^i(\overline{\mathcal{C}^+}, V(h,\mu); \mathbb{R})$$

$$\text{si} \ : (*) \ \ \forall\, n \in \mathcal{Y}^+, \langle\mu, n\rangle - h(n) \in \mathbb{Z}$$

et $m_h^i(\mu) = 0$ sinon.

Remarques :

1º On peut aussi exprimer les multiplicités $m_h^i(\mu)$ ci-dessus à l'aide de la cohomologie d'Ishida (*cf.* la définition 6 de la section II.4.5).

Soient :

- une fonction d'appui h à valeurs entières sur $\widetilde{\mathcal{Y}}$;
- un élément $t \in W$;
- un caractère $\lambda \in \widetilde{\mathcal{X}}$.

On définit une partie localement fermée $\Phi(h, t, \lambda)$ de l'éventail $\mathcal{E}$:

Si pour tout $n \in \mathcal{Y}^+$, $\langle\mu, n\rangle - h(n) \in \mathbb{Z}$, $\Phi(h, t, \lambda)$ est l'ensemble des cônes de $\mathcal{E}$ qui :

- sont inclus dans $\{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \langle\lambda, n\rangle - h(n) > 0\} \cup \{0\}$;
- et rencontrent $\{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \forall\, \alpha \in J_t, \ \langle\alpha, n\rangle > 0\}$.

Sinon, $\Phi(h, t, \lambda) : = \emptyset$.

On a alors pour tout $\mu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+$:

$$m_h^i(\mu) = \sum_{t \in W} H^{i-2l(t)}(\Phi(h, t, t^{-1} * \mu)) \ .$$

Cette formule peut être plus commode pour les calculs en de petites dimensions.

2° Lorsque $i = 0$, et sous la condition $(*)$, on a :

$$H^0(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) = \bigoplus_{\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+} \dim H^0(\overline{\mathcal{C}^+}, V(h,\mu); \mathbb{R}) \mathrm{End}(L(\mu))$$

avec :

$$\dim H^0(\overline{\mathcal{C}^+}, V(h,\mu); \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(h,\mu) = \emptyset \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Les multiplicités non nulles correspondent aux poid dominants μ tels que :

$$\forall\, n \in \overline{\mathcal{C}^+},\ \langle \mu, n\rangle \leq h(n)$$

et elles valent 1. C'est un résultat déjà connu (*cf.* [B98]).

3° On retrouve aussi le cas d'une variété torique complète lisse, *i.e.* lorsque $G = T$. On a dans ce cas :

$$W = \{1\},\ \Phi^+ = \emptyset \text{ et } \mathcal{C}^+ = \mathcal{Y}_{\mathbb{R}} \ .$$

Lorsque $(*)$ est vérifiée, on trouve :

$$m_h^i(\mu) = \dim H^i(\mathcal{Y}_{\mathbb{R}}, V(h,\mu); \mathbb{R}) \ .$$

(*cf.* la remarque qui suit le théorème II.4.2).

4° On reconnaît également le résultat énoncé dans le cas magnifique (*cf.* le théorème V.2.2).

En effet, on remarque d'abord que, dans ce cas, h est simplement un caractère λ de $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Soit $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$. On a alors :

$$V(\lambda,\mu) = \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \langle \mu, n\rangle - \langle \lambda, n\rangle > 0\} \ .$$

La condition $(*)$ du théorème est équivalente à :

$$\forall\, n \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}},\ \langle \mu, n\rangle - \langle \lambda, n\rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - \lambda \in \mathfrak{X} = \sum_{\delta \in \Delta} \mathbb{Z}.\delta \ .$$

On fixe ensuite $\nu \in \mathfrak{X}$. Soit $V := \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ \langle \nu, n\rangle > 0\}$. On va montrer (cela suffira) que, pour tout $j \geq 0$ et tout $t \in W \setminus \{1\}$:

$$H^j(V, V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^{\perp}; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ si } j = |J_t| - 1 \text{ et si } \nu \in -\mathbb{N} I_t + \mathbb{N}^* J_t$$

et :

$$H^j(V, V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^{\perp}; \mathbb{R}) = (0)$$

dans tous les autres cas.

Comme cela est vrai lorsque $V = \emptyset$, on va maintenant supposer que V n'est pas vide.

Puisque V est convexe, on a :

$$H^j(V, V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R}) = \widetilde{H}^{j-1}(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R})$$

pour tout j.

On pose $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{C}^+} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ J_t^* \\ n = \sum_{\delta \in \Delta} n_\delta \omega_\delta^\vee & \longmapsto & \sum_{\delta \in J_t} n_\delta \omega_\delta^\vee \end{array} \right.$ avec les sous groupes à un paramètre fondamentaux $\omega_\delta^\vee$ (définis par $\langle \alpha, \omega_\delta^\vee \rangle = \delta_{\alpha,\delta}$ pour tous $\alpha, \delta \in \Delta$) et

$$\mathbb{R}_+ J_t^* : = \sum_{\delta \in J_t} \mathbb{R}_+ . \omega_\delta^\vee \ .$$

On notera aussi $\mathbb{R}_+ I_t^*$ l'ensemble $\sum_{\delta \in I_t} \mathbb{R}_+ . \omega_\delta^\vee$.

L'application p est continue et on s'aperçoit que, restreinte à $V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp$, ses fibres sont convexes :

$$\forall\, n^0 \in \mathbb{R}_+ J_t^*,\ \{n \in V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp \ : \ p(n) = n^0\}$$

$$= \emptyset \text{ ou } \{n = n^1 + n^0 \ : \ n^1 \in \mathbb{R}_+ J_t^* \text{ et } \langle \nu, n^1 \rangle > -\langle \nu, n^0 \rangle\} \ .$$

On en déduit grâce à une suite spectrale de Leray (*cf.* [Go, chap. II, théorème 4.17.1]) que :

$$\widetilde{H}^{j-1}(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R}) = \widetilde{H}^{j-1}(p(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp); \mathbb{R})$$

pour tout j.

Mais, si on note $\partial \mathbb{R}_+^{|J_t|}$ le bord de $\mathbb{R}_+ J_t^* \simeq \mathbb{R}_+^{|J_t|}$, sont vérifiées :

$$p(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp) = \{n \in \mathbb{R}_+ J_t^* \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp : \exists n^1 \in \mathbb{R}_+ I_t^*,\ \langle \nu, n \rangle + \langle \nu, n^1 \rangle > 0\}$$

$$= \mathbb{R}_+ J_t^* \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp \setminus \{n \in \mathbb{R}_+ J_t^* \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp \ : \ \langle \nu, n \rangle \leq - \sup_{n^1 \in \mathbb{R}_+ I_t^*} \langle \nu, n^1 \rangle\}$$

$$= \partial \mathbb{R}_+^{|J_t|} \text{ ou } \partial \mathbb{R}_+^{|J_t|} \setminus \{n \in \partial \mathbb{R}_+^{|J_t|} \ : \ \langle \nu, n \rangle \leq 0\} \ .$$

Il s'agit d'un espace contractile sauf s'il est de la forme :

$$(\diamond) \ \ \partial \mathbb{R}_+^{|J_t|} \setminus \{0\} \ .$$

Dans ce cas, $p(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{|J_t|-1} \setminus \{0\}$ et :

$$\widetilde{H}^{j-1}(V \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j-1 \neq |J_t| - 2 \\ \mathbb{R} & \text{si } j-1 = |J_t| - 2 \end{array} \right.$$

(*cf.* par exemple [Spa, chap. 4, théorème 6]).

On est dans cette situation $(\diamond)$ si et seulement si :

$$\{n \in \partial \mathbb{R}_+^{|J_t|} \ : \ \langle \nu, n \rangle \leq 0\} = \{0\}$$

et on vérifie que c'est équivalent à :

$$\nu \in -\mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^* J_t \ .$$

Finalement, pour tout $t \in W \setminus \{1\}$, tout $i \geq 0$ et tous λ, μ, on retrouve que :

$$H^{i-2l(t)-1}(V(\lambda, t^{-1} * \mu), V(\lambda, t^{-1} * \mu) \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

si $i = 2l(t) + |J_t|$ et $t^{-1} * \mu \in \lambda - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^* J_t$ et que dans tous les autres cas :

$$H^{i-2l(t)-1}(V(\lambda, t^{-1} * \mu), V(\lambda, t^{-1} * \mu) \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp; \mathbb{R}) = (0) \ .$$

Q.e.d.

* * *

Lorsque $G = PGL(3, \mathbb{C})$, on peut montrer que les groupes de cohomologie des fibrés en droites sur la compactification magnifique $\overline{PGL(3, \mathbb{C})}$ sont des $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})-$modules sans multiplicité (*c-à-d* que leurs multiplicités, selon les $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})-$modules simples, sont 0 ou 1). Ce n'est plus le cas pour les compactifications générales du même groupe :

Exemple : Soit $G = PGL(3, \mathbb{C})$. On utilise les notations de [Sp81, §11.1] pour le système de racines de G, T) :

$$\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}, \ \Delta = \{\alpha, \beta\},$$

$$W = \{1, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha\} \ .$$

On note $\omega_\alpha^\vee$ et $\omega_\beta^\vee$ les sous-groupes à un paramètre fondamentaux tels que :

$$\langle \gamma, \omega_\delta^\vee \rangle = \delta_{\gamma,\delta}$$

pour tous $\gamma, \delta \in \Delta$.

Soit **X** la compactification régulière de $PGL(3, \mathbb{C})$ associée à la subdivision suivante de la chambre de Weyl positive :

$$\overline{\mathcal{C}^+} = \sigma^\alpha \bigcup \sigma^\beta \ ,$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha : &= \mathbb{R}_+(\omega_\alpha^\vee + \omega_\beta^\vee) + \mathbb{R}_+\omega_\beta^\vee \\ &= \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\alpha \leq n_\beta\} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sigma^\beta : &= \mathbb{R}_+\omega_\alpha^\vee + \mathbb{R}_+(\omega_\alpha^\vee + \omega_\beta^\vee) \\ &= \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\beta \leq n_\alpha\} \ . \end{aligned}$$

Soit h la fonction d'appui définie par :

$$h(n) = \begin{cases} \langle \alpha - 2\beta, n\rangle & \text{si } n \in \sigma^\alpha \\ \langle \beta - 2\alpha, n\rangle & \text{si } n \in \sigma^\beta \end{cases}$$

(il n'y a pas d'ambiguïté). Posons $\mathscr{L}_h$ le faisceau inversible correspondant sur $\mathbf{X}$.

On va montrer que la multiplicité de la représentation triviale $L(0)$ dans $H^3(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h)$ vaut 2.

On remarque d'abord que le caractère 0 vérifie bien la condition $(*)$ du théorème V.3.2.

Ensuite, puisque si $t \in W$:

$$3 - 2l(t) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow l(t) \leq 1 \ ,$$

on a d'après le même théorème :

$$[H^3(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) : L(0)] = m_h^3(0)$$

$$= \sum_{t \in \{s_\alpha, s_\beta\}} \dim H^0 \left(V(h, t^{-1} * 0), V(h, t^{-1} * 0) \cap \bigcup_{\delta \in J_t} \delta^\perp ; \mathbb{R} \right)$$

$$+ \dim H^3(\overline{\mathcal{C}^+}, V(h, 0); \mathbb{R}) \ .$$

Or, d'une part :

$$V(h, 0) = \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ h(n) < 0\}$$

$$= \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ [0 \leq n_\alpha \leq n_\beta \text{ et } n_\alpha < 2n_\beta] \text{ ou } [0 \leq n_\beta \leq n_\alpha \text{ et } n_\beta < 2n_\alpha]\}$$

$$= \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ (n_\alpha, n_\beta) \in \mathbb{R}_+^2 \ \setminus \ \{(0,0)\}$$

$$\simeq \mathbb{R}_+^2 \ \setminus \ \{(0,0)\}$$

donc : $H^3(\overline{\mathcal{C}^+}, V(h, 0); \mathbb{R}) = (0)$.

D'autre part :

$$V(h, s_\alpha * 0) = \{n \in \overline{\mathcal{C}^+} \ : \ -\langle \alpha, n\rangle - h(n) > 0\}$$

$$= \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\alpha < n_\beta\} \bigsqcup \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\beta < n_\alpha\}$$

et :

$$V(h, s_\alpha * 0) \cap \alpha^\perp = \{n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ n_\beta > 0\} \ .$$

D'où :

$$H^0(V(h, s_\alpha * 0), V(h, s_\alpha * 0) \cap \alpha^\perp ; \mathbb{R})$$

$$= H^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \{0\} \times \mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}) \bigoplus H^0(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \emptyset; \mathbb{R})$$

$$= \mathbb{R} \ .$$

On montre de même, que $V(h, s_\beta * 0)$ est l'ensemble :

$$\{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\alpha < n_\beta\} \bigsqcup \{n_\alpha \omega_\alpha^\vee + n_\beta \omega_\beta^\vee \ : \ 0 \leq n_\beta < n_\alpha\}$$

et que :

$$H^0(V(h, s_\beta * 0), V(h, s_\beta * 0) \cap \beta^\perp ; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \ .$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}[H^3(\mathbf{X},\mathscr{L}_h) : L(0)] &= m_h^3(0)\\ &= 1+1+0\\ &= 2\ .\end{aligned}$$

Q.e.d.

