

SUR LA COHOMOLOGIE À SUPPORT DES FIBRÉS EN DROITES SUR LES VARIÉTÉS SYMÉTRIQUES COMPLÈTES

ALEXIS TCHOUDJEM

Institut Camille Jordan
Université Lyon I
43, Bd. du Onze Novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France
tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Abstract. Let X be a complete symmetric variety, i.e., the wonderful compactification of a symmetric G -homogeneous space (where G is a simply connected semi-simple linear algebraic group). If L is a line bundle over X and if C is a Bialynicki-Birula cell of codimension c in X , then the Lie algebra \mathfrak{g} of G operates naturally on the cohomology group with support $H_C^c(L)$. A necessary condition on C for the existence of a finite-dimensional simple subquotient of this \mathfrak{g} -module is given. As applications one calculates the Euler–Poincaré characteristic of L over X , estimates the higher cohomology group $H^d(X, L)$, $d \geq 0$, and obtains the exact formulas in some cases including that of the complete conic variety.

Résumé. Étant donné un groupe algébrique linéaire semi-simple G , on s'intéresse aux compactifications magnifiques des G -espaces homogènes symétriques. Si X est une telle compactification, si L est un fibré en droites G -linéarisé sur X et si C est une cellule de Bialynicki-Birula de X de codimension c , alors l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G opère naturellement sur le groupe de cohomologie à support $H_C^c(L)$. On donne ici une condition nécessaire, portant sur la cellule C , pour que ce \mathfrak{g} -module possède un sous-quotient simple de dimension finie. On en déduit une formule pour la caractéristique d'Euler–Poincaré de L sur X et une estimation (exacte pour certains cas dont celui de la variété des coniques complètes) des groupes de cohomologie supérieure $H^d(X, L)$, $d \geq 0$.

Translated Introduction

Let \mathbf{k} be an algebraically closed field of characteristic zero.

Let G be a semisimple linear algebraic group over \mathbf{k} and \mathfrak{g} its Lie algebra. If X is a smooth projective G -variety and L is a G -linearized line bundle over X , then all the cohomology groups $H^d(X, L)$, $d \geq 0$, are finite-dimensional G -modules.

When X has a cellular decomposition

$$X = \bigsqcup_i C_i$$

where the cells C_i are subvarieties of X , of codimension c_i and isomorphic to affine spaces, there is a spectral sequence, the *Grothendieck–Cousin spectral sequence* (cf. [K]), whose first terms are the cohomology groups with support $H_{C_i}^{c_i}(L)$ and which converges to the global cohomology group $H^d(X, L)$.

We remark that the $H_{C_i}^{c_i}(L)$ are only \mathfrak{g} -modules which can have infinite dimension whereas the $H^d(X, L)$ are finite-dimensional G -modules.

In some cases, the “finite” part of the Grothendieck–Cousin spectral sequence degenerates, i.e. the terms of the spectral sequence have constant multiplicities along each finite-dimensional simple \mathfrak{g} -module. This fact allows us to totally determine the $H^d(X, L)$. It happens when X is a flag variety (whence the famous Borel–Weil–Bott theorem) and, more generally, if X is a minimal rank wonderful variety (then X is a projective G -variety which has only one closed G -orbit and which has a cellular decomposition whose cells intersect that closed orbit), cf. [T2, théorème 3.1]. Here we are interested in complete symmetric varieties defined by De Concini and Procesi in [DCP]. These varieties also have only one closed orbit. When a cell C_i intersects this projective G -orbit, the \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$ has a finite decomposition sequence whose successive quotients are well studied \mathfrak{g} -modules: the twisted Verma modules (cf. [T1, théorème 4.1]).

Instead, when a cell C_i does not intersect the closed projective G -orbit of X , there is not such a handy description of the \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$. Nevertheless, we are going to prove (with an extra condition on the line bundle L) that, in that case, the \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$ has no G -module among its simple subquotients (cf. théorème 7). That result simplifies the Grothendieck–Cousin spectral sequence. As applications, we will give a formula for the global Euler–Poincaré characteristic (cf. Théorème 12):

$$\sum_i (-1)^i H^i(X, L)$$

(alternated sum in the representation ring of G), an upper bound of the simple G -module multiplicities in the $H^d(X, L)$ (cf. théorème 14) with, as corollary, a vanishing result in degree 1 (cf. Corollaire 14.1). Finally, we will totally determine the $H^d(X, L)$ for two examples of rank 2 complete symmetric varieties, among which is the variety of complete conics (cf. théorèmes 16 and 17).

Introduction

Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Considérons un groupe algébrique linéaire semi-simple G sur \mathbf{k} et son algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si X est une G -variété projective lisse et L un fibré en droites G -linéarisé sur X , alors tous les groupes de cohomologie $H^d(X, L)$, $d \geq 0$, sont des G -modules de dimension finie.

Lorsque X possède une décomposition cellulaire

$$X = \bigsqcup_i C_i,$$

où les cellules C_i sont des sous-variétés de X , de codimension c_i , isomorphes à des espaces affines, on dispose d'une suite spectrale, la *suite spectrale de Grothendieck–Cousin* (cf. [K]), dont les premiers termes sont les groupes de cohomologie à support $H_{C_i}^{c_i}(L)$ et qui converge vers les groupes de cohomologie globaux $H^d(X, L)$.

Remarquons que les $H_{C_i}^{c_i}(L)$ sont seulement des \mathfrak{g} -modules, qui peuvent être de dimension infinie alors que les $H^d(X, L)$ sont des G -modules de dimension finie.

Dans certains cas, la «partie finie» de la suite spectrale de Grothendieck–Cousin dégénère, i.e. les termes de la suite spectrale ont des multiplicités constantes selon chaque \mathfrak{g} -module simple de dimension finie. Cela permet alors de déterminer complètement les $H^d(X, L)$. Cela se produit si X est une variété de drapeaux (d'où le célèbre théorème de Borel–Weil–Bott) et plus généralement si X est une variété magnifique de rang minimal (ce sont des G -variétés projectives avec une seule G -orbite fermée et qui vérifient notamment la propriété d'avoir une décomposition cellulaire dont toutes les cellules rencontrent cette orbite fermée), cf. [T2, théorème 3.1]. On s'intéresse ici aux G -variétés symétriques complètes définies par De Concini et Procesi dans [DCP]. Ces variétés ont aussi une seule orbite fermée. Lorsqu'une cellule C_i rencontre cette orbite projective, le \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$ possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont des \mathfrak{g} -modules bien étudiés : les modules de Verma tordus (cf. [T1, théorème 4.1]).

Mais quand une cellule C_i ne rencontre pas la G -orbite projective de X , on n'a pas de description aussi commode du \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$. Néanmoins, nous allons montrer (avec une condition supplémentaire sur le fibré en droites L) que, dans ce cas, le \mathfrak{g} -module $H_{C_i}^{c_i}(L)$ n'a pas de G -modules parmi ses sous-quotients simples (c'est le théorème 7). Ce résultat permet de simplifier la suite spectrale de Grothendieck–Cousin. Comme applications, on donnera une formule pour la caractéristique d'Euler–Poincaré global (cf. le théorème 12) :

$$\sum_i (-1)^i H^i(X, L)$$

(somme alternée dans l'anneau des représentations de G), une majoration des multiplicités des G -modules simples dans les $H^d(X, L)$ (cf. le théorème 14) avec, pour corollaire, un résultat d'annulation en degré $d = 1$ (cf. le Corollaire 14.1).

Enfin on déterminera complètement les $H^d(X, L)$ pour deux exemples de variétés symétriques complètes de rang 2, dont la variété des coniques complètes (cf. les théorèmes 16 et 17).

Remerciements. Je suis reconnaissant aux arbitres de leur lecture attentive des premières versions.

1. Énoncé du résultat principal

1.1. Variétés symétriques complètes

Soit G un groupe algébrique linéaire sur \mathbf{k} . On suppose que G est semi-simple adjoint et connexe sur \mathbf{k} . Soit $\theta : G \rightarrow G$ un automorphisme d'ordre 2. Notons $H := G^\theta$ le sous-groupe des points fixes de θ .

L'espace homogène G/H est une *variété symétrique affine*.

D'après [DCP, Theorem 3.1], il existe une unique G -variété projective X telle que :

- (i) X contient G/H comme G -orbite ouverte ;
- (ii) X est lisse ;
- (iii) le diviseur $X \setminus G/H = D_1 \cup \dots \cup D_r$ est un diviseur à croisements normaux (les composantes irréductibles D_i de $X \setminus G/H$ sont appelées les diviseurs limitrophes de X) ;
- (iv) pour tous $x, x' \in X$, $G.x = G.x' \Leftrightarrow \{i : x \in D_i\} = \{i : x' \in D_i\}$;
- (v) il n'y a qu'une seule G -orbite fermée dans $X : F = D_1 \cap \dots \cap D_r$.

L'entier r est le *rang* de X .

On dit que la variété X est la *compactification magnifique* de G/H . On appelle *variétés symétriques complètes* de telles variétés.

Remarque 1. Soit \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H . L'automorphisme θ induit un automorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ encore noté θ . On a

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\theta = \{x \in \mathfrak{g} : \theta(x) = x\}.$$

Soit $h := \dim \mathfrak{h}$. La variété X peut être définie comme l'adhérence de l'orbite $G.\mathfrak{h}$ dans la grassmannienne $\mathcal{G} := \text{Gr}_h(\mathfrak{g})$ des sous-espaces de \mathfrak{g} de dimension h (cf. [DCP, §6]).

Fixons pour la suite G, H comme ci-dessus et X la compactification magnifique de l'espace symétrique G/H . On notera \widehat{G} le revêtement universel de G et on considérera X comme une \widehat{G} -variété.

Exemple 1. Soit $G := \text{PGL}_3$ et soit θ l'involution :

$$\theta : G \rightarrow G, \quad [g] \mapsto [(g^t)^{-1}],$$

(on note $[g] \in \text{PGL}_3$ la classe modulo \mathbf{k}^* d'une matrice inversible g). On a dans ce cas $H = G^\theta = \text{SO}_3$. Notons S_3 l'espace des matrices symétriques 3×3 à coefficients dans \mathbf{k} . Soit \mathcal{C} la variété algébrique affine des coniques non dégénérées de \mathbb{P}^2 (vues comme des classes modulo \mathbf{k}^* de formes quadratiques non dégénérées sur \mathbf{k}^3 , vues elles-mêmes comme des matrices symétriques 3×3 non singulières à coefficients dans \mathbf{k}) :

$$\mathcal{C} := \{[q] \in \mathbb{P}(S_3) : \det q \neq 0\}.$$

Comme le groupe G agit transitivement sur \mathcal{C} , on peut identifier l'espace homogène symétrique G/H à \mathcal{C} via l'isomorphisme :

$$G/H \rightarrow \mathcal{C}, \quad [g]H \mapsto [(g^t)^{-1}g^{-1}].$$

On peut dans ce cas décrire la compactification magnifique $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} comme une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ par

$$\overline{\mathcal{C}} := \{([q], [q']) \in \mathbb{P}(S_3) \times \mathbb{P}(S_3) : qq' \in \mathbf{k}\text{Id}\},$$

où qq' est le produit usuel des matrices q, q' .

En effet, $\bar{\mathcal{C}}$ est lisse, contient \mathcal{C} via l'inclusion

$$[q] \in \mathcal{C} \mapsto ([q], [q^{-1}]) \in \bar{\mathcal{C}},$$

et le groupe $\widehat{G} = \text{SL}_3$ agit sur $\bar{\mathcal{C}}$ par

$$\forall g \in \widehat{G}, \forall ([q], [q']) \in \bar{\mathcal{C}}, \quad g \cdot ([q], [q']) = ((g^t)^{-1} q g^{-1}, [gq'g^t]).$$

Pour cette action, les diviseurs limitrophes de $\bar{\mathcal{C}}$ sont

$$D_1 := \{([q], [q']) \in \bar{\mathcal{C}} : \text{rg} q = 1\} \quad \text{et} \quad D_2 := \{([q], [q']) \in \bar{\mathcal{C}} : \text{rg} q' = 1\},$$

et les axiomes de définition d'une variété G -magnifique sont bien vérifiés. Notons que $\bar{\mathcal{C}}$ est de rang 2; c'est la *variété des coniques complètes*.

Remarque 2. On peut aussi définir $\bar{\mathcal{C}}$ comme l'éclaté de \mathbb{P}^5 le long de la surface de Veronese $\nu(\mathbb{P}^2)$ où $\nu : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5, [x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz]$.

1.2. Faisceaux inversibles spéciaux

Le résultat principal de cet article concerne certains faisceaux inversibles sur X :

Définition 1. On dit qu'un faisceau inversible \mathcal{L} sur X est *spécial* s'il existe un entier $n > 0$ tel que

$$\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_X(n_1 D_1 + \dots + n_r D_r)$$

pour certains entiers n_i .

Remarque 3. Si la variété X n'est pas exceptionnelle, i.e. si le rang du groupe de Picard de X est r , alors tous les faisceaux inversibles sur X sont spéciaux. C'est par exemple le cas pour la compactification magnifique de $\text{PGL}_n/\text{PSO}_n$ (pour tout $n \geq 2$) et pour les compactifications magnifiques des G/H avec H semi-simple.