V.3.3 Début de la démonstration

Le $\widetilde{G}\times\widetilde{G}-$module $H^i(\mathbf{X},\mathscr{L})$ est le $q-$ième groupe d'homologie du complexe de Grothendieck-Cousin :

$$GC^* \quad 0 \to H^0_{Z_0/Z_1}(\mathscr{L}) \xrightarrow{d^0} H^1_{Z_1/Z_2}(\mathscr{L}) \xrightarrow{d^1} \ldots \to H^N_{Z_N}(\mathscr{L}) \to 0$$

où pour tout $0 \leq i \leq n$, Z_i est la réunion des $B\times B^-$−orbites de codimension $\geq i$ dans $\mathbf{X}$ (on expliquera dans la section V.3.6 (*cf.* la remarque page 125) pourquoi contrairement au cas « magnifique », on n'utilise pas une filtration faisant apparaître des cellules de Bialynicki-Birula.

On va analyser les $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B^-}-$modules

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}) = \bigoplus_{\Omega} H^i_\Omega(\mathscr{L}) \quad ,$$

somme directe sur les $B\times B^-$−orbites Ω de codimension i. On analysera aussi les morphismes d^i.

Pour cela, on utilisera la paramétrisation des $B\times B^-$−orbites de $\mathbf{X}$ obtenue dans [B98, théorème du §2.1] et [BL, prop. du §2.3]. On aura aussi besoin de quelques remarques sur :

V.3.4 Les cellules de Bialynicki-Birula de X

Comme dans le cas de la compactification magnifique, les points de $\mathbf{X}$ fixés par $T\times T$ sont dans les $G\times G-$orbites fermées (*cf.* [B98, prop. A1 iv)]).

$\mathbf{X}^{T\times T}$ est donc paramétré par $W\times W\times\mathcal{E}^+(m)$:

$$\mathbf{X}^{T\times T} = \left\{(w,t).z_\sigma \ : \ (w,t)\in W\times W,\ \sigma\in\mathcal{E}^+(m)\right\}$$

Comme dans le cas magnifique (*cf.* la section V.2.4), on fixe un sous-groupe à un paramètre de $T\times T$ $\zeta = (\zeta^+,\zeta^-) \in \mathcal{Y}^+\times\mathcal{Y}^-$ qui a les mêmes points fixes que $T\times T$. Les cellules de Bialynicki-Birula correspondant à ζ sont encore $B\times B^-$−invariantes. Pour tous $w,t\in W$ et $\sigma\in\mathcal{E}^+(m)$, on notera $C((w,t).z_\sigma)$ la cellule associée au point fixe $(w,t).z_\sigma$ et à ζ.

On va décomposer les cellules de Bialynicki-Birula en produit de $T-$espaces affines.

Pour cela, on note la grosse cellule (*cf.* page 76) par :

$$\mathbf{X}_0 = \{x\in\mathbf{X}\ :\ B\times B^-\cdot x \text{ est ouvert dans } G\times G\cdot x\}$$

et on pose $\overline{T}_0 :\ = \overline{T}\cap\mathbf{X}_0$; c'est la variété torique associée à $\mathcal{E}^+$. Rappelons aussi qu'à chaque cône σ de $\mathcal{E}$, correspond un ouvert Ω_σ de $\overline{T}$, affine et $T\times$

$\{1\}-$invariant (*cf.* la section II.4.1). Comme $\overline{T}$ est lisse, Ω_σ est isomorphe à un $T-$module lorsque $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$. En outre, $\overline{T}_0 = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}^+(m)} \Omega_\sigma$.

Enfin, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$, soient :

$$\Omega_{\sigma,w,t} : = \{\omega \in \Omega_\sigma \ : \ \lim_{a\to 0}(w^{-1}, t^{-1})(\zeta(a)).\omega = z_\sigma\}$$

et :

$$S_{w,t} : = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}^+(m)} \Omega_{\sigma,w,t} = \{\omega \in \overline{T}_0 \ : \ \lim_{a\to 0}(w^{-1}, t^{-1})(\zeta(a)).\omega \text{ existe dans } \overline{T}_0\} \ .$$

Remarque : Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$, $\Omega_{\sigma,w,t}$ est un fermé de Ω_σ ; c'est même un sous $T-$module de Ω_σ. Donc, puisque $S_{w,t} \cap \Omega_\sigma = \Omega_{\sigma,w,t}$, $S_{w,t}$ est un fermé de $\overline{T}_0$ (pour tous $w, t \in W$).

Si pour tout sous-groupe H de G, on pose $H^+ : = H\cap U$ et $H^- : = H\cap U^-$, alors a la :

Proposition V.3.3 ([BL, §1.2 et 2.3]) *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} \{(w,t)\} \times w^{-1}(U)^+ \times t^{-1}(U^-)^- \times \Omega_{\sigma,w,t} & \overset{\simeq}{\to} & C((w,t).z_\sigma) \\ ((w,t),(u_1,u_2),\omega) & \mapsto & (w,t).(u_1,u_2).\omega \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \{(w,t)\} \times w^{-1}(U)^+ \times t^{-1}(U^-)^- \times S_{w,t} & \overset{\simeq}{\to} & \bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}^+} C((w,t).z_\sigma) \\ ((w,t),(u_1,u_2),\omega) & \mapsto & (w,t).(u_1,u_2).\omega \end{array}$$

sont des isomorphismes $T \times T-$équivariants de variétés algébriques.

Remarques :

- Comme $w^{-1}(U)^+, t^{-1}(U^-)^-$ et $S_{w,t}$ sont, respectivement, des fermés de U, U^- et $\overline{T}_0$, on déduit de cette proposition que pour tout $(w,t) \in W\times W$, la réunion

$$C(w,t) : = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}^+(m)} C((w,t).z_\sigma)$$

est une sous-variété localement fermée de $\mathbf{X}$; c'est un fermé de l'ouvert

$$X_{w,t} : = (w,t).U \times U^-.S_{w,t} = w(U) \times t(U^-).(w,t)\overline{T}_0 = (w,t).\mathbf{X}_0 \ .$$

- On a aussi les isomorphismes de $T \times T-$variétés suivants :

$$\{(w,t)\} \times w^{-1}(U)^+ \times t^{-1}(U^-)^- \times \Omega_{\sigma,w,t} \simeq$$

$$w^{-1}(U)^+ \times t^{-1}(U^-)^- \times (w,t)\Omega_{\sigma,w,t} \text{ et}$$

$$\{(w,t)\} \times w^{-1}(U)^+ \times t^{-1}(U^-)^- \times S_{w,t} \simeq w(U)^+ \times t(U^-)^- \times (w,t)S_{w,t} \ .$$

V.3.5 Les $B \times B^-$−orbites de X

Soient $w, t \in W, \sigma \in \mathcal{E}^+(m)$. Étant données la cellule de Bialynicki-Birula $C((w,t).z_\sigma)$ et $\mathcal{O}$ une $G \times G$−orbite, on définit $\mathcal{O}_{w,t,\sigma} : = C((w,t).z_\sigma) \cap \mathcal{O}$ lorsque cette intersection n'est pas vide.

D'après la section IV.1.5, les $B \times B^-$−orbites de $\mathbf{X}$ sont exactement les $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$. On va s'intéresser en particulier aux $B \times B^-$−orbites de la forme $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ ($t \in W, \sigma \in \mathcal{E}^+(m)$). Notamment, la proposition V.3.6 jouera un rôle important dans la démonstration du théorème V.3.2.

D'un autre côté, rappelons les notations de [B98, §1.1 et §2.1] :

– Soit un sous-groupe à un paramètre θ de $T = T \times \{1\}$ tel que $\lim\limits_{a \to 0} \theta(a) = z_{\mathcal{O}}$; on pose :

$$L(\mathcal{O}) : = \{g \in G \ : \forall\, a \in \mathbb{K}^*,\ \theta(a) g \theta(a)^{-1} = g\}$$

c'est le sous-groupe de Levi, contenant T, du groupe parabolique :

$$P(\mathcal{O}) : = \{g \in G \ : \lim_{a \to 0} \theta(a) g \theta(a)^{-1} \text{ existe dans } G\} \ ;$$

tout cela est indépendant du θ choisi (*cf.* [B98, proposition A1]).

– Enfin, on note $W_{L(\mathcal{O})}$ le groupe de Weyl de $L(\mathcal{O})$ et $W^{L(\mathcal{O})} : = \{w \in W \ : \forall\, v \in W_{L(\mathcal{O})}, l(wv) = l(w) + l(v)\}$ † (*cf.* [B98, §1.1 et proposition A1]).

D'après [B98, §1.1 et §2.1], chaque $B \times B^-$−orbite Ω de $\mathbf{X}$ s'écrit de manière unique :

$$B \times B^- \cdot (w,t).z_{\mathcal{O}}$$

avec :

– $\mathcal{O} = G \times G.\Omega$, la $G \times G$−orbite engendrée par Ω ;

– $w \in W$ et $t \in W^{L(\mathcal{O})}$.

Le lemme et le corollaire suivants font le lien entre cette notation et la notation $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$.

Lemme V.3.4 *Soit $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$. Si $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$ est défini, alors il existe un $v \in W_{L(\mathcal{O})}$ tel que*

$$tv \in W^{L(\mathcal{O})}, l(wv) = l(w) + l(v) \text{ et } \mathcal{O}_{w,t,\sigma} = B \times B^- \cdot (wv, tv).z_{\mathcal{O}} \ .$$

Démonstration :

Il existe $w' \in W$ et $t' \in W^{L(\mathcal{O})}$ tels que $\mathcal{O}_{w,t,\sigma} = B \times B^- \cdot (w', t').z_{\mathcal{O}}$.

$\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$ est un ouvert de $\overline{\mathcal{O}} \cap C_{w,t,\sigma}$ qui est la cellule de Bialynicki-Birula de $\overline{\mathcal{O}}$ associée au point $(w,t).z_\sigma$ (et à ζ) ; c'est donc une variété irréductible.

Par conséquent, $\overline{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}} = \overline{\overline{\mathcal{O}} \cap C_{w,t,\sigma}}$.

En intersectant avec la $G \times G$−orbite fermée $\mathcal{O}_\sigma$, on obtient que :

$$\overline{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}} \cap \mathcal{O}_\sigma = \overline{\overline{\mathcal{O}} \cap C_{w,t,\sigma}} \cap \mathcal{O}_\sigma \supseteq \overline{C_{w,t,\sigma} \cap \mathcal{O}_\sigma} \ .$$

† $W_{L(\mathcal{O})}$ est le sous-groupe de W engendré par les réflexions simples s_α ($\alpha \in \Delta$) telles que : $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ et $W^{L(\mathcal{O})}$ est l'ensemble des $w \in W$ tels que $w(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ vérifiant $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$.

Comme $C_{w,t,\sigma} \cap \mathcal{O}_\sigma = B \times B^- \cdot (w,t).z_\sigma$ est un ouvert irréductible (et non vide) de $\overline{\overline{\mathcal{O}} \cap C_{w,t,\sigma}} \cap \mathcal{O}_\sigma$ (car $C_{w,t,\sigma} \cap \mathcal{O}_\sigma = C_{w,t,\sigma} \cap \overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_\sigma$), son adhérence est une composante irréductible de :

$$\overline{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}} \cap \mathcal{O}_\sigma \ .$$

Mais alors, [B98, (ii) du théorème du §2.1] il existe $v' \in W_{L(\mathcal{O})}$ tel que $l(w') = l(w'v') + l(v')$ et :

$$\overline{B \times B^- \cdot (w'v', t'v').z_\sigma} = \overline{B \times B^- \cdot (w,t).z_\sigma} \ .$$

En conséquence : $w = w'v'$ et $t = t'v' \Leftrightarrow w' = wv^{-1}$ et $t' = tv^{-1}$.

Il suffit alors de poser $v := v'^{-1}$. **Q.e.d.**

Corollaire V.3.4.1 *Si $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$, alors*

$$\mathcal{O}_{t,t,\sigma} = B \times B^- \cdot (t,t).z_{\mathcal{O}} \ \text{ et } t \in W^{L(\mathcal{O})}$$

pour tout $t \in W$ tel que $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ est défini.

Démonstration : D'après le lemme précédent,

$$\mathcal{O}_{t,t,\sigma} = B \times B^- \cdot (tv, tv).z_{\mathcal{O}}$$

pour un $v \in W_{L(\mathcal{O})}$ tel que $tv \in W^{L(\mathcal{O})}$ et :

$$(\diamond) \ \ l(tv) = l(t) + l(v) \ .$$

Or, $v \in W_{L(\mathcal{O})}$ ($\Leftrightarrow v^{-1} \in W_{L(\mathcal{O})}$), $tv \in W^{L(\mathcal{O})}$ et $t = (tv)v^{-1}$ entraîne que :

$$l(t) = l(tv) + l(v^{-1})$$

et en reportant dans $(\diamond)$:

$$l(tv) = l(tv) + l(v^{-1}) + l(v)$$

$$\Rightarrow l(v) = 0$$

$$\Rightarrow v = 1 \ .$$

Q.e.d.

Les $B \times B^-$–orbites de la forme $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$, pour un $t \in W$ et un $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$ ont la particularité suivante :

Proposition V.3.5 *Soient $t \in W$ et $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$ tels que $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ est définie. Alors pour toute $G \times G$–orbite $\mathcal{O}'$ contenue dans $\overline{\mathcal{O}}$, on a :*

$$\overline{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}} \cap \overline{\mathcal{O}'} = \overline{\mathcal{O}'_{t,t,\sigma}} \ .$$

En particulier, $\overline{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}} \cap \overline{\mathcal{O}'}$ est irréductible.

Démonstration :
D'après [B98, §2.1, théorème,ii], si y est le point-base d'une $G\times G-$orbite $\mathcal{O}''$, si $w\in W^{L(\mathcal{O}'')}$ et si Z est une sous-variété fermée de $\mathcal{O}''$, irréductible et $G\times G-$stable, alors :

$$\overline{B\times B^-\cdot(w,w).y}\bigcap Z=\bigcup\overline{B\times B^-\cdot(wv,wv).z}$$

où z est le point-base de Z et v varie parmi les éléments de $W_{L(\mathcal{O}'')}$ tels que $wv\in W^{L(Z)}$ et $l(w)=l(wv)+l(v)$.

Mais, les deux conditions $w\in W^{L(\mathcal{O}'')}$ et $v\in W_{L(\mathcal{O}'')}$ entraînent : $l(wv)=l(w)+l(v)$. Donc :

$$\begin{aligned}l(w)=l(wv)+l(v)\Rightarrow l(w)&=l(w)+2l(v)\\ \Rightarrow l(v)&=0\\ \Rightarrow v&=1\ .\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{B\times B^-\cdot(w,w).y}\bigcap Z=\overline{B\times B^-\cdot(w,w).z}$.

Le corollaire précédent permet alors de conclure. **Q.e.d.**

On déduit de cette proposition le fait suivant, dont on se servira tout à l'heure :

Proposition V.3.6 *Soient $t',t\in W$ et $\sigma,\sigma'\in\mathcal{E}^+(m)$. Si $\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'}\subseteq\overline{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}$ et si $\dim(\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'})=\dim(\mathcal{O}_{t,t,\sigma})-1$, alors $t'=t$.*

Démonstration : On suppose que $\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'}\subseteq\overline{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}$ et que $\dim(\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'})=\dim(\mathcal{O}_{t,t,\sigma})-1$.

Avec les notations de [B98, §2.1], on a :

$$B\times B^-\cdot(t',t').z_{\mathcal{O}'}\subseteq\overline{B\times B^-\cdot(t,t).z_{\mathcal{O}}}$$

où $z_{\mathcal{O}'}$ et $z_{\mathcal{O}}$ sont les points-bases de $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}$. On pose :

$$\Omega':=B\times B^-\cdot(t',t').z_{\mathcal{O}'}\text{ et }\Omega:=B\times B^-\cdot(t,t).z_{\mathcal{O}}\ .$$

Forcément : $\overline{\mathcal{O}'}\subseteq\overline{\mathcal{O}}$.

$$\textit{Si } \overline{\mathcal{O}'}=\overline{\mathcal{O}},$$

alors on choisit une $G\times G-$orbite fermée F de $\overline{\mathcal{O}}=\overline{\mathcal{O}'}$ et de point-base z_F.

$$\overline{\Omega'}\cap F=\overline{B\times B^-\cdot(\tau',\tau').z_F}\simeq\overline{B\tau'B^-/B^-}\times\overline{B^-\tau'B/B}\ .$$

Donc $\Omega'\cap F$ est de codimension $2l(\tau')$ dans $F\simeq G/B^-\times G/B$. Or, d'après [B98, théorème 2.1], Ω' et F se rencontrent proprement dans $\mathcal{O}'$, d'où :

$$\operatorname{codim}(\Omega'\cap F,F)=\operatorname{codim}(\overline{\Omega'},\overline{\mathcal{O}'})=2l(\tau')\ .$$

De même, $\operatorname{codim}(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{O}})=2l(\tau)$.

Puisqu'on a supposé que $\overline{\mathcal{O}}=\overline{\mathcal{O}'}$, on a :

$$1=\dim(\overline{\Omega})-\dim(\overline{\Omega'})=\operatorname{codim}(\overline{\Omega'},\overline{\mathcal{O}'})-\operatorname{codim}(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{O}})=2(l(\tau')-l(\tau))$$

ce qui est impossible car 1 est impair.

Nécessairement, $\overline{\mathcal{O}'}\underset{\neq}{\subseteq}\overline{\mathcal{O}}$ *et* $\operatorname{codim}(\overline{\mathcal{O}'},\overline{\mathcal{O}})\geq 1$ *puisque $\mathcal{O}$ est irréductible.*

Mais alors, $\overline{\Omega'} \subseteq \overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'} = \overline{B \times B^- \cdot (t,t).z_{\mathcal{O}'}}$. De nouveau grâce à [B98, théorème 2.1], l'intersection $\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'}$ est propre dans $\overline{\mathcal{O}}$ si bien que :

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}(\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'}, \overline{\mathcal{O}'}) &= \operatorname{codim}(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{O}}) \\ &= \operatorname{codim}(\overline{\Omega'}, \overline{\mathcal{O}'}) + \operatorname{codim}(\overline{\mathcal{O}'}, \overline{\mathcal{O}}) - 1 \\ &\geq \operatorname{codim}(\overline{\Omega'}, \overline{\mathcal{O}'}) \ . \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\dim \overline{\Omega'} \geq \dim(\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'}) \ .$$

Comme $\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'}$ est irréductible (*cf.* la proposition V.3.5), $\overline{\Omega'} = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{O}'}$ *c-à-d* :

$$\begin{aligned} \overline{B \times B^- \cdot (t',t').z_{\mathcal{O}'}} &= \overline{B \times B^- \cdot (t,t).z_{\mathcal{O}'}} \\ \Rightarrow B \times B^- \cdot (t',t').z_{\mathcal{O}'} &= B \times B^- \cdot (t,t).z_{\mathcal{O}'} \\ \Rightarrow t' &= t \end{aligned}$$

(car $t', t \in W^{L(\mathcal{O}')}$ et l'écriture des $B \times B^-$−orbites $\widetilde{\Omega}$ sous la forme $B \times B^- \cdot (w,w').z$, où z est le point-base de $Z :\ = G \times G \cdot \widetilde{\Omega}$ et $w' \in W^{L(Z)}$, est unique (*cf.* [B98, §2.1])). **Q.e.d.**

V.3.6 Les termes du complexe de Grothendieck-Cousin

Si $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$ est une $B \times B^-$−orbite de $\mathbf{X}$, de codimension i, d'après le corollaire IV.4.4.1 et la remarque qui le suit, pour tout caractère central χ de $\mathfrak{g}$, $\left(H^i_{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}}(\mathscr{L})\right)_\chi$ est un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B^-}$−module de longueur finie qui admet un (w,t)−drapeau de type (*cf.* la définition 8 page 59) :

$$(w,t) * \left((p_{z_\sigma}(\mathscr{L}) + \mathbb{Z} I_{\sigma,\overline{\mathcal{O}}} + \mathbb{N}^* J_{\sigma,\overline{\mathcal{O}}}) \cap W\chi\right)$$

où

$$\begin{aligned} I_{\sigma,\overline{\mathcal{O}}} &= \left\{p_{z_\sigma}(D) \ : \ D \in \mathcal{D},\ z_\sigma \in D \text{ mais } \overline{\mathcal{O}} \not\subseteq D\right\} \\ J_{\sigma,\overline{\mathcal{O}}} &= \left\{p_{z_\sigma}(D) \ : \ D \in \mathcal{D} \text{ et } \overline{\mathcal{O}} \subseteq D\right\} \end{aligned}$$

(rappelons que $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des diviseurs limitrophes de $\mathbf{X}$ et $p_{z_\sigma}(D)$ le poids de la droite $\mathscr{O}_{\mathbf{X}}(D)|_{z_\sigma}$ (*cf.* la section IV.4.2)). Comme annoncé à la page 66 (*cf.* la section III.4.1), il en résulte la :

Proposition V.3.7 *Le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - B \times B^-$−module $\mathbb{K}[BB^-]$ vérifie :*

$$\mathbb{K}[BB^-] = \bigoplus_\chi \mathbb{K}[BB^-]_\chi \ ,$$

la somme s'effectuant sur les caractères χ de la forme $\chi_{\lambda,-\lambda}$ pour un λ dans $\mathcal{X}$.

De plus, pour tout caractère λ de $\mathcal{X}$, le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$−module $\mathbb{K}[BB^-]_{\chi_{\lambda,-\lambda}}$ admet une suite de composition :

$$\mathbb{K}[BB^-]_{\chi_{\lambda,-\lambda}} = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_N$$

dont les quotients successifs sont exactement les duaux de modules de Verma

$$M(\nu, -\nu)^* \ ,$$

où ν décrit l'ensemble $W * \lambda$.

Démonstration : Soit $z_\sigma := \lim_{a\to 0} \zeta(a).1 \in \mathbf{X}$ le point-base associé au cône σ qui contient le sous-groupe à un paramètre ζ (*cf.* page 113). Il suffit de remarquer :

- que la cellule ouverte est : $C((1,1).z_\sigma)$;
- que $I_{\sigma,\mathbf{X}} = \{D \in \mathcal{D} \ : \ z_\sigma \in \mathcal{D}\}$;
- et que les poids $p_{z_\sigma}(D)$, lorsque D décrit $\mathcal{D}$, engendrent :

$$\{(\lambda, -\lambda) \ : \ \lambda \in \mathcal{X}\}$$

qui est exactement l'ensemble des poids du $T \times \{1\}-$module $\mathbb{K}(T)$ des fonctions rationnelles sur T (ou sur $\overline{T}$) (*cf.* [B98, prop. A2]).

Q.e.d.

On en déduit aussi la proposition suivante qui se démontre comme le lemme V.2.4 et le corollaire V.2.4.1 qui concernent la compactification magnifique. Le point important est que, ici comme là, les poids des fibres $\mathscr{L}|_{z_\sigma}$ (et aussi les $p_{z_\sigma}(D)$) sont de la forme $(\lambda, -\lambda)$ $(\lambda \in \mathcal{X}, \mathscr{L} = \mathscr{L}_h)$. En effet, $p_{z_\sigma}(\mathscr{L}_h) = (h_\sigma, -h_\sigma)$ selon les notations du théorème V.3.1.

Proposition V.3.8 *Soient $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$ une $B \times B^- -$orbite de codimension i et $(\nu_1, \nu_2) \in \widetilde{\mathcal{X}}^+ \times \widetilde{\mathcal{X}}^-$. Alors la multiplicité*

$$[H^i_{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}}(\mathscr{L}) : L(\nu_1, \nu_2)]$$

est nulle si $\nu_1 + \nu_2 \neq 0$ où si $w \neq t$.

Remarque : On peut montrer de même que les multiplicités selon les $\widetilde{G} \times \widetilde{G}-$modules simples des $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B^-}-$modules

$$H^i_{C_{w,t,\sigma}}(\mathscr{L})$$

sont nuls si $w \neq t$. Mais contrairement au cas de la compactification magnifique (*cf.* notamment le lemme V.2.5) , il se peut que deux cellules $C_{t,t,\sigma}$ et $C_{t',t',\sigma'}$ vérifient :

$$C_{t',t',\sigma'} \subseteq \overline{C_{t,t,\sigma}}$$

et $\mathrm{codim}(C_{t',t',\sigma'}, \overline{C_{t,t,\sigma}}) = 1$.

V.3.7 Les différentielles du complexes de Grothendieck-Cousin

Si Ω et Ω' sont des $B \times B^- -$orbites de $\mathbf{X}$ de codimension i et $i+1$, alors $\Omega \bigcup \Omega'$ est une sous-variété localement fermée de $\mathbf{X}$ où Ω' est fermée et d'après le lemme I.1.3, on a une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^i_{\Omega\cup\Omega'}(\mathscr{L}) \to H^i_\Omega(\mathscr{L}) \overset{d^i_{\Omega,\Omega'}}{\to} H^{i+1}_{\Omega'}(\mathscr{L}) \to \ldots$$

Pour tout $i \geq 0$, les morphismes $d^i_{\Omega,\Omega'}$ sont les « composantes » du morphisme d^i ; *c-à-d* que si l'on note :

$$\kappa^i_\Omega : H^i_\Omega(\mathscr{L}) \hookrightarrow H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}) \text{ et } p^i_\Omega : H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}) \twoheadrightarrow H^i_\Omega(\mathscr{L})$$

l'inclusion et la surjection correspondant à la décomposition

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}) = \bigoplus_{\Omega} H^i_{\Omega}(\mathscr{L}) \ .$$

alors :

Lemme V.3.9 *Pour toute paire de $B \times B^-$−orbites $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$, de codimensions i et $i+1$,*

$$d^i_{\Omega,\Omega'} = p^{i+1}_{\Omega'} \circ d^i \circ \kappa^i_{\Omega}$$

(pour tout $i \geq 0$).

V.3.8 Décomposition des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur X

Étant donné que $\mathbf{X}$ est une $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$-variété sur laquelle le faisceau $\mathscr{L}_h$ est $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$−linéarisé, $H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h)$ est un $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$−module rationnel et admet une décomposition selon les $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$−modules simples :

$$H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) = \bigoplus_{\xi \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^-} m_\xi L(\xi)$$

où on note m_ξ les multiplicités.

Notre objectif est de calculer ces multiplicités.

* * *

On reprend les notations de la section V.3.3 sur le complexe de Grothendieck-Cousin.