1.3. Cellules et cohomologie à support

Soit ζ un sous-groupe à un paramètre de G tel que l'ensemble des points fixes :

$$X^\zeta := \{x \in X : \forall s \in \mathbf{k}^*, \zeta(s).x = x\}$$

est fini. De tels sous-groupes à un paramètre existent toujours et sont appelés X -régulier.

Pour tout point fixe $x \in X^\zeta$, on pose

$$X^+(x) := \left\{ y \in X : \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in \mathbf{k}^*}} \zeta(s).y = x \right\}.$$

D'après [BB73], chaque $X^+(x)$ est une sous-variété localement fermée de X , isomorphe à un espace affine. On obtient ainsi une décomposition : $X = \bigsqcup_{x \in X^\zeta} X^+(x)$. Les $X^+(x)$ sont les *cellules de Bialynicki-Birula* de X et on dit que x est le centre de la cellule $X^+(x)$.

Tous les faisceaux inversibles \mathcal{L} sur X sont \widehat{G} -linéarisés (cf. [St]). Donc pour tout point $x \in X^\zeta$ et tout entier n , les groupes de cohomologie à support $H_{X^+(x)}^n(\mathcal{L})$ sont des \mathfrak{g} -modules (cf. [K, Lemma 11.1]).

De plus, $H_{X^+(x)}^n(\mathcal{L}) = 0$ sauf si la cellule $X^+(x)$ est de codimension n dans X .

Exemple 2. Soient $G := \mathrm{PGL}_2(\mathbf{k})$ et X la compactification magnifique de l'espace homogène $\mathrm{PGL}_2/\mathrm{PSO}_2$. On a $\widehat{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ et la variété X est l'espace projectif $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2$ où V est le $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ -module simple $\mathbf{k}[T_0, T_1]_2$ des polynômes homogènes de degré 2. L'unique G -orbite fermée est formée des classes de polynômes $[P]$ de discriminant nul. On pose

$$\widehat{T} := \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} : s \in \mathbf{k}^* \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{X} := \mathbb{Z}\omega \quad \text{où} \quad \omega : \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \mapsto s.$$

Si on prend pour sous-groupe à un paramètre $\zeta : \mathbf{k}^* \rightarrow G, s \mapsto \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$, alors on a

$$X^\zeta = \{ [T_0^2], [T_0T_1], [T_1^2] \}.$$

Seul le point fixe $x_0 := [T_0T_1]$ n'est pas dans la G -orbite fermée. La cellule correspondante est

$$X^+(x_0) = \{ [bT_0T_1 + cT_1^2] \in X : b, c \in \mathbf{k}, b \neq 0 \} \simeq \mathbb{A}^1.$$

Les faisceaux inversibles sur X sont les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ avec n entier.

Comme le point x_0 est $N_{\widehat{G}}(\widehat{T})$ -stable et comme tous les caractères du groupe $N_{\widehat{G}}(\widehat{T})$ sont triviaux, le tore \widehat{T} agit trivialement sur la fibre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)|_{x_0}$ (pour chaque entier n). On a donc un isomorphisme de \widehat{T} -modules :

$$H_{X^+(x_0)}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) \simeq H_{X^+(x_0)}^1(\mathcal{O}_X)$$

pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

Or, les poids de l'espace tangent $T_{x_0}X$ sont -2ω et 2ω . On en déduit que tous les poids du \widehat{T} -module $H_{X^+(x_0)}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))$ sont de la forme $2m\omega$ avec $m \in \mathbb{Z}_{<0}$. En particulier, aucun n'est dominant. En conséquence, le \mathfrak{sl}_2 -module $H_{X^+(x_0)}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))$ ne peut pas avoir de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ -modules parmi ses sous-quotients simples.

Le théorème qui suit est une généralisation de ce fait aux variétés symétriques complètes.

Théorème 1. Soient \mathcal{L} un faisceau inversible spécial sur X et C une cellule de Bialynicki-Birula de X de codimension d .

Si le \mathfrak{g} -module $H_C^d(\mathcal{L})$ admet un sous-quotient simple de dimension finie, alors le centre de la cellule C est dans l'orbite fermée de X .

Remarque 4. Si X est de rang minimal, i.e. si $r = \mathrm{rang}(G) - \mathrm{rang}(H)$ (e.g. si X est la compactification magnifique de $G \times G/G$), alors tous les points fixes $x \in X^\zeta$ sont dans F . Donc ce théorème n'apporte rien dans ce cas. En revanche si X n'est pas de rang minimal (e.g. si X est la compactification magnifique de $\mathrm{PGL}_n/\mathrm{PSO}_n$), alors il existe des points fixes $x \in X^\zeta \setminus F$.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons rappeler quelques résultats concernant les variétés symétriques complètes.

2. Données adaptées à une variété symétrique

Nous suivons [DCP, §1].

Fixons un tore T_1 de G , *anisotrope* (i.e. $\theta(t) = t^{-1}$ pour tout t dans T_1) et maximal. Soit T un tore maximal de G qui contient T_1 . Le tore T est forcément θ -stable. On notera \widehat{T} l'image réciproque de T dans \widehat{G} , \mathcal{X} le réseau des caractères de \widehat{T} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet naturel entre caractères et sous-groupes à un paramètre de \widehat{T} .

Soit W le groupe de Weyl associé à $(\widehat{G}, \widehat{T})$. On choisit une forme bilinéaire (\cdot, \cdot) symétrique, non dégénérée et W -invariante sur \mathcal{X} .

Si on note \mathfrak{t} l'algèbre de Lie de T , on a

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1,$$

où $\mathfrak{t}_0 := \ker(\theta - 1) \cap \mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}_1 := \ker(\theta + 1) \cap \mathfrak{t}$.

Soit $\Phi \subseteq \mathfrak{t}^*$ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. On note encore θ l'automorphisme induit par θ sur \mathfrak{t}^* . Cet automorphisme θ préserve Φ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et (\cdot, \cdot) . On notera $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Ce ρ est aussi un caractère de \widehat{T} .

Posons $\Phi_0 := \{\alpha \in \Phi : \theta(\alpha) = \alpha\}$ et $\Phi_1 := \Phi \setminus \Phi_0$. On peut choisir l'ensemble des racines positives Φ^+ de Φ tel que : $\forall \alpha \in \Phi^+ \cap \Phi_1, \theta(\alpha) \in \Phi^-$.

Soient Δ la base de Φ définie par Φ^+ , $\Delta_0 := \Delta \cap \Phi_0$ et $\Delta_1 := \Delta \cap \Phi_1$.

Il existe une bijection $\bar{\theta} : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ telle que

$$\forall \alpha \in \Delta_1, \theta(\alpha) = -\bar{\theta}(\alpha) - \sum_{\varepsilon \in \Delta_0} m_{\varepsilon, \alpha} \varepsilon,$$

pour certains entiers $m_{\varepsilon, \alpha} \geq 0$. Les entiers $m_{\varepsilon, \alpha}$ sont entièrement déterminés par les équations :

$$\langle \theta(\alpha), \varepsilon^\vee \rangle = \langle \alpha, \varepsilon^\vee \rangle \quad (\forall \alpha \in \Delta_1, \forall \varepsilon \in \Delta_0).$$

Pour toute racine $\alpha \in \Phi_1$, on pose $\tilde{\alpha} := \alpha - \theta(\alpha)$ et on numérote les racines de $\Delta_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_d$ avec $d \geq r$, de sorte que

$$\widetilde{\Delta}_1 := \{\tilde{\alpha} : \alpha \in \Delta_1\} = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r\}.$$

En fait, $\widetilde{\Phi}_1 := \{\tilde{\alpha} : \alpha \in \Phi_1\}$ est un système de racines dont $\widetilde{\Delta}_1$ est une base.

Enfin, on note \widehat{B} (resp. \widehat{B}^-) le sous-groupe de Borel de \widehat{G} défini par Φ^+ (resp. par Φ^-) et B (resp. B^-) son image dans G .

3. Groupe de Picard

Nous rappelons ici la description du groupe de Picard de la variété X comme sous-réseau du réseau des poids de \widehat{T} .

Puisque X n'a qu'une seule \widehat{G} -orbite fermée, il existe un unique point fixe $\mathbf{z} \in X$ du sous-groupe de Borel \widehat{B}^- . Soit Q le groupe d'isotropie de ce point \mathbf{z} dans \widehat{G} . C'est un sous-groupe parabolique de G qui contient \widehat{B}^- et $F = \widehat{G} \cdot \mathbf{z} \simeq \widehat{G}/Q$.

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . Puisque le groupe \widehat{G} est simplement connexe le faisceau \mathcal{L} admet une unique \widehat{G} -linéarisation (à isomorphisme près). On peut donc définir sans ambiguïté le caractère $p(\mathcal{L}) : Q \rightarrow \mathbf{k}^*$ avec lequel Q agit sur la fibre $\mathcal{L}|_{\mathbf{z}}$.

Si on note $\mathcal{X}(Q)$ le réseau des caractères de Q , on a :

Proposition 2 (Prop. 8.1 de [DCP]). *Le morphisme*

$$\text{Pic}(X) \rightarrow \mathcal{X}(Q), \quad \mathcal{L} \mapsto p(\mathcal{L}),$$

est injectif.

Notons $\text{pic}(X)$ l'image de $\text{Pic}(X)$ dans le réseau $\mathcal{X}(Q)$ de sorte que $\text{Pic}(X) \simeq \text{pic}(X)$.

Désormais, pour tout $\lambda \in \text{pic}(X)$, on notera \mathcal{L}_λ un faisceau inversible \widehat{G} -linéarisé sur X de poids $p(\mathcal{L}_\lambda) = \lambda$ et $[\mathcal{L}_\lambda]$ sa classe d'isomorphisme.

Quitte à renuméroter les diviseurs limitrophes $D_i, 1 \leq i \leq l$, on supposera que : $\mathcal{O}_X(D_i) \simeq \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}_i}$.

Exemple 3. Dans le cas où $X = \overline{\mathcal{C}}$, on a $\widehat{G} = \text{SL}_3$ et on peut prendre pour tore ma-

ximal \widehat{T} le tore des matrices diagonales de SL_3 . On a $\mathbf{z} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

et $Q = \widehat{B}^-$, le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de SL_3 . Si on note α_1, α_2 les racines simples définies par \widehat{G}, \widehat{B} et \widehat{T} et ω_1, ω_2 , les poids fondamentaux correspondants, on a

$$\text{pic}(\overline{\mathcal{C}}) = 2\mathbb{Z}\omega_1 \oplus 2\mathbb{Z}\omega_2$$

et on peut décrire explicitement les faisceaux inversibles sur $\overline{\mathcal{C}}$ par :

$$[\mathcal{L}_\lambda] = \left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(n) \Big|_{\overline{\mathcal{C}}} \right]$$

pour tout $\lambda = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \in 2\mathbb{Z}\omega_1 \oplus 2\mathbb{Z}\omega_2$.

Dans la suite, on s'intéressera plus particulièrement aux faisceaux inversibles *spéciaux*.

Définition 2. Un caractère λ de \widehat{T} est *spécial* si $\theta(\lambda) = -\lambda$.

Remarque 5. Soient $\lambda \in \text{pic}(X)$ et \mathcal{L}_λ le faisceau inversible associé. Le poids λ est spécial si et seulement si le faisceau \mathcal{L}_λ l'est.

Soient $\omega_\alpha, \alpha \in \Delta$, les poids fondamentaux du système de racines Φ (considérés comme des caractères de \widehat{T}).

Voici une description de ces faisceaux inversibles spéciaux à isomorphisme près.

Proposition 3 (§2, Theorem 1 de [ChMa]). *Le réseau*

$$\{\lambda \in \text{pic}(X) : \theta(\lambda) = -\lambda\}$$

admet pour base les poids $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r$ où

$$\tilde{\omega}_i = \begin{cases} \omega_{\alpha_i} + \omega_{\bar{\theta}(\alpha_i)} & \text{si } \bar{\theta}(\alpha_i) \neq \alpha_i, \\ \omega_{\alpha_i} & \text{si } \bar{\theta}(\alpha_i) = \alpha_i \text{ et } \theta(\alpha_i) \neq -\alpha_i, \\ 2\omega_{\alpha_i} & \text{si } \theta(\alpha_i) = -\alpha_i, \end{cases}$$

pour tout $1 \leq i \leq r$. Ce réseau est aussi le réseau des poids de $\tilde{\Phi}_1$ et la base des $\tilde{\omega}_i$ est la base des poids fondamentaux associée à la base $\tilde{\Delta}_1$.

Remarque 6. Si X est la compactification magnifique de $\text{PGL}_n/\text{PSO}_n$, on a $r = n - 1$ et $\tilde{\omega}_i = 2\omega_{\alpha_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$.

4. Sous-variétés stables

Les *sous-variétés stables* sont les sous-variétés irréductibles et G -stables de X ; ce sont les variétés $X_I := \bigcap_{i \in I} D_i$, I partie de $\{1, \dots, r\}$.

Pour ces sous-variétés, nous allons fixer quelques notations.

Pour toute partie $I \subseteq \{1, \dots, r\}$, on choisit un sous-groupe à un paramètre $\gamma_I : \mathbf{k}^* \rightarrow T_1$ tel que pour tout $1 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}_i, \gamma_I \rangle &> 0 && \text{si } i \in I, \\ \langle \tilde{\alpha}_i, \gamma_I \rangle &= 0 && \text{si } i \notin I. \end{aligned}$$

Soit $x_0 := H/H \in G/H \subseteq X$.

Si on pose $x_I := \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_I(t).x_0$, alors on a $X_I = \overline{G.x_I}$.