Pour tout $\xi \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^-$ et pour tout $i \geq 0$:

$$[H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) : L(\xi)] = [(H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h))_{\chi_\xi} : L(\xi)]$$

où χ_ξ est le caractère central du $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$−module $L(\xi)$

Mais le foncteur

$$M \mapsto M_\chi$$

étant exact sur la catégorie des $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B^-}$−modules (pour tout $\chi \in Z(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})'$) (*cf.* la proposition III.1.2 et le paragraphe qui la suit), le complexe

$$GC^*_\chi \ : \ \ldots \to \left(H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h)\right)_\chi \xrightarrow{d^i_\chi} \left(H^{i+1}_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}(\mathscr{L}_h)\right)_\chi \to \ldots$$

a pour i−ème groupe d'homologie :

$$\ker d^i_\chi / \operatorname{im} d^{i-1}_\chi \simeq H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h)_\chi$$

En particulier, on peut majorer la multiplicité de $L(\xi)$ dans $H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h)$ pour chaque $\xi \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^-$:

$$(\diamond\diamond) \ \ [H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) : L(\xi)] \leq \sum_{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}} [H^i_{\mathcal{O}_{w,t,\sigma}}(h) : L(\xi)]$$

somme sur les $B \times B^-$−orbites de codimension i.

V.3.9 « Élimination des $w \neq t$ »

On déduit de la proposition V.3.8 et de l'inégalité ($\diamond\diamond$) précédente que

$$[H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) : L(\xi)] = 0 \ ,$$

si ξ n'est pas de la forme $(\mu, -\mu)$ pour un poids entier dominant $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$. *Soit μ un poids entier dominant. Nous allons montrer que :*

$$[H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] = \sum_{t \in W} [H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] \ .$$

où l'on rappelle que $C(t,t) : = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}^+(m)} C(t,t,\sigma)$ est un fermé de l'ouvert $X_{t,t} : = (t,t)\mathbf{X}_0$. On note c_t sa codimension.

A partir du complexe de Grothendieck-Cousin ci-dessus, on va construire un autre complexe où n'interviennent que des termes de la forme $H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h)$, avec une $B \times B^-$−orbite $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ de codimension i.

Dans la décomposition en somme directe de $H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h)$ (*cf.* la section V.3.3), on va séparer les composantes de la forme

$$H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h)$$

qui, éventuellement, ont une multiplicité > 0 selon $\mathrm{End}(L(\mu))$ des autres dont on est certain que la multiplicité en $\mathrm{End}(L(\mu))$ est nulle.

Pour tout $i \geq 0$, soient :

$$\Omega_i : = \bigsqcup \mathcal{O}_{t,t,\sigma}$$

la réunion des $B \times B^-$−orbites de la forme $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ et de codimension i et

$$V_i : = \bigsqcup \mathcal{O}_{w,t,\sigma}$$

la réunion des $B \times B^-$−orbites $\mathcal{O}_{w,t,\sigma}$ de codimension i avec $w \neq t$ de sorte que :

$$\forall\, i \geq 0,\ \Omega_i \sqcup V_i = Z_i - Z_{i+1} \ .$$

On a de plus :

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h) = H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \oplus H^i_{V_i}(\mathscr{L}_h)$$

et :

$$[H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] = [H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] \ ,$$

$$[H^i_{V_i}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] = 0 \ .$$

Pour déterminer la multiplicité de $\mathrm{End}(L(\mu))$ dans $\ker d^i / \mathrm{im}\, d^{i-1}$, on va voir qu'il suffit de tenir compte des

$$H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \ .$$

En rapport avec la décomposition :

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h) = H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \oplus H^i_{V_i}(\mathscr{L}_h)$$

on notera κ_i l'injection

$$H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \hookrightarrow H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h)$$

et p_i la surjection :

$$H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h) \twoheadrightarrow H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \ .$$

Pour chaque $i \geq 0$, on obtient par composition un morphisme :

$$\widetilde{d^i} :\, = p_{i+1} \circ d^i \circ \kappa_i : H^i_{\Omega_i}(h) \to H^{i+1}_{\Omega_{i+1}}(h) \ .$$

Lemme V.3.10 *On a les égalités suivantes :*

$$[\mathrm{im}\, d^i : L(\mu)] = [\mathrm{im}\, \widetilde{d^i} : L(\mu)] \quad et \quad [\ker d^i : L(\mu)] = [\ker \widetilde{d^i} : L(\mu)]$$

pour tout $i \geq 0$.

Démonstration : Le conoyau de κ_i est $H^i_{V_i}(h)$ et le noyau de p_i est $H^i_{V_i}(h)$; ce sont des $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}-$modules de multiplicité nulle selon $\mathrm{End}(L(\mu))$. Il suffit donc de montrer la

Proposition V.3.11 *Soit $d : M \to N$ un morphisme de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-$modules de type fini et L un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}-$module simple. On suppose qu'il existe deux suites exactes courtes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "m"] & M \arrow[r, "n"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "p"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

telles que $[M'' : L] = [N' : L] = 0$ et on pose $\widetilde{d} :\, = q \circ d \circ m$.
Alors, $[\ker \widetilde{d} : L] = [\ker d : L]$ et $[\mathrm{im}\, \widetilde{d} : L] = [\mathrm{im}\, d : L]$.

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \arrow[d] \\
M'' \arrow[u] & N' \arrow[d, "p"] \\
M \arrow[u, "n"] \arrow[r, "d"] & N \arrow[d, "q"] \\
M' \arrow[u, "m"] \arrow[r, "\widetilde{d}"] & N'' \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration de la proposition : On commence par établir que $[\ker d : L] = [\ker(d \circ m) : L]$.

$$m(\ker d \circ m) \subseteq \ker d \text{ et } [\ker d : L] = [\ker d / \ker(d \circ m) : L] + [\ker(d \circ m) : L] \ .$$

Or, puisque m est injective, $m(\ker(d\circ m)) \simeq \ker(d\circ m)$, donc

$$[m(\ker(d\circ m)):L] = [\ker(d\circ m):L] \ .$$

Par ailleurs, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \ker d/\ker(d\circ m) & \xrightarrow{\overline{n}} & M'' \\ x + m(\ker(d\circ m)) & \longmapsto & n(x) \end{array}$$

est injective car $\ker n = \operatorname{im} m$. D'où : $[\ker d/\ker(d\circ m) : L] \leq [M'' : L] = 0$. Ainsi, $[\ker d/\ker(d\circ m):L] = 0$ et $[\ker d:L] = [\ker(d\circ m):L]$.

Ensuite, on montre que $[\ker(d\circ m):L] = [\ker \widetilde{d}:L]$.

La restriction de $d\circ m$ à $\ker \widetilde{d}$:

$$\begin{array}{ccc} \ker \widetilde{d} & \xrightarrow{(d\circ m)'} & N \\ x & \longmapsto & d\circ m(x) \end{array}$$

a pour noyau $\ker d\circ m \subseteq \ker \widetilde{d}$. Donc d'après le théorème du rang† :

$$[\ker \widetilde{d}:L] = [\ker(d\circ m):L] + [\operatorname{im}\,(d\circ m)':L] \ .$$

Mais, $\operatorname{im}\,(d\circ m)' \subseteq (d\circ m)(\ker \widetilde{d}) \subseteq \ker q = \operatorname{im} p$ donc

$$[\operatorname{im}\,(d\circ m)':L] \leq [\operatorname{im} p:L] \leq [N':L] = 0 \ .$$

Par conséquent, $[\operatorname{im}\,(d\circ m)':L] = 0$,

$$[\ker(d\circ m):L] = [\ker \widetilde{d}:L]$$

et

$$[\ker d:L] = [\ker \widetilde{d}:L] \ .$$

On en déduit que :

$$[M:L] = [\ker d:L] + [\operatorname{im}\,d:L] = [\ker \widetilde{d}:L] + [\operatorname{im}\,d:L]$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow [\operatorname{im}\,d:L] & = & [M:L] - [\ker \widetilde{d}:L] \\ & = & [M':L] + [M'':L] - [\ker \widetilde{d}:L] \\ & = & [M':L] - [\ker \widetilde{d}:L] \\ & = & [\operatorname{im}\,\widetilde{d}:L] \end{array}$$

d'après le théorème du rang. **Q.e.d.**

Cela achève en même temps la démonstration du lemme V.3.10.

Par ailleurs, $\Omega_i \sqcup \Omega_{i+1}$ est un localement fermé où Ω_i est ouvert. D'après le lemme I.1.3, il existe donc une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^i_{\Omega_i\sqcup\Omega_{i+1}}(\mathscr{L}_h) \to H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \xrightarrow{\delta^i} H^i_{\Omega_{i+1}}(\mathscr{L}_h) \to \ldots$$

† Si f est un morphisme entre deux $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$−modules E et F dont le premier est de type fini, alors $[E:L] = [\ker f:L] + [\operatorname{im}\,f:L]$.

En fait, $\delta^i = \widetilde{d^i}$:

Proposition V.3.12 *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathscr{L}_h) \arrow[r, "d^i"] & H^i_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}(\mathscr{L}_h) \arrow[d, "p_{i+1}"] \\ H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) \arrow[u, "\kappa_i"] \arrow[ur, "e_i"] \arrow[r, "\delta^i"'] & H^i_{\Omega_{i+1}}(\mathscr{L}_h) \end{tikzcd}$$

($\Omega_i \sqcup Z_i - Z_{i+1}$ est localement fermé, d'où la «flèche diagonale» e_i).

Démonstration : Montrons d'abord que $\Omega_i \cup Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}$ est bien localement fermé (et contient Ω_i comme ouvert). On vérifie que :

$$(\overline{\Omega_i \cup Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}}) \setminus (\Omega_i \cup Z_{i+1} \setminus Z_{i+2})$$
$$= (\overline{\Omega_i} \setminus \Omega_i \setminus Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}) \cup (\overline{Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}} \setminus Z_{i+1} \setminus Z_{i+2})$$

est fermé dans $\mathbf{X}$.

En effet, d'une part $Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}$ étant localement fermé,

$$\overline{Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}} \setminus Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}$$

est forcément fermé et d'autre part,

$$\overline{\Omega_i} \setminus \Omega_i \setminus Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}$$

est aussi fermé car c'est exactement la réunion des orbites de codimension $\geq i+2$ (dans $\mathbf{X}$) du fermé $\overline{\Omega_i} \setminus \Omega_i$.

Ω_i est ouvert dans l'union $\Omega_i \cup Z_{i+1} \setminus Z_{i+2}$ en tant que réunion d'orbites de dimension maximale.

Pour terminer, il suffit d'appliquer [Ke78, lemme 11.3]. **Q.e.d.**

Pour chaque $t \in W$, on pose

$$H^i_t(h) :\, = \bigoplus_{\sigma, \mathcal{O}} H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h) \ ,$$

la somme directe s'effectuant sur les $G \times G-$orbites $\mathcal{O}$ et les $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$ tels que l'orbite $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ est définie et de codimension i. Avec ces notations :

$$\forall\, i \geq 0,\ H^i_{\Omega_i}(\mathscr{L}_h) = \bigoplus_{t \in W} H^i_t(h) \ .$$

Si $i \geq 0$ et si $t \in W$, alors :

$$\delta^i(H^i_t(h)) \subseteq H^{i+1}_t(h) \ .$$

En effet, on observe que :

$$\delta^i(H^i_t(h)) = \delta^i(\bigoplus_{\sigma, \mathcal{O}} H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h)) \subseteq \sum_{\sigma, \mathcal{O}} \delta^i(H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h))$$

Mais, pour des raisons de supports,

$$\delta^i(H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h)) \subseteq \bigoplus H^{i+1}_{\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'}}(\mathscr{L}_h) \quad ,$$

somme directe sur les $B \times B^-$−orbites de la forme $\mathcal{O}'_{t',t',\sigma'}$ de codimension i et incluses dans l'adhérence $\overline{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}$; d'après la proposition V.3.6, cela entraîne que :

$$\delta^i(H^i_{\mathcal{O}_{t,t,\sigma}}(\mathscr{L}_h)) \subseteq \bigoplus_{\mathcal{O}',\sigma'} H^{i+1}_{\mathcal{O}'_{t,t,\sigma'}}(\mathscr{L}_h) \subseteq H^{i+1}_t(h) \quad .$$

On est donc ramené à déterminer

$$ker\delta^i_t/\mathrm{im}\,\delta^{i-1}_t$$

où les

$$\delta^i_t : H^i_t(h) \to H^{i+1}_t(h)$$

sont les restrictions de δ^i à $H^i_t(h)$ et vérifient :

$$\bigoplus_{t\in W} \delta^i_t = \delta^i \quad .$$

D'où :

$$[H^i(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))] = \sum_{t\in W} \left[\ker \delta^i_t/\mathrm{im}\,\delta^{i-1}_t : \mathrm{End}(L(\mu))\right]$$

pour tout $i \geq 0$.

V.3.10 Multiplicités de ker $\delta^{i,t}$/im $\delta^{i,t}$

Soit $t \in W$ et on va montrer :

Lemme V.3.13 *En tant que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$−modules,*

$$\ker \delta^i_t/\mathrm{im}\,\delta^{i-1}_t \simeq H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) \;\; (\forall\, i \geq 0) \quad .$$

Démonstration : $C(t,t)$ est un fermé de l'ouvert $X_{t,t} = (t,t).\mathbf{X}_0$ de codimension $=: c_t$. Soient, pour tout $p \geq 0$, Z'_p la réunion des $B \times B^-$orbites de $C(t,t)$ dont la codimension dans $C(t,t)$ est $\geq p$.