Remarque 7. Soient $I^c := \{1, \dots, r\} \setminus I$ et $\widetilde{\Phi}_{I^c}$ les éléments de $\widetilde{\Phi}_1$ qui sont combinaisons linéaires (à coefficients entiers) des $\tilde{\alpha}_i, i \in I^c$.

Avec ces notations, x_I est la sous-algèbre de Lie

$$t_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi_1^+ \\ \tilde{\alpha} \in \widetilde{\Phi}_{I^c}}} \mathbf{k}.(X_\alpha + \theta(X_\alpha)) \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi_1^+ \\ \tilde{\alpha} \notin \widetilde{\Phi}_{I^c}}} \mathfrak{g}_{\theta(\alpha)}$$

vue comme point de $X \subseteq \mathcal{G}$.

On aura besoin aussi des groupes suivants :

$$\begin{aligned} P_I &:= \left\{ g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_I(t)^{-1} g \gamma_I(t) \text{ existe dans } G \right\}, \\ L_I &:= \left\{ g \in G : \forall t \in \mathbf{k}^*, \gamma_I(t)^{-1} g \gamma_I(t) = g \right\}. \end{aligned}$$

Le groupe P_I est un sous-groupe parabolique de G contenant $Q \supseteq B^-$ et L_I est son sous-groupe de Levi par rapport à T .

Soit \overline{L}_I le quotient de L_I par son centre. L'automorphisme θ de G induit un automorphisme $\overline{\theta}_I$ de \overline{L}_I et on pose $\overline{H}_I := \overline{L}_I^{\overline{\theta}_I}$.

Tout cela étant posé, si $X(\overline{\theta}_I)$ est la compactification magnifique de l'espace symétrique $\overline{L}_I/\overline{L}_I^{\overline{\theta}_I}$, on a $X_I = G \times^{P_I} X(\overline{\theta}_I)$ ce qui signifie :

Proposition 4 (cf. §5 de [DCP]). *Il existe un morphisme surjectif et G -équivariant :*

$$X_I \xrightarrow{\pi_I} G/P_I, \quad x_I \mapsto P_I/P_I,$$

tel que $\pi_I^{-1}(P_I/P_I) \simeq X(\overline{\theta}_I)$ comme \overline{L}_I -variétés.

Remarque 8. Il résulte de cette proposition que x_I est fixé par le tore T si et seulement si $\overline{L}_I^{\overline{\theta}_I}$ contient le tore \overline{T} , l'image de T dans \overline{L}_I .

Pour ce qui suit, on pose

$$W^{L_I} := \{w \in W : \forall \alpha \in \Phi_{L_I} \cap \Phi^+, w(\alpha) \in \Phi^+\}$$

(Φ_{L_I} est l'ensemble des racines de L_I).

5. Poids des faisceaux inversibles en les points fixes du tore

Soit $x \in X^T$. Soit $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ tel que $\overline{G \cdot x} = X_I$. On note W_I le groupe de Weyl de P_I , vu comme sous-groupe de W , et W^{P_I} l'ensemble des représentants de longueur minimal de W/W_I . Comme le point $\pi_I(x)$ est un point fixe de T dans G/P_I , il existe $w \in W^{P_I}$ tel que $\pi_I(x) = wP_I/P_I$.

Soient $\lambda \in \text{pic}(X)$ et \mathcal{L}_λ le faisceau inversible et \widehat{G} -linéarisé sur X correspondant ; on note λ_x le caractère avec lequel \widehat{T} agit sur la fibre $\mathcal{L}_\lambda|_x$. En général, le point x n'est pas un point fixe du sous-groupe parabolique $wP_I w^{-1}$ mais on a :

Lemme 5. *Pour tout poids spécial $\lambda \in \text{pic}(X)$, le caractère λ_x se prolonge en un caractère de $wP_I w^{-1}$.*

Démonstration. Comme le faisceau \mathcal{L}_λ est \widehat{G} -linéarisé, nous allons seulement traiter le cas où $w = 1$ i.e. $\pi_I(x) = P_I/P_I$.

Supposons pour commencer que λ est un caractère de P_I i.e.

$$\forall \alpha \in \Phi, \quad \langle \alpha, \gamma_I \rangle = 0 \Rightarrow (\lambda, \alpha) = 0.$$

Dans ce cas, soit \mathcal{M}_λ le faisceau inversible induit par λ sur la variété de drapeaux G/P_I . On note toujours $\pi_I : X_I \rightarrow G/P_I$ la projection de la proposition 4. Si on note \mathbf{k}_λ la droite \mathbf{k} munie de l'action du tore \widehat{T} via le caractère λ , alors on a les isomorphismes de \widehat{T} -modules :

$$\mathcal{L}_\lambda|_{\mathbf{z}} \simeq \mathbf{k}_\lambda \simeq \mathcal{M}_\lambda|_{P_I/P_I} = \mathcal{M}_\lambda|_{\pi_I(\mathbf{z})} \simeq \pi_I^* \mathcal{M}_\lambda|_{\mathbf{z}}$$

(on rappelle que \mathbf{z} est l'unique point fixe de B^- sur X).

On en déduit d'après la proposition 2 que $\mathcal{L}_\lambda \simeq \pi_I^* \mathcal{M}_\lambda$. En particulier, $\mathcal{L}_\lambda|_x \simeq \mathcal{M}_\lambda|_{P_I/P_I}$ et le caractère λ_x se prolonge en un caractère de P_I .

Maintenant, ne supposons plus que λ est un caractère de P_I .

Comme les $\tilde{\alpha}_i, 1 \leq i \leq r$, sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants, il existe des entiers $k_i, i \in I^c$, et un entier $k > 0$ tels que

$$\forall j \in I^c, \quad k(\lambda, \tilde{\alpha}_j) - \sum_{i \in I^c} k_i(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 0. \tag{1}$$

Posons $\mu := k\lambda - \sum_{i \in I^c} k_i \tilde{\alpha}_i$. C'est un poids spécial de $\text{pic}(X)$.

De plus, pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on a

$$\langle \alpha, \gamma_I \rangle = 0 \Rightarrow (\mu, \alpha) = 0.$$

En effet, si, par exemple, α est une racine positive, $\alpha = \alpha_0 + \sum_{i=1}^d n_i \alpha_i$ pour certains entiers $n_i \geq 0$ et un α_0 dans le réseau engendré par Φ_0 .

Donc $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^d n_i \tilde{\alpha}_i = \sum_{i=1}^r n'_i \tilde{\alpha}_i$ pour certains entiers n'_i tels que $n'_i \geq n_i$ pour tout i .

Or $\theta(\gamma_I) = -\gamma_I$ donc :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \gamma_I \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle \tilde{\alpha}, \gamma_I \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r n'_i \langle \tilde{\alpha}_i, \gamma_I \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \quad n'_i = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

car si $i \in I, \langle \tilde{\alpha}_i, \gamma_I \rangle > 0$.

Mais puisque $\theta(\mu) = -\mu$, on a pour chaque racine α :

$$\begin{aligned} (\mu, \alpha) &= (\mu, \alpha_0) + \sum_{i=1}^d n_i(\mu, \alpha_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d n_i(\mu, \tilde{\alpha}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r n'_i(\mu, \tilde{\alpha}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in I} n'_i(\mu, \tilde{\alpha}_i). \end{aligned}$$

d'après (1).

Par conséquent, on trouve grâce à (2) :

$$(\alpha, \gamma_I) = 0 \Rightarrow (\mu, \alpha) = 0$$

autrement dit, μ est un caractère du sous-groupe parabolique P_I .

Rappelons que $\mu = k\lambda - \sum_{i \in I^c} k_i \tilde{\alpha}_i$. Ainsi :

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_{k\lambda} \otimes \bigotimes_{i \in I^c} \mathcal{O}_X(-D_i)^{\otimes k_i}.$$

Or le point x est dans la G -orbite ouverte de $X_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ donc si $i \in I^c, x \notin D_i$ et $\mathcal{O}_X(D_i)|_x = \mathcal{O}_X|_x$. Par conséquent :

$$\mathcal{L}_\mu|_x \simeq \mathcal{L}_{k\lambda}|_x.$$

Mais alors, le caractère $k\lambda_x$ avec lequel \hat{T} agit sur $\mathcal{L}_{k\lambda}|_x$ est un caractère de P_I donc λ_x aussi. \square

6. Espace tangent en un point fixe du tore

Soit $x \in \underline{X^T}$. Comme dans la section précédente, on fixe $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ tel que $X_I = \overline{G.x}$. On note encore P_I le sous-groupe parabolique correspondant, $\pi_I : X_I \rightarrow G/P_I$ la projection associée et L_I le sous-groupe de Levi de P_I contenant T . Soit $w \in W^{P_I}$ tel que $\pi_I(x) = wP_I/P_I$.

Notons $-\delta_1, \dots, -\delta_u$ les racines de $R^u(P_I)$, le radical unipotent de P_I .

Remarque 9. Les δ_j sont les racines positives de Φ telles que $\langle \delta_j, \gamma_I \rangle \neq 0$.

L'espace tangent $T_x X_I$ est un T -module et on a :

Lemme 6. *Les poids de $T_x X_I$ sont :*

$$-w(\delta_1), \dots, -w(\delta_u), \pm w(\beta_1), \dots, \pm w(\beta_v)$$

pour certaines racines positives β_1, \dots, β_v de L_I . De plus, $2v = \dim X_I - \dim G/P_I$.

Remarque 10. Le groupe d'isotropie G_x est contenu dans $wP_I w^{-1}$ et $2v$ est aussi la codimension de G_x dans $wP_I w^{-1}$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $w = 1$. Dans ce cas, $x \in \pi_I^{-1}(P_I/P_I)$ qui est isomorphe à la compactification magnifique de $\overline{L_I}/\overline{L_I}^{\theta_I}$ et x est dans la $\overline{L_I}$ -orbite ouverte de $\pi_I^{-1}(P_I/P_I)$. En particulier, le stabilisateur de x dans $\overline{L_I}$ est un groupe réductif car c'est un conjugué de $\overline{L_I}^{\theta_I}$. Notons K ce stabilisateur. D'après la proposition 4, on a un isomorphisme de T -modules :

$$\begin{aligned} T_x X_I &\simeq T_{P_I/P_I} G/P_I \oplus T_x \overline{L_I}.x \\ &\simeq T_{P_I/P_I} G/P_I \oplus T_1 \overline{L_I}/T_1 K. \end{aligned}$$

D'une part, les poids de $T_{P_I/P_I} G/P_I$ sont les $-\delta_1, \dots, -\delta_u$. D'autre part, comme le groupe K est réductif, si β est un poids de $T_1 \overline{L_I}/T_1 K$, $-\beta$ aussi. Donc les poids de $T_1 \overline{L_I}/T_1 K$ sont les $\pm\beta_1, \dots, \pm\beta_v$ où les β_j sont les racines positives de L_I qui ne sont pas racines de K .

Enfin, on a aussi

$$2v = \dim X_I - u = \dim X_I - \dim G/P_I \quad \square$$

7. Théorème principal

Théorème 7. *Soient \mathcal{L} un faisceau inversible spécial sur X et C une cellule de Bialynicki-Birula de X de codimension d .*

Si le \mathfrak{g} -module $H_C^d(\mathcal{L})$ admet un sous-quotient simple de dimension finie, alors le centre de la cellule, $x \in C^T$, est dans l'orbite fermée de X .

Pour démontrer ce théorème on va calculer des caractères de \widehat{T} -modules.

Rappelons d'abord les notations de [D, §7.5.1] et [K].

Soit M est un \widehat{T} -module tel que pour tout caractère $\nu : \widehat{T} \rightarrow \mathbf{k}^*$, le sous-espace $M_\nu := \{m \in M : \forall t \in \widehat{T}, t.m = \nu(t)m\}$ est de dimension finie. Le caractère de M est la fonction

$$[M] : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \nu \mapsto \dim M_\nu.$$

Soit une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}$. On la notera $\sum_{\nu \in \mathcal{X}} f(\nu)e^\nu$. Son *support* est l'ensemble $\{\nu \in \mathcal{X} : f(\nu) \neq 0\}$. On notera, pour tout $\lambda \in \mathcal{X}$, $1/(1 - e^\lambda)$ la fonction $\sum_{n \geq 0} e^{n\lambda}$.

Soit $\mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+$ le sous-monoïde de \mathcal{X} engendré par Φ^+ . On notera $\mathbb{Z}\langle \mathcal{X} \rangle$ l'anneau des fonctions $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ dont le support est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme $\nu_i - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+$, $\nu_i \in \mathcal{X}$.

Notations. On peut supposer que la cellule C est de la forme : $C = X^+(x)$ pour un certain point fixe $x \in X^T$ et un certain sous-groupe à un paramètre ζ dominant et régulier (i.e. $\langle \alpha, \zeta \rangle > 0$ pour toute racine positive α) tel que $X^{\zeta(\mathbf{k}^*)} = X^T$.

Dans toute la suite on notera pour tout caractère $\nu \in \mathcal{X}$:

$$|\nu| := \begin{cases} \nu & \text{si } \langle \nu, \zeta \rangle \geq 0, \\ -\nu & \text{si } \langle \nu, \zeta \rangle < 0. \end{cases}$$

Notons $\lambda \in \text{pic} X$ le poids du faisceau \mathcal{L} (de sorte que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_\lambda$).