Les Z'_p sont des fermés de $X_{t,t}$ et on peut appliquer le théorème de Grothendieck-Cousin I.3.1 à la filtration :

$$X_{t,t} \supseteq C(t,t) = Z'_0 \supseteq Z'_1 \supseteq \ldots \supseteq Z'_p \supseteq \ldots \quad :$$

$H^{c_t+q}_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}})$ est le q−ième groupe d'homologie du complexe :

$$\ldots \to H^{p+c_t}_{Z'_p/Z'_{p+1}}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) \stackrel{d'^p}{\to} H^{p+1+c_t}_{Z'_{p+1}/Z'_{p+2}}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) \to \ldots$$

D'après le lemme d'excision, pour tout $r, p \geq 0$,

$$H^r_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) = H^r_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) \text{ et}$$

$$H^r_{Z'_p/Z'_{p+1}}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) = H^r_{Z'_p - Z'_{p+1}}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) = \bigoplus_{\Omega} H^r_\Omega(\mathscr{L}_h)$$

où Ω décrit l'ensemble des $B \times B^-$−orbites de $C(t,t)$ de codimension $c_t + p$ dans $\mathbf{X}$. Or, d'une part comme les $B \times B^-$−orbites de $C(t,t)$ sont exactement les $\mathcal{O}_{t,t,\sigma}$ ($\mathcal{O}$ $G \times G$−orbite et $\sigma \in \mathcal{E}^+(m)$),

$$H_t^i(h) = H^{i-c_t}_{Z'_{i-c_t}/Z'_{i-c_t+1}}(\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}}) \ (\forall\, i)$$

et d'autre part, on déduit du lemme V.3.9 que :

$$d'^{i-c_t} = \delta_t^i \ (\forall\, i) \ .$$

Par conséquent :

$$\forall\, i \geq 0,\ \ker \delta_t^i/\mathrm{im}\ \delta_t^{i-1} = \ker d'^{i-c_t}/\mathrm{im}\ d'^{i-c_t-1} = H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) \ .$$

(En particulier, $H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) = 0$ si $i < c_t$.) **Q.e.d.**

V.3.11 Où l'on se ramène à un cas torique

On a donc démontré que

$$H^i(\mathbf{X}, \mathscr{L}_h) = \bigoplus_{\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}} \sum_{t \in W} \left[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))\right] \mathrm{End} L(\mu) \ .$$

Il reste ainsi à calculer la multiplicité $\left[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))\right]$ pour chaque $t \in W$.

On va pour cela utiliser la décomposition des cellules de Bialynicki-Birula de $C(t,t)$ en produit de T−modules (*cf.* la proposition V.3.3).

On va exprimer la multiplicité précédente en fonction du caractère de

$$H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\big|_{\overline{T}_0})$$

qui a une structure de $\widetilde{T}$−module induite par l'action de $\widetilde{T} \times \{1\}$ sur $\overline{T}_0$ et qui est un groupe de cohomologie à support (fermé) d'un faisceau inversible sur la variété torique $\overline{T}_0$.

Par conséquent, on pourra se servir au final du théorème II.4.2 pour calculer ce caractère.

Proposition V.3.14 *Pour tout $t \in W$ et tout $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$,*

$$\left[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \mathrm{End}(L(\mu))\right] = \dim\left(H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\big|_{\overline{T}_0})\right)_{t^{-1}*\mu} \ .$$

Démonstration :
Soit $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$.
Puisque

$$X_{t,t} \simeq t(U) \times t(U^-) \times (t,t)\overline{T}_0 \ ,$$
$$C(t,t) \simeq t(U)^+ \times t(U^-)^- \times (t,t)S_{t,t}$$

(*cf.* la proposition V.3.3) et comme

$$\mathscr{L}_h\big|_{X_{t,t}} \simeq \mathscr{O}_{t(U)\times t(U^-)} \otimes \mathscr{L}_h\Big|_{(t,t)\overline{T}_0} \ ,$$

on a un isomorphisme de $\widetilde{T} \times \widetilde{T}-$modules :

$$H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) \simeq H^{2l(t)}_{t(U)^+ \times t(U^-)^-}(\mathscr{O}_{t(U)\times t(U^-)}) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} H^{i-2l(t)}_{(t,t)S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{(t,t)\overline{T}_0}) \ .$$

Or, d'après l'exemple qui suit le théorème II.3.2 (*cf.* page 32), le $T\times T-$module

$$H^{2l(t)}_{t(U)^+ \times t(U^-)^-}(\mathscr{O}_{t(U)\times t(U^-)})$$

a pour caractère :

$$\begin{aligned}\frac{e^{(t(\rho)-\rho,-t(\rho)+\rho)}}{\prod_{\alpha>0}(1-e^{(-\alpha,\alpha)})} &= \left[U(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})_{U(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}^-)}^{\otimes}\mathbb{K}_{(t,t)*0}\right]\\ &= [M(t*0,-t*0)] \ .\end{aligned}$$

En conséquence, $H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h)$ a le même caractère (en tant que $\widetilde{T}\times\widetilde{T}-$module) que :

$$\bigoplus_{\nu_1,\nu_2} U(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})_{U(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}^-)}^{\otimes} n_{\nu_1,\nu_2}\mathbb{K}_{\nu_1,\nu_2}$$

où (ν_1,ν_2) décrit l'ensemble des poids du $\widetilde{T}\times\widetilde{T}-$module $H^{i-2l(t)}_{(t,t)S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{(t,t)\overline{T}_0})$, n_{ν_1,ν_2} est la dimension de l'espace propre associé à (ν_1,ν_2) et $n_{\nu_1,\nu_2}\mathbb{K}_{\nu_1,\nu_2}$ est la droite $\mathbb{K}$, où $\widetilde{T}\times\widetilde{T}$ agit via le poids (ν_1,ν_2), comptée avec multiplicité n_{ν_1,ν_2}.

Or, d'une part :

$$\forall\, \underline{\nu} \in \widetilde{\mathfrak{X}}\times\widetilde{\mathfrak{X}},\ [H^{i-2l(t)}_{(t,t)S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{(t,t)\overline{T}_0})](\underline{\nu}) = [H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{\overline{T}_0})]((t^{-1},t^{-1}).\underline{\nu})$$

et d'autre part, tous les poids de $H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{\overline{T}_0})$ sont de la forme $(\gamma,-\gamma)$ pour un $\gamma\in\widetilde{\mathfrak{X}}$. Par conséquent :

$$n_{\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} \dim\left(H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h)\right)_{t^{-1}(\nu)} & \text{si } \nu_1 = -\nu_2 = \nu \\ 0 & \text{si } \nu_1+\nu_2 \neq 0 \end{cases}$$

où cette fois $H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h)$ est considéré en tant que $\widetilde{T}\times\{1\}-$module.

En notant, pour alléger, pour chaque caractère ν de $\widetilde{T}$, par m_ν la multiplicité du caractère ν dans $H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{\overline{T}_0})$, on a :

$$\begin{aligned}&\left[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h)\right]\\ &= \left[\bigoplus_{\nu\in\widetilde{\mathfrak{X}}} M(t*0,-t*0)\underset{\mathbb{K}}{\otimes} m_{t^{-1}.\nu}\mathbb{K}_{\nu,-\nu}\right]\\ &= \sum_{\nu\in\widetilde{\mathfrak{X}}} m_\nu\,[M(t*\nu,-t*\nu)] \ .\end{aligned}$$

Maintenant on va utiliser la proposition III.1.5 (page 56) : d'après celle-ci :

$$\left[\left(H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h)\right)_{\chi_{\mu,-\mu}}\right] = \sum_{\nu\in W*\mu} m_\nu\,[M(t*\nu,-t*\nu)]$$

où ν parcourt les caractères de $W * \mu$. Mais comme les $w * \mu$ sont deux à deux distincts lorsque w parcourt W (car μ est dominant et donc $\mu + \rho$ est régulier), on a :

$$\left[\left(H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h)\right)_{\chi_{\mu,-\mu}}\right] = \sum_{w \in W} m_{w*\mu} \left[M((tw) * \mu, -(tw) * \mu)\right] \ .$$

Finalement, en utilisant la sectionV.1.2, on trouve :

$$\left[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \operatorname{End}(L(\mu))\right] = \left[(H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h))_{\chi_{\mu,-\mu}} : L(\mu, -\mu)\right]$$

$$= \left[(H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h))_{\chi_{\mu,-\mu}}\right](\mu, -\mu)$$

$$= \sum_{w \in W} m_{w*\mu} \left[M((tw) * \mu, -(tw) * \mu)\right](\mu, -\mu)$$

$$= m_{t^{-1}*\mu}$$

car, étant donné que (μ, μ) est dominant, parmi les modules de Verma $M(\lambda)$ de plus haut poids $\lambda \in W * (\mu, -\mu)$, $M(\mu, -\mu)$ est le seul dont $(\mu, -\mu)$ est un poids, et, ce poids est de multiplicité 1. **Q.e.d.**

Pour terminer la démonstration du théorème, on calcule le caractère du $\widetilde{T}-$module $H^i_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\Big|_{\overline{T}_0})$:

V.3.12 Fin de la démonstration du théorème principal

Comme $\overline{T}_0$ est torique et définie par l'éventail $\mathcal{E}^+$ et comme $S_{t,t}$ est un fermé $\widetilde{T}-$stable de $\overline{T}_0$, on a juste besoin, grâce au théorème II.4.2, de connaître le support d'éventail $\Delta_{\overline{T}_0 \setminus Z}$:

$$|\Delta_{\overline{T}_0 \setminus Z}| = |\mathcal{E}^+_{\overline{T}_0 \setminus S_{t,t}}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}^+ \,:\, \mathrm{orb}(\sigma) \cap S_{t,t} = \emptyset} \sigma$$

$$= \bigcup_{\sigma} \sigma$$

où σ décrit les cônes de $\mathcal{E}^+$ dont le point-base z_σ n'appartient pas à $S_{t,t}$ *c-à-d* ceux qui vérifient :

$$\lim_{a \to 0} \gamma(a).z_\sigma \notin \overline{T}_0$$

avec $\gamma = t^{-1}(\zeta^+) - t^{-1}(\zeta^-) = t^{-1}(\zeta^+ - \zeta^-)$.

Lemme V.3.15 *Pour chaque $t \in W$:*

$$|\mathcal{E}^+_{\overline{T}_0 \setminus S_{t,t}}| = \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp$$

Démonstration :
Rappelons que pour tout n dans l'intérieur relatif de σ, $z_\sigma = \lim_{a \to 0} \gamma_n(a)$.

On vérifie que $\lim_{a\to 0}\gamma(a).z_\sigma$ n'appartient pas à $\overline{T}_0$ si et seulement s'il existe un $n \in \operatorname{int}\sigma$ tel que $n+\eta\gamma$ n'appartient plus à $\overline{\mathcal{C}^+}$ pour un η arbitrairement petit. Autrement dit :

$$\lim_{a\to 0}\gamma(a).z_\sigma \notin \overline{T}_0$$
$$\Leftrightarrow \exists\, n\in \operatorname{int}\sigma,\ \exists\,\epsilon>0\ \forall\, 0<\eta<\epsilon,\ n+\eta\gamma\notin|\mathcal{E}^+| = \overline{\mathcal{C}^+}\ .$$

On en déduit que :

$$|\mathcal{E}^+_{\overline{T}_0\,\setminus\, S_{t,t}}| = \left\{n\in\mathcal{C}^+\ :\ \exists\,\epsilon>0,\ \forall\,0<\eta<\epsilon,\ n+\eta\gamma\notin\overline{\mathcal{C}^+}\right\}\ .$$

Or, $n+\eta\gamma\notin\overline{\mathcal{C}^+} \Leftrightarrow \exists\,\alpha\in\Delta,\ \langle\alpha, n+\eta\gamma\rangle<0$

$$\Leftrightarrow \exists\,\alpha\in\Delta,\ \langle\alpha,n\rangle+\eta\langle\alpha,\gamma\rangle<0$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\alpha\in\Delta,\ \langle\alpha,\gamma\rangle<0 \text{ et } \eta > -\frac{\langle\alpha,n\rangle}{\langle\alpha,\gamma\rangle}\ .$$

On obtient :

$$|\mathcal{E}^+_{\overline{T}_0\,\setminus\, S_{t,t}}| = \{n\in\overline{\mathcal{C}^+}\ :\ \exists\,\alpha\in\Delta,\ \langle\alpha,\gamma\rangle<0 \text{ et } \langle\alpha,n\rangle=0\}\ .$$

D'un autre côté : $\langle\alpha,\gamma\rangle<0 \Leftrightarrow \langle\alpha, t^{-1}(\zeta^+-\zeta^-)\rangle<0$

$$\Leftrightarrow \langle t(\alpha),\zeta^+-\zeta^-\rangle<0$$
$$\Leftrightarrow t(\alpha)<0 \Leftrightarrow \alpha\in J_t\ .$$

En conséquence, on a bien :

$$|\mathcal{E}^+_{\overline{T}_0\,\setminus\, S_{t,t}}| = \bigcup_{\alpha\in J_t}\alpha^\perp\ .$$

Q.e.d.