On va commencer par étudier les restrictions du faisceau \mathcal{L}_λ à des sous-variétés stables.

7.1. Cohomologie à support sur les sous-variétés stables

Soit $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ tel que $X_I = \overline{G \cdot x}$. On suppose que x n'est pas dans la G -orbite fermée de X . On note $X_I^+(x)$ la cellule $X^+(x) \cap X_I$ et d_I la codimension de $X_I^+(x)$ dans X_I .

On va d'abord montrer que le \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$ n'a pas de sous-quotient simple de dimension finie en calculant son caractère, comme \widehat{T} -module.

Calcul de caractères. Avec les notations du lemme 6, on a :

Proposition 8. *Le \widehat{T} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$ a pour caractère :*

$$\frac{e^{\lambda'}}{\prod_{\substack{i=1 \\ w(\delta_i) > 0}}^u (1 - e^{-w(\delta_i)}) \prod_{\substack{i=1 \\ w(\delta_i) < 0}}^u (1 - e^{w(\delta_i)}) \prod_{j=1}^v (1 - e^{-w(\beta_j)})^2}$$

où

$$\lambda' := \lambda_x - \sum_{\substack{i=1 \\ w(\delta_i) > 0}}^u w(\delta_i) - \sum_{j=1}^v w(\beta_j)$$

avec λ_x le poids de la fibre $\mathcal{L}_\lambda|_x$.

Démonstration. D'après [K, Prop. 11.9] (cf. aussi [T0, théorème II.3.2] pour le premier isomorphisme), on a des isomorphismes de \widehat{T} -modules :

$$\begin{aligned} H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I}) &\simeq H_{(T_x X_I)_+}^{d_I}(\mathcal{O}_{T_x X_I}) \otimes \mathcal{L}_\lambda|_x \\ &\simeq \text{Sym}((T_x X_I)_+^*) \otimes_{\mathbf{k}} \text{Sym}((T_x X_I)_-) \otimes_{\mathbf{k}} \bigwedge^{d_I} (T_x X_I)_- \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_\lambda|_x \end{aligned}$$

(où Sym est l'algèbre symétrique et \bigwedge^d la d -ième puissance extérieure).

Or, d'après le lemme 6, les poids de $T_x X_I$ sont

$$-w(\delta_1), \dots, -w(\delta_u), \pm w(\beta_1), \dots, \pm w(\beta_v)$$

et en particulier, ce sont des racines. Parmi ces poids, ceux de $(T_x X_I)_+$ (resp. $(T_x X_I)_-$) sont les racines positives (resp. négatives) car le sous-groupe à un paramètre ζ est dominant. De plus, comme $w \in W^{L_I}$ et comme les β_j sont des racines positives de L_I , les poids $w(\beta_j)$ sont des racines positives. \square

Remarque 11. Puisque le \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$ est un \widehat{T} -module avec un caractère (*c-à-d* que pour chaque caractère ν de \widehat{T} , l'espace propre associé est de dimension finie) et puisque c'est aussi un \widehat{B} -module (car la cellule $X_I^+(x)$ est B -invariante), c'est un \mathfrak{g} -module de longueur finie.

Nous allons voir que le caractère suffit pour déterminer la multiplicité des \mathfrak{g} -modules simples de dimension finie dans le \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$.

Calcul de multiplicités à partir de caractères. On note $U(\cdot)$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. On notera $Z(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$. Soit \mathfrak{n}^+ la partie nilpotente de l'algèbre de Lie de B .

On dit qu'un \mathfrak{g} -module M est $U(\mathfrak{n}^+)$ -fini si pour tout $m \in M$, le sous-espace $U(\mathfrak{n}^+)m$ est de dimension finie. On dira que M est \widehat{T} -diagonalisable s'il est la somme directe de tous ses \widehat{T} -espaces propres.

Exemple 4. Les \mathfrak{g} - \widehat{B} -modules sont $U(\mathfrak{n}^+)$ -finis et \widehat{T} -diagonalisables.

Le lemme qui suit montre en particulier comment vérifier la propriété d'avoir un sous-quotient simple de dimension finie à partir du caractère.

On notera, pour tout caractère $\lambda \in \mathcal{X}$, $L(\lambda)$ le \mathfrak{g} -module simple de plus haut poids λ et $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{k}$ son caractère central (on remarque que $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si λ est dominant).

Lemme 9. *Soit M un \mathfrak{g} -module $U(\mathfrak{n}^+)$ -fini, \widehat{T} -diagonalisable et avec un caractère $[M]$ dans l'anneau $\mathbb{Z}\langle \mathcal{X} \rangle$.*

Alors pour tout caractère $\mu \in \mathcal{X}$ dominant, la multiplicité du \mathfrak{g} -module simple de plus haut poids μ est donnée par

$$[M : L(\mu)] = \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \cdot [M](\mu)$$

(la multiplicité du poids μ dans le caractère virtuel $\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \cdot [M]$).

Démonstration. Pour chaque caractère central $\chi : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{k}$, on note M_χ le sous-espace propre généralisé associé à χ :

$$M_\chi := \{m \in M : \exists k > 0 : (\ker \chi)^k \cdot m = 0\}.$$

Comme M a un caractère, on a la décomposition

$$M = \bigoplus_{\chi} M_\chi$$

(cf. e.g. [BGG, §8, Prop. 8.6]).

Il suffit donc de démontrer le lemme lorsque $M = M_\chi$. Dans ce cas, $M = M_\chi$ admet une suite de Jordan–Hölder finie :

$$M = M_0 \supseteq \dots \supseteq M_N \supseteq M_{N+1} = 0$$

dont les sous-quotients simples sont tous de la forme :

$$M_i/M_{i+1} \simeq L(\lambda^{(i)})$$

pour un certain $\lambda^{(i)} \in \mathcal{X}$ tel que $\chi_{\lambda^{(i)}} = \chi$ (cf. [D, prop. 7.6.1]).

Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ l'ensemble fini $\{\lambda \in \mathcal{X} : \chi_\lambda = \chi\}$.

Pour chaque i , soit n_i la multiplicité du \mathfrak{g} -module simple $L(\lambda_i)$ dans M . On a alors l'égalité de caractères :

$$[M] = \sum_{1 \leq i \leq t} n_i [L(\lambda_i)]. \tag{3}$$

Or, les caractères des modules simples à plus haut poids s'expriment avec les caractères des modules de Verma : pour tout i , il existe des entiers $m_{i,j}$ (éventuellement négatifs) tels que :

$$[L(\lambda_i)] = [M(\lambda_i)] + \sum_{\substack{1 \leq j \leq t \\ \lambda_j < \lambda_i}} m_{i,j} [M(\lambda_j)]. \tag{4}$$

L'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ contient au plus un poids dominant ; supposons par exemple que λ_1 est l'unique poids dominant de cet ensemble. Dans ce cas, $\lambda_j < \lambda_1$ pour tout $2 \leq j \leq t$ et il résulte de (3) et (4) que :

$$[M] = n_1 [M(\lambda_1)] + \sum_{2 \leq j \leq t} p_j [M(\lambda_j)]$$

pour certains entiers p_j .