Récapitulons, si $\mu\in\widetilde{\mathfrak{X}}^+, i\geq 0$, on a démontré que :

- $H^i(\mathbf{X},\mathscr{L}_h) = \sum_{\mu\in\widetilde{\mathfrak{X}}^+}[H^i(\mathbf{X},\mathscr{L}_h) : \operatorname{End}(L(\mu))]\operatorname{End}(L(\mu)$ d'après la section V.3.8 ;
- $[H^i(\mathbf{X},\mathscr{L}_h) : \operatorname{End}(L(\mu))] = \sum_{t\in W}[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \operatorname{End}(L(\mu))]$ suivant la section V.3.9 et le lemme V.3.13 ;
- $[H^i_{C(t,t)}(\mathscr{L}_h) : \operatorname{End}(L(\mu))] = \dim\left(H^{i-2l(t)}_{S_{t,t}}(\mathscr{L}_h\big|_{\overline{T}_0})\right)_{t^{-1}*\mu}$ selon la proposition V.3.14.

Enfin, on conclut la démonstration du théorème V.3.2 grâce au dernier lemme et au théorème II.4.2.

« *Et voilà !* »

Annexe A

A.1 Démonstration du lemme I.2.1 (p. 14)

On commence par le cas où $Z_2 = \emptyset$:

Z_1 est alors un fermé affine de X. Comme le faisceau $\mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ est à support dans Z_1, il existe une suite croissante de sous-faisceaux quasi cohérents $(\mathcal{G}_n)$ de $\mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F}_1)$ telle que :

- $\mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F}) = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{G}_n$;
- $\mathcal{G}_0 = (0)$;
- $\forall\, n \geq 0, \mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n$ est annulé par $\mathcal{I}_{Z_1}$, l'idéal de définition de Z_1.

Suivant [Ke78, lemme 9.7], il suffit de prendre $\mathcal{G}_n := [\mathcal{I}^n_{Z_1} : \mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F})]$, le faisceau des sections locales de $\mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F})$ annulées par l'idéal $\mathcal{I}^n_{Z_1}$.

D'après le lemme I.1.4 :

$$H^k(X, \mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n) = H^k(Z_1, (\mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n)|_{Z_1})$$

pour tout $k \geq 0$.

Puisqu'on a supposé que Z_1 était affine, on en déduit que :

$$H^k(X, \mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n) = (0)$$

si $k > 0$.

Or, on tire de la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n+1} \to \mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n \to 0$$

une suite exacte longue

$$\ldots \to H^k(X, \mathcal{G}_n) \to H^k(X, \mathcal{G}_{n+1}) \to H^k(X, \mathcal{G}_{n+1}/\mathcal{G}_n) \to \ldots$$

donc, on a des morphismes surjectifs :

$$H^k(X, \mathcal{G}_n) \twoheadrightarrow H^k(X, \mathcal{G}_{n+1}) \quad (\forall\, k > 0 \forall\, n \geq 0) \ .$$

Il en résulte, par récurrence sur $n \geq 0$, que

$$\forall\, k > 0, \forall\, n \geq 0, H^k(X, \mathcal{G}_n) = 0 \ .$$

Par conséquent :

$$H^k(X, \mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F})) = H^k(X, \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{G}_n) = \varinjlim_{n\geq 0} H^k(X, \mathcal{G}_n) = (0)$$

si $k > 0$.

Finalement, la suiite spectrale précédant l'énoncé du lemme dégénère et on obtient :

$$\Gamma(X, \mathscr{H}^i_{Z_1}(\mathcal{F}) \simeq H^i_{Z_1}(\mathcal{F}) \ .$$

Passons au cas général :

Soit $j : X \setminus Z_2 \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. On a :

$$(\bigstar) j_* \left(\mathscr{H}^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \right) = \mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \ .$$

En effet, il suffit de vérifier cette égalité sur les ouverts affines U de X :

$$\Gamma(U, j_* \left(\mathscr{H}^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \right)) = \Gamma(U \setminus Z_2, \mathscr{H}^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}))$$

$$= \Gamma(U \setminus Z_2, \mathscr{H}^i_{Z_1 \cap U \setminus Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_{U \setminus Z_2}))$$

$$= H^i_{Z_1 \cap U \setminus Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_{U \setminus Z_2})$$

car $Z_1 \cap U \setminus Z_2 \cap U = Z_1 \setminus Z_2 \cap U$ est un fermé affine de $U \setminus Z_2$ et on peut utiliser le premier cas (*cf.* ci-dessus).

Or, d'après le lemme d'excision (I.1.2) :

$$H^i_{Z_1 \cap U \setminus Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_{U \setminus Z_2}) = H^i_{Z_1 \cap U / Z_2 \cap U}(\mathcal{F}|_U)$$

$$= \Gamma(U, \mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}))$$

car U est affine.

Ceci démontre $(\bigstar)$.

On conclut :

$$\Gamma(X, \mathscr{H}^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})) = \Gamma(X, j_* \left(\mathscr{H}^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \right)$$

$$= \Gamma(X \setminus Z_2, \mathscr{H}^i_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}))$$

$$= H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2})$$

(en raison du premier cas appliqué à $Z_1 \setminus Z_2$ qui est un fermé affine de $X \setminus Z_2$)

$$= H^i_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$$

(grâce au lemme d'excision). **Q.e.d.**

A.2 Démonstration du théorème de Grothendieck-Cousin I.3.1 (p. 14)

Soit $\mathcal{I}^*$ une résolution flasque de $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots$$

On a une filtration de complexes :

$$\Gamma_{Z_0}(\mathcal{I}^*) = \bigcup_{p \geq 0} \Gamma_{Z_p}(\mathcal{I}^*)$$

de quotients successifs $\Gamma_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{I}^*) \quad (p \geq 0)$.

Grâce à [CE, XV §4] et avec

$$A : = \Gamma_{Z_0}(\mathcal{I}^*),$$

$$F^p(A) : = \Gamma_{Z_p}(\mathcal{I}^*),$$

$$F^{p,q}(A) : = \Gamma_{Z_p}(\mathcal{I}^{p+q}) \quad (\forall\, p \geq 0,\, \forall\, q \in \mathbb{Z}),$$

on obtient une suite spectrale commençant par :

$$\dots \to E_1^{p,q} \overset{d_1^{p,q}}{\to} E_1^{p+1,q} \to \dots$$

où $E_1^{p,q}$ est le $p+q-$ième groupe d'homologie

$$h^{p+q}(F^p(A)/F^{p+1}(A)) = h^{p+q}(\Gamma_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{I}^*)) \ .$$

Comme $\mathcal{I}^*$ est une résolution flasque de $\mathcal{F}$, on reconnaît les groupes de cohomologie à support suivants :

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}_{Z_p/Z_{p+1}}(\mathcal{F})$$

et les morphismes du lemme de Grothendieck I.1.3.

La suite spectrale converge :

$$E_1^{p,q} \Rightarrow h^{p+q}(A) = h^{p+q}(\Gamma_{Z_0}(\mathcal{I}^*)) = H^{p+q}_{Z_0}(\mathcal{F})$$

car $F^p(A) = \Gamma_{Z_p}(\mathcal{I}^*) = 0$ si $p > n$ (*cf.* [CE, XV §4 proposition 4.1]).

Q.e.d.

Annexe B

B.1 Démonstration du lemme II.4.6 (p. 49)

On reprend les notations de la section II.4 sur les variétés toriques et en particulier celles du lemme II.4.6, « avec $h = 0$ ». En particulier, pour tous $\sigma \in \Delta$ et $m \in M$:

$$\mathbb{K}_\sigma(m) :\ = \begin{cases} \mathbb{K}_\sigma & \text{si } m \in \operatorname{int} \sigma^\vee \cap M \\ (0) & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour tous σ, $\tau \in \Delta$:

$$q_{\tau/\sigma} : \mathbb{K}_\sigma(m) \to \mathbb{K}_\tau(m)$$

est le morphisme défini par Ishida (*cf.* le début de la section II.4.5) si $m \in \operatorname{int} \tau^\vee$ et 0 sinon.

On a le :

Théorème B.1.1 *Il existe une famille d'isomorphismes (de* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels) :*

$$\varphi_\sigma : (H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{O}_{\Omega_\sigma}))_{\widehat{m}} \overset{\simeq}{\to} \mathbb{K}_\sigma(m)$$

telle que, pour toutes paires de cônes $\sigma \leq \tau$ *de* Δ *avec* $\dim \tau = \dim \sigma + 1$*, le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} H^{\dim \sigma}_{\mathrm{orb}(\sigma)}(\mathscr{O}_{\Omega_\sigma})_{\widehat{m}} & \xrightarrow{d_{\tau/\sigma}} & H^{\dim \tau}_{\mathrm{orb}(\tau)}(\mathscr{O}_{\Omega_\tau})_{\widehat{m}} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\tau} \\ \mathbb{K}_\sigma(m) & \xrightarrow{q_{\tau/\sigma}} & \mathbb{K}_\tau(m) \end{array}$$

commute.

Démonstration : Il suffit de démontrer ce théorème pour un éventail de la forme :

$$\Delta = \{\sigma\ :\ \sigma \leq \tau\}$$

pour un certain cône τ de N. Soit d la dimension d'un tel τ. On procède par réurrence sur d.

Pour tout cône σ de Δ, soit $F(\sigma)$ le T_N-module $\bigoplus_{m\in M} \mathbb{K}_\sigma(m).(\widehat{-m})$. Si on appelle Φ_m l'ensemble

$$\{\sigma \in \Delta \ : \ m \in \operatorname{int} \sigma^\vee \cap M\} \ ,$$

alors $F(\sigma)_{\widehat{m}}$ est la $\sigma-$ième composante du complexe d'Ishida de Φ_m.

Notons :

$$\epsilon : \mathbb{K}[M \cap \tau^\vee] \hookrightarrow \mathbb{K}[M] = F(0)$$

l'inclusion canonique. On obtient le *complexe d'Ishida augmenté* de Φ_m :

$$(I) \ : \ 0 \to \mathbb{K}[M \cap \tau^\vee] \xrightarrow{\epsilon} F(0) \to \ldots \to \bigoplus_{\sigma\in\Phi_m(i)} F(\sigma) \xrightarrow{q^i} \ldots \xrightarrow{q^{d-1}} F(\tau) \ .$$

Pour alléger les notations, on pose :

$$G(\sigma) : = H^{\dim\sigma}_{\mathrm{orb}\sigma}(\mathscr{O}_{\Omega_\sigma})$$

si $\sigma \in \Delta$.

Le complexe de Grothendieck-Cousin, associé au faisceau $\mathscr{O}_{\Omega_\tau}$ et à la filtration de Ω_τ donnée par la codimension des orbites, s'écrit :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{\Omega_\tau} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{\sigma\in\Delta(i)} G(\sigma) \arrow[r, "d^i"] & \cdots \\ & \mathbb{K}[M\cap\tau^\vee] & & & \end{tikzcd}$$

Il s'agit d'une suite exacte car la variété $X(\Delta) = \Omega_\tau$ est affine.

Commençons la récurrence : lorsque $d = 0$, comme $G(0) = F(0) = \mathbb{K}[M]$, il suffit de poser $\varphi_0 : = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[M]}$.

Maintenant on suppose que sont construits des isomophismes

$$\varphi_\sigma : G(\sigma) \to F(\sigma)$$

pour les cônes de Δ de dimension inférieure ou égale à $d-1$ ($d \geq 1$), tels que, si on note

$$\varphi^j : \bigoplus_{\sigma\in\Delta(j)} G(\sigma) \to \bigoplus_{\sigma\in\Delta(j)} F(\sigma)$$

l'isomorphisme $\bigoplus_{\sigma\in\Delta(j)} \varphi_\sigma$, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G(0) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{\sigma\in\Delta(d-1)} G(\sigma) \arrow[r, "d^{d-1}"] \arrow[d, "\varphi^{d-1}"] & G(\tau) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F(0) \arrow[r, "q^0"] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{\sigma\in\Delta(d-1)} F(\sigma) \arrow[r, "q^{d-1}"] & F(\tau) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme la ligne supérieure est exacte, si on suppose que le complexe d'Ishida augmenté (I) est d'homologie nulle en degré $d-1$, alors les flèches d^{d-1} et q^{d-1} sont respectivement les conoyaux de d^{d-2} et q^{d-2}. Mais, les φ^j ($j < d$) étant des isomorphismes, ces deux conoyaux sont isomorphes ; *c-à-d* qu'il existe un isomorphisme :

$$\varphi_\tau : G(\tau) \to F(\tau) \ ,$$

représenté par la flèche en pointillé du diagramme précédent, qui fait commuter celui-ci. A fortiori, pour toute face σ de τ, de codimension 1, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} G(\sigma)_{\widehat{m}} \arrow[r, "d_{\tau/\sigma}"] \arrow[d, "\varphi_\sigma"] & G(\tau)_{\widehat{m}} \arrow[d, "\varphi_\tau"] \\ F(\sigma)_{\widehat{m}} \arrow[r, "q_{\tau/\sigma}"] & F(\tau)_{\widehat{m}} \end{tikzcd}$$

commute (pour tout $m \in M$).

Grâce au lemme qui suit, cela achève la récurrence et la démonstration.

Lemme B.1.2 *Soit Δ un éventail. Si τ est un cône de dimension d de Δ, on considère, pour tout $m \in M$, le complexe d'Ishida (augmenté) suivant :*

$$0 \to \mathbb{Z}[M \cap \tau^\vee]_{\widehat{m}} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0(\Phi_m) \xrightarrow{q^0} \dots \xrightarrow{q^{d-1}} \mathcal{C}^d(\Phi_m) \to 0\ ,$$

avec $\Phi_m :\ = \{\sigma \in \Delta\ :\ \sigma \le \tau \text{ et } m \in M \cap \operatorname{int} \sigma^\vee\}$,

$$\mathbb{Z}[M \cap \tau^\vee]_{\widehat{m}} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \in -M \cap \tau^\vee \\ (0) & \textit{sinon} \end{cases}$$

et l'inclusion canonique ϵ.

Alors, ce complexe est d'homologie nulle en degré $d-1$, (c-à-d :

$$\ker q^{d-1} = \operatorname{im} q^{d-2}\ ).$$

* * *

Pour $\tau = 0$, c'est évident.

Pour démontrer ce lemme quand $d > 0$, on distingue deux cas : $\tau \in \Phi_m$ et $\tau \notin \Phi_m$.

Puisque Φ_m est une partie ouverte de Δ, si $\tau \in \Phi_m$, alors Φ_m est l'ensemble des faces de τ et $\mathbb{Z}[M \cap \tau^\vee]_{\widehat{m}} = (0)$. Dans ce cas, le lemme résulte du fait que l'ensemble des faces d'un cône est une partie homologiquement triviale (*cf.* [Is, pro. 2.3]).

Lorsque $\tau \notin \Phi_m$, alors le dernier terme du complexe, $\mathcal{C}^d(\Phi_m)$ est nul. Il s'agit donc de montrer que :

$$\mathcal{C}^{d-2}(\Phi_m) \xrightarrow{q^{d-2}} \mathcal{C}^{d-1}(\Phi_m)$$

est surjectif.

C'est vrai si $d = 1$. En effet, q^{-1} est l'augmentation ϵ et celle-ci est surjective sur $\mathcal{C}^0(\Phi_m) = \mathbb{Z}$ si et seulement si $m \in -M \cap \tau^\vee$. De plus, si on suppose τ de dimension 1, on a :

$$\begin{aligned} m \in -M \cap \tau^\vee &\Leftrightarrow m \notin M \cap \operatorname{int} \tau^\vee \\ &\Leftrightarrow \tau \notin \Phi_m\ . \end{aligned}$$

Si $d \ge 2$, alors $\mathcal{C}^{d-1}(\Phi_m) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi_m(d-1)} \mathbb{K}_\sigma$ et il s'agit donc de vérifier que pour chaque $\sigma \in \Phi_m(d-1)$, on a :

$$\mathbb{Z}_\sigma \subseteq \operatorname{im} q^{d-2}\ .$$

Soient $\sigma \in \Phi_m(d-1)$ et $x_\sigma \in \mathbb{Z}_\sigma$. Comme $m \notin M \cap \operatorname{int} \tau^\vee$ et comme $\operatorname{int} \tau^\vee$ est l'intersection des $\operatorname{int} \tau'^\vee$ où τ' décrit les faces de codimension 1 de τ, il existe une telle face τ' de τ, de dimension $d-1 \geq 1$, telle que $m \notin M \cap \operatorname{int} \tau'^\vee$ (*i.e.* $\tau' \notin \Phi_m$).

Puisque $q_{\tau/\tau'}$ est un isomorphisme, il existe certainement un $x_{\tau'} \in \mathbb{Z}_{\tau'}$ tel que :

$$q_{\tau/\tau'}(x_{\tau'}) = -q_{\tau/\sigma}(x_\sigma) \in \mathbb{Z}_\tau$$

$$\textit{i.e. } q_{\tau/\tau'}(x_{\tau'}) + q_{\tau/\sigma}(x_\sigma) = 0 \ .$$

Donc, si on note $\Gamma(\tau)$ l'ensemble des faces de $\tau \in \Delta$ et :

$$\mathcal{C}^*(\Gamma(\tau)) : 0 \to \mathbb{Z}_0 \overset{\widetilde{q}^0}{\to} \ldots \overset{\widetilde{q}^{d-1}}{\to} \mathbb{Z}_\tau$$

son complexe d'Ishida, alors on a :

$$\widetilde{q}^{d-1}(x_{\tau'} + x_\sigma) = 0 \ .$$

Mais le complexe $\mathcal{C}^*(\Gamma(\tau))$ est une suite exacte car $\Gamma(\tau)$ est homologiquement trivial (*cf.* [Is, pro. 2.3]).

Dès lors, $x_{\tau'} + x_\sigma \in \operatorname{im} \widetilde{q}^{d-2}$ et :

$$\exists\, y \in \bigoplus_{\rho \leq \tau, \dim \rho = d-2} \mathbb{Z}_\rho \ : \ \widetilde{q}^{d-2}(y) = x_{\tau'} + x_\sigma \ .$$

Décomposons : $y = y_1 + y_2$ avec :

$$y_1 \in \bigoplus_{\rho \leq \tau, \dim \rho = d-2, \rho \in \Phi_m} \mathbb{Z}_\rho = \mathcal{C}^{d-2}(\Phi_m)$$

$$\text{et } y_2 \in \bigoplus_{\rho \leq \tau, \dim \rho = d-2, \rho \notin \Phi_m} \mathbb{Z}_\rho = \mathcal{C}^{d-2}(\Gamma(\tau) \ \setminus \ \Phi_m) \ .$$

On va voir que $x_\sigma = q^{d-2}(y_1)$.

On a :

$$(*)\ \widetilde{q}^{d-2}(y_1) + \widetilde{q}^{d-2}(y_2) = x_{\tau'} + x_\sigma \ .$$

Or, compte tenu de la définition de $\widetilde{q}^*$ et du fait que Φ_m est une partie ouverte de Δ, on trouve :

$$\widetilde{q}^{d-2}(y_2) \in \bigoplus_{\rho \leq \tau, \dim \rho = d-1, \rho \notin \Phi_m} \mathbb{Z}_\rho \ .$$

Il s'ensuit, avec $(*)$, que, par rapport à la décomposition :

$$\mathcal{C}^{d-2}(\Phi_m) \oplus \mathcal{C}^{d-2}(\Gamma(\tau) \ \setminus \ \Phi_m) \ ,$$

x_σ est la composante de $\widetilde{q}^{d-2}(y_1)$ selon $\mathcal{C}^{d-2}(\Phi_m)$. Cela signifie précisément que $x_\sigma = q^{d-2}(y_1)$.

Q.e.d.

B.2 Démonstration de la proposition II.4.3 (p. 45)

Δ est simplicial signifie que pour tout $\sigma \in \Delta$, il existe une base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{R}\sigma$ (où $d := \dim \sigma$) telle que :

- pour tout $1 \leq i \leq d$, $e_i \in N \cap \sigma$;
- $\sigma = \mathbb{R}_+ e_1 + \ldots + \mathbb{R}_+ e_d$.

Cette base est unique.

Dès lors, pour tout $s \in \widetilde{\sigma}$, il existe un $d-$uplet $(x_1, \ldots, x_d)$ de réels non tous nuls (unique à homothétie près) tel que $s = x_1 + \ldots + x_d$ modulo $\mathbb{R}_+^*$.

Or, $\widetilde{\Delta} = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \widetilde{\sigma}$ et on peut poser :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \widetilde{\Delta} & \longrightarrow & N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r \\ s = [x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d] & \longmapsto & \frac{x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d}{x_1 + \ldots + x_d} \end{array} \right. .$$

Cette application continue est injective. Elle induit donc une *triangulation* des espaces $\widetilde{\Phi_2} \subseteq \widetilde{\Phi_1}$ (*cf.* [Spa, Chap. 3, section 1, §21]), *c-à-d* un homéomorphisme entre $\widetilde{\Phi_2} \subseteq \widetilde{\Phi_1}$ et les complexes simpliciaux $K_2 \subseteq K_1$ où :

$$K_\epsilon := \bigcup_{\sigma \in \Phi_\epsilon} \widetilde{\sigma} \quad (\epsilon = 1, 2) \ .$$

En conséquence,

$$\forall\, i,\ H^i(\widetilde{\Phi_1}, \widetilde{\Phi_2}; \mathbb{K}) = H^i(K_1, K_2)$$

où $H^i(K_1, K_2)$ est le $i-$ième groupe de cohomologie relative des complexes simpliciaux $K_1 \subseteq K_2$ (*cf.* [Spa, Cha. 4, section 3, §13 p. 172]). Or, $H^i(K_1, K_2)$ est le $i-$ième groupe d'homologie d'un complexe, le complexe dual de celui qui permet de calculer l'homologie relative de (K_1, K_2). Lorsque $K_2 \neq \emptyset$ (respectivement $K_2 = \emptyset$), ce complexe (respectivement le complexe augmenté associé) est isomorphe au complexe d'Ishida $(\mathcal{C}^{j-1}, d^{j-1})_{j \geq 0}$ de Φ (avec un décalage) (*cf.* [Wa, Chapitre 9, §6] et [O91, §3]). **Q.e.d.**

Annexe C

C.1 Démonstration de la proposition III.1.2 (p. 55)

On s'inspire de [Di, exercice 7.8.15] et de [BGG, §8, proposition 8.6]

On va démontrer le (i) et le (ii). Pour cela, on reprend les notations de la section III.1.1.1.

M est un $Z(\mathfrak{g})-$module et pour tout idéal I de $Z(\mathfrak{g})$, on pose :

$$[I : M] :=\{m \in M \mid \forall\, i \in I,\, i.m = 0\}$$

$$\text{et } [I^\infty : M] :=\bigcup_{n>0}[I^n : M]\,.$$

Si $\chi \in Z(\mathfrak{g})'$ et si $k > 0$, on a :

$$M_\chi^{(k)} = [(\ker\chi)^k : M]\ .$$

En effet,

$\subseteq$: si $m \in M_\chi^{(k)}$ et si $x_1, \ldots, x_k \in \ker\chi$,

$$x_1 \cdots x_k.m = (x_1 - \chi(x_1)) \cdots (x_k - \chi(x_k)).m = 0\ .$$

$\supseteq$: si $m \in [(\ker\chi)^k : M]$ et si $z_1, \ldots, z_k \in Z(\mathfrak{g})$, alors :

$$\forall\, 1 \le j \le k,\ (z_j - \chi(z_j)) \in \ker\chi \text{ et } (z_1 - \chi(z_1)) \cdots (z_k - \chi(z_k)) \in (\ker\chi)^k$$

donc :

$$(z_1 - \chi(z_1)) \cdots (z_k - \chi(z_k)).m = 0\ .$$

i) Soient $\chi_1, \ldots, \chi_l \in Z(\mathfrak{g})'$ des caractères centraux deux à deux distincts ; montrons que si

$$\forall\, 1 \le i \le l,\ m_i \in M_{\chi_i},$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = 0 \Rightarrow m_i = 0\,(\forall\, i)$$

remarquons que les $(\ker\chi_i)_{1\leq i\leq l}$ sont des idéaux maximaux deux à deux distincts de $Z(\mathfrak{g})$ et que

$$\forall\, 1 \leq i \leq l,\; m_i \in M_{\chi_i}^{(k_i)}$$

pour un certain $k_i > 0$. Puisque $\prod_{i>1}(\ker\chi_i)^{k_i} \not\subseteq \ker\chi_1$, on peut choisir

$$z \in \prod_{i>1}(\ker\chi_i)^{k_i} - \ker\chi_1$$

Ainsi,

$$0 = z.\sum_{i=1}^{l} m_i = z.m_1 = \chi_1(z)m_1 \Rightarrow m_1 = 0$$

car $\chi_1(z) \neq 0$ et :

$$\forall\, i > 1,\; \prod_{j>1}(\ker\chi_j)^{k_j} \subseteq (\ker\chi_i)k_i\ .$$

De même, les autres m_i sont nuls.

ii) C'est une conséquence des deux lemmes suivants, vrais pour un $\mathfrak{g}-$module quelconque :

Lemme C.1.1 *Si $\chi_1, \ldots, \chi_l$ sont des caractères distincts et si $n_1, \ldots, n_l$ sont des entiers > 0 alors :*

$$[(\ker\chi_1)^{n_1}\cdots(\ker\chi_l)^{n_l} : M] = \bigoplus_{i=1}^{l} M_{\chi_i}(n_i)$$

Lemme C.1.2 *Si $m \in M$ et $\theta \in Z(\mathfrak{g})'$:*

$$\ker\theta.m \subseteq \bigoplus_{\chi\in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi \Longrightarrow m \in \bigoplus_{\chi\in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi\ .$$

* * *

En effet, si M est un $\mathfrak{g}-B-$module, alors

$$N :\, = {}^{M}\!/_{\sum_{\chi\in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi}$$

aussi. En particulier, N est un $B-$module rationnel. Considérons pour tout caractère de B λ, l'espace propre :

$$N_\lambda^{(B)} :\, = \{n \in N\ :\ \forall\, b \in B,\ b.n = \lambda(b)n\}$$

et :

$$N^{(B)} :\, = \bigcup_{\lambda\in X^*(B)} N_\lambda^{(B)}$$

Soient $\pi : M \to N$ la surjection canonique et $m \in M$ tel que $\pi(m) \in N_\lambda^{(B)}$, pour un certain caractère λ.

$$\forall\, X \in \mathfrak{n}_+,\ X.\pi(m) = 0$$

Grâce à la proposition 7.1.8 de [Di], on en déduit que le $\mathfrak{g}-$module

$$U(\mathfrak{g}).\pi(m)$$

admet χ_λ pour caractère central. Par conséquent,

$$\ker \chi_\lambda\ .m \in \sum_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi$$

et $\pi(m) = 0$ car $m \in \sum_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi$ à cause du lemme C.1.2. Ainsi,

$$\forall\, \lambda \in X^*(B),\ N_\lambda^{(B)} = (0) \text{ et } N^{(B)} = (0)\ .$$

On conclut que $N = (0)$ à l'aide du théorème de Lie-Kolchin (*cf.* le §17.6 de [Hu95]).

Remarque : si au lieu d'une structure de $\mathfrak{g} - B-$module, on suppose que M admet un caractère, alors on a toujours :

$$M = \bigoplus_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi\ .$$

En effet, les deux lemmes précédents sont encore valables et pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, M_λ est un sous-$Z(\mathfrak{g})-$module de M qui est de dimension finie sur $\mathbb{K}$. En particulier,

$$\forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*, M_\lambda = \bigoplus_\chi (M_\lambda)_\chi$$

D'où :

$$\begin{aligned} M &= \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \bigoplus_\chi (M_\lambda)_\chi \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \bigoplus_\chi M_\lambda \bigcap M_\chi \\ &= \bigoplus_\chi \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\chi \bigcap M_\lambda \\ &= \bigoplus_\chi M_\chi\ . \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer les lemmes ci-dessus. Commençons par démontrer que le lemme C.1.1 implique le lemme C.1.2 :

$$\bigoplus_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi = \bigcup_{\substack{F \subseteq Z(\mathfrak{g})' \\ \text{fini}}} \bigoplus_{\chi \in F} M_\chi$$

$$= \bigcup_{\substack{F \subseteq Z(\mathfrak{g})' \\ \text{fini}}} \bigoplus_{\chi \in F} \bigcup_{n_\chi > 0} M_\chi^{(n_\chi)} = \bigcup_{\substack{F \subseteq Z(\mathfrak{g})' \\ \text{fini}}} \bigcup_{\substack{(n_\chi)_{\chi \in F} \\ \forall\, \chi,\ n_\chi > 0}} \bigoplus_{\chi \in F} M_\chi^{(n_\chi)}$$

Or comme $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre nœthérienne (*cf.* le corollaire 2.3.8 de [Di]), $U(\mathfrak{g}) \ker \theta.m$ est un $U(\mathfrak{g})-$module nœthérien, en tant que sous-$U(\mathfrak{g})-$module de $U(\mathfrak{g}).m$, et $U(\mathfrak{g}) \ker \theta.m \subseteq \bigoplus_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi$. Il existe donc des caractères deux à deux distincts

$$\chi_1, \ldots, \chi_l \in Z(\mathfrak{g})'$$

et des entiers $n_1, \ldots, n_l > 0$ tels que :

$$U(\mathfrak{g}) \ker \theta.m \subseteq \sum_{i=1}^{l} M_{\chi_i}^{(n_i)} = [(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l} : M] \ .$$

Dès lors :

$$(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l}. \ker \theta.m = (0)$$

et en particulier :

$$m \in \sum_{\chi \in Z(\mathfrak{g})'} M_\chi \ .$$

Maintenant, pour démontrer le lemme C.1.1, il suffit de montrer que

$$[(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l} : M] \subseteq \sum_{i=1}^{l} M_{\chi_i}^{(n_i)}$$

si $l > 1$. Or, $(\ker \chi_1)^{n_1} + \prod_{j=2}^{l} (\ker \chi_j)^{n_j} = Z(\mathfrak{g})$ parce que sinon, on pourrait trouver un idéal maximal de $Z(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{m}$, tel que :

$$\mathfrak{m} \supseteq (\ker \chi_1)^{n_1} + \prod_{j=2}^{l} (\ker \chi_j)^{n_j} = Z(\mathfrak{g}) \ .$$

Cela entraînerait que

$$\mathfrak{m} \supseteq \ker \chi_1 \text{ et } \mathfrak{m} \supseteq \ker \chi_j$$

pour un $j > 1$ puis que :

$$\mathfrak{m} = \ker \chi_1 = \ker \chi_j$$

par maximalité. Mais ceci est impossible étant donné que $\chi_j \neq \chi_1$ si $j > 1$. Il existe donc $a \in \ker \chi_1$ et $b \in \prod_{j=2}^{l} (\ker \chi_j)^{n_j}$ tels que $a + b = 1$:

$$\forall\, m \in [(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l} : M],$$

$$m = a.m + b.m \in [\prod_{j=2}^{l} (\ker \chi_j)^{n_j} : M] + [(\ker \chi_1)^{n_1} : M]$$

$$\Rightarrow [(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l} : M] \subseteq [\prod_{j=2}^{l} (\ker \chi_j)^{n_j} : M] + M_{\chi_1}^{n_1}$$

Par récurrence, on aboutit à :

$$[(\ker \chi_1)^{n_1} \cdots (\ker \chi_l)^{n_l} : M] \subseteq \sum_{i=1}^{l} M_{\chi_i}^{(n_i)}$$

Q.e.d.

Bibliographie

[A81] H. H. ANDERSEN, *Line bundles on flag manifolds*, in Astérisque 87-88, pp. 21-42, 1981.

[AL] H. H. ANDERSEN, N. LAURITZEN, *Twisted Verma modules*, prépublication math.QA0105012, 2001.

[B89] M. BRION *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. 58, No.2, 397-424, 1989

[B98] M. BRION, *The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition*, Comm. Math. Helvetici 73, pp 137-174, 1998.

[B01] M. BRION, *On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties*, Commentarii mathematici helvetici, pp 263-299, 2001.

[BB73] A. BIALYNICKI-BIRULA, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of mathematics 98, pp 480-497, 1973.

[BB76] A. BIALYNICKI-BIRULA, *Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 24, 667-674 1976.

[BB82] W. BORHO et J.-L. BRYLINSKI, *Differential operators in homogeneous spaces, I*, Inventiones mathematicæ 69, 437-476, 1982.

[BB96] F. BIEN et M. BRION, *Automorphisms and local rigidity of regular varieties*, Compositio mathematica 104, pp 1-26, 1996.

[BCP] E. BIFET, C. DE CONCINI et C. PROCESI, *Cohomology of regular embeddings*, Advances in mathematics 82, pp. 1-34, 1990.

[BGG] I. N. BERNSTEIN, I. M. GELFAND et S. I. GELFAND *Differential operators on the base affine space and a study of g-modules*, Lie group representations, Proc. summer school Bolyai Janos math. soc., Budapest 1971, pp 21-64, 1975.

[Bj93] J.-E. BJÖRK, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Mathematics and its Applications, 247, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[BL] M. BRION et D. LUNA, *Sur la structure locale des variétés sphériques*, Bull. Soc. math. France, 115, pp 211-226, 1987.

[Bo87] A. Borel, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, Vol. 2, Academic Press, 1987.

[Bot] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math., II. Ser. 66, pp 203-248, 1957.

[Bou] N. Bourbaki, *Élements de mathematiques*, Algebre, Chapitre 10 : Algebre homologique. Masson, Paris, 1980.

[Boz] M. Bozicevic, *A geometric construction of a resolution of the fundamental series*, Duke ma. j. vol. 60 n° 3, pp. 643-669, 1990.

[BP] M. Brion, P. Polo, *Large Schubert varieties*, Represent. Theory 4, n° 6, pp 97-126, 2000.

[Br] J.-L. Brylinski, *Differential operators on the flag varieties*, in *Young tableaux and Schur functors*, Astérisque n° 87-88, pp 43-60, 1981.

[CE] É. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1957.

[Da] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russ. Math. surveys 33, pp 97-154, 1978.

[DCP] C. De Concini et C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Invariant theory, Proc. 1st 1982 Sess. C.I.M.E., Montecatini/Italie, Lect. Notes Math. 996, pp 1-44, 1983.

[De70] M. Demazure *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. Norm. Sup. (4) 3, pp. 507-588, 1970.

[DG70] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Tome I, Masson ; North-Holland, XXVI, 1970.

[Di] J. Dixmier *Algèbres enveloppantes* Cahiers scientifiques, Fasc. XXXVII, Paris - Bruxelles - Montreal: Gauthier-Villars Éditeur, 1974.

[FF] B.L. Feigin et E.V. Frenkel, *Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds*, Commun. Math. Phys. 128, pp 161–189, 1990.

[Fu] W. Fulton *Introduction to toric varieties* The 1989 William H. Roever lectures in geometry, Annals of Mathematics Studies, 131, Princeton University Press 1993.

[G62] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* , Séminaire de géométrie algébrique, fascicule I, 1962.

[G67] A. Grothendieck, *Local cohomology*, Lecture Notes in Mathematics 41, Springer-Verlag 1967.

[Go] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann Paris, 1958.

[GW] S. Goto et K. Watanabe, *On graded rings, II*, Tokyo j. Math. 1, n° 2, pp 237-261, 1978.

[Ha66] R. HARTSHORNE, *Residues and duality*, Lect. N. M. n° 20, Springer, 1966.

[Ha68] R. HARTSHORNE, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. Math. (2) 88, 403-450 1968.

[Ha97] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer 8^e édition, 1997.

[Hu95] J. HUMPHREYS, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 4e édition, 1995.

[Is] M.-N. ISHIDA, *Torus embeddings and dualizing complexes*, Tôhoku Math. Journ., 32, 111-146, 1980.

[Iv72] B. IVERSEN, *A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties*, Inventiones math. 16, pp. 229-236, 1972.

[Iv76] B. IVERSEN, *The geometry of algebraic groups*, Advances in mathematics 20, pp 57-85, 1976.

[Ja] J. C. JANTZEN, *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press, XIII, 1987.

[K] S. KATO, *A Borel-Weil-Bott type theorem for group completions*, à paraître.

[Ka78] M. KASHIWARA, *On the holonomic systems of linear differential equations, II*, Inventiones mathematicae 49, pp 121-135, 1978.

[Ka90] M. KASHIWARA *Kazhdan-Lusztig conjecture for a symmetrizable Kac-Moody Lie algebra* in *The Grothendieck Festschrift II*, Prog. Math. 87, pp. 407-433, 1990.

[Ke78] G. KEMPF, *The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation*, Advances in Mathematics 29, pp 310-396, 1978.

[Ke93] G. KEMPF, *Algebraic varieties*, Cambridge University Press, 1993.

[KKLV] F. KNOP, H. KRAFT D. LUNA et T. VUST, *Local properties of algebraic group actions* in *Algebraic transformation groups and invariant theory*, H. KRAFT, P. SLODOWY, T. A. SPRINGER (eds.), DMV seminar, Band 13, Birkhäuser, 1989.

[KKV] F. KNOP, H. KRAFT et T. VUST, *The Picard group of a G-variety* in *Algebraic transformation groups and invariant theory*, H. KRAFT, P. SLODOWY, T. A. SPRINGER (eds.), DMV seminar, Band 13, Birkhäuser, 1989.

[Kn] F. KNOP, *On the set of orbits for a Borel subgroup*, Comment. Math. Helv. 70, No.2, pp. 285-309, 1995.

[Ko] J. KONARSKI, *The B-B decomposition via Sumihiro's theorem*, Journal of algebra 182, n° 1, pp 45-51, 1996.

[Ku] S. KUMAR, *Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution for arbitrary Kac-Moody algebras*, Math. Ann. 286, pp 709-729, 1990.

[Ma70] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Mathematics lecture note series, New-York, Benjamin,
1970.

[Mu] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, B. 34, Springer-Verlag, 1965.

[MuR] M. Murray et J. Rice, *A geometric realisation of the Lepowsky-Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution*, Proc. Am. ma. soc. vol. 114, n° 2, pp. 553-559, 1992.

[O78] T. Oda, *Lectures on torus embeddings and applications. (Based on joint work with Katsuya Miyake.)* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, Bombay, Springer-Verlag, XI, 1978.

[O88] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1988.

[O91] T. Oda *Simple convex polytopes and the strong Lefschetz theorem* J. Pure Appl. Algebra 71, No.2/3, pp 265-286, 1991.

[Se66] J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin, 1966.

[Se75] J.-P. Serre, *Algèbre locale - multiplicités*, Lect. N. Math. n° 11, Springer-Verlag, 1975.

[Sp81] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, 1981.

[Sp] T.A. Springer, *Intersection cohomology of $B \times B-$orbits in group compactifications*, prépublication disponible à http://www.math.uu.nl/people/vdkallen/kallen.html .

[Spa] E. H. Spanier Algebraic topology, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York etc. XIV, 1966.

[Sta] R. P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra* Progress in Mathematics, Vol. 41, Birkhäuser, 1983.

[Str] E. S. Strickland, *A vanishing theorem for group compactifications*, Math. Ann. 277, pp. 165-171, 1987.

[Su] H. Sumihiro *Equivariant completion* J. Math. Kyoto Univ. 14, pp. 1-28, 1974.

[Tch] A. Tchoudjem, *Cohomologie des fibrés en droites sur la compactification magnifique d'un groupe semi-simple adjoint*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334, n° 6, pp. 441–444, 2002.

[Wa] A. H. Wallace *Introduction à la topologie algébrique*, traduit de l'anglais par J.-L. Verley, Paris : Gauthier-Villars Éditeur, XI, 1973.

[Wu] S. Wu, *On the instanton complex of holomorphic Morse theory*, Adelaide IGA preprint 1998-07, math.AG/9806118, 1998.