Connaissant les caractères des modules de Verma, on trouve donc :

$$[M] = \frac{n_1 e^{\lambda_1}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})} + \frac{p_2 e^{\lambda_2}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})} + \dots + \frac{p_t e^{\lambda_t}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})}$$

c -à- d :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \cdot [M] = n_1 e^{\lambda_1} + p_2 e^{\lambda_2} + \dots + p_t e^{\lambda_t}. \tag{5}$$

En conséquence, n_1 est la multiplicité de λ_1 dans le caractère virtuel : $\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) [M]$.

Soit maintenant $\mu \in \mathcal{X}$ un caractère dominant.

Si $\chi_\mu = \chi$, alors $\mu \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ et donc $\mu = \lambda_1$, d'où : $[M : L(\mu)] = n_1$.

Si $\chi_\mu \neq \chi$, alors d'une part $[M : L(\mu)] = 0$ car $M = M_\chi$ et d'autre part : $\mu \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$, ce qui entraîne :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \cdot [M](\mu) = 0$$

d'après (5). □

Absence de sous-quotients-simples de dimension finie. Nous allons appliquer le lemme 9 au \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$:

Proposition 10. *Si x n'est pas dans la G -orbite fermée de X , alors le \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda)$ n'a pas de sous-quotient simple de dimension finie.*

Démonstration. Posons $M := H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$. Si M a un sous-quotient simple de dimension finie $L(\mu)$ avec $\mu \in \mathcal{X}$, alors forcément μ est dominant, et μ est un poids du caractère virtuel :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})[M] = \frac{\left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) e^{\lambda'}}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq u \\ w\delta_i > 0}} (1 - e^{-w\delta_i}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq u \\ w\delta_i < 0}} (1 - e^{w\delta_i}) \prod_{1 \leq j \leq v} (1 - e^{-w\beta_j})^2}.$$

Nous allons montrer que ce caractère virtuel n'a pas de poids dominant si $v > 0$ (où v est comme dans le lemme 6).

Notons β_1, \dots, β_t , avec $t \geq v$ les racines positives du sous-groupe de Levi L_I . On a la décomposition suivante :

$$\Phi^+ = \{w\delta_i : 1 \leq i \leq u, w\delta_i > 0\} \sqcup \{-w\delta_i : 1 \leq i \leq u, w\delta_i < 0\} \sqcup \{w\beta_j : 1 \leq j \leq t\}.$$

On a donc :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})[M] = \frac{\left(\prod_{j=v+1}^t (1 - e^{-w\beta_j}) \right) e^{\lambda'}}{\prod_{j=1}^v (1 - e^{-w\beta_j})}.$$

Par conséquent les poids du caractère $\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})[M]$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \nu &= \lambda' - \sum_{j=1}^t n_j w\beta_j \\ &= \lambda_x - \sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i - \sum_{j=1}^v w\beta_j - \sum_{j=1}^t n_j w\beta_j, \end{aligned}$$

pour certains entiers $n_j \geq 0$ (rappelons que λ_x désigne le poids de la fibre $\mathcal{L}_\lambda|_x$).

Posons $\gamma := \sum_{j=1}^v \beta_j + \sum_{j=1}^t n_j \beta_j$, de sorte que :

$$\nu = \lambda_x - \sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i - w\gamma. \tag{6}$$

Comme $w \in W^{L_I}$, $w\gamma$ est une somme de racines positives. Donc, si on suppose que ν est un poids dominant, alors $(\nu, w\gamma) \geq 0$; cela signifie d'après (6) que :

$$(\nu, w\gamma) = (\lambda_x, w\gamma) - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i, w\gamma \right) - (w\gamma, w\gamma) \geq 0. \tag{7}$$

Mais, d'une part, on a

$$(\lambda_x, w\gamma) = 0. \tag{8}$$

En effet, d'après le lemme 5, λ_x est un caractère du groupe $wP_I w^{-1}$ et γ est une combinaison linéaire de racines de L_I .

D'autre part, on a aussi :

$$\left(\sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i, w\gamma \right) \geq 0. \tag{9}$$

En effet, les δ_i sont les racines de $R_u(P_I)$, c -à- d les racines positives qui ne sont pas racines de (L_I, T) , et donc si on note ρ_I la demi-somme des racines positives de L_I , on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i &= \sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{L_I} \\ w\alpha > 0}} w\alpha \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{L_I}}} \beta \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta \in \Phi^+}} \beta - \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta \in \Phi^+_{L_I}}} \beta \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta \in \Phi^+}} \beta - \sum_{\beta \in w\Phi^+_{L_I}} \beta \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta \in \Phi^+}} \beta - 2w\rho_I. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \rho + w\rho &= \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} w\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta > 0}} \beta + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta < 0}} \beta + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \\ w^{-1}\beta > 0}} \beta \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta > 0}} \beta + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta < 0}} \beta + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta < 0 \\ w^{-1}\beta > 0}} \beta \\ &= \sum_{\substack{\beta > 0 \\ w^{-1}\beta > 0}} \beta. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i = \rho + w\rho - 2w\rho_I.$$

Mais alors, on obtient :

$$\left(\sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i, w\gamma \right) = (\rho + w\rho - 2w\rho_I, w\gamma).$$

Si β_j est une racine simple de L_I , alors on a :

$$\langle \rho + w\rho - 2w\rho_I, w\beta_j^\vee \rangle = \langle \rho, w\beta_j^\vee \rangle + \langle \rho, \beta_j^\vee \rangle - 2\langle \rho_I, \beta_j^\vee \rangle = \langle \rho, w\beta_j^\vee \rangle - 1 \geq 0$$

car $w\beta_j$ est une racine positive.

Donc :

$$(\rho + w\rho - 2w\rho_I, w\beta_j) \geq 0$$

pour toute racine simple β_j de L_I et, par conséquent, aussi pour toute racine positive β_j de L_I .

Et finalement :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ w\delta_i > 0}}^u w\delta_i, w\gamma \right) &= (\rho + w\rho - 2w\rho_I, w\gamma) \\ &= \sum_{j=1}^v (\rho + w\rho - 2w\rho_I, w\beta_j) + \sum_{j=1}^t n_j (\rho + w\rho - 2w\rho_L, w\beta_j) \geq 0 \end{aligned}$$

d'où (9).

On déduit de (7), (8) et (9) que si ν est un poids dominant, alors :

$$(w\gamma, w\gamma) \leq 0,$$

i.e. : $\gamma = 0$. Comme $\gamma = \sum_{j=1}^v \beta_j + \sum_{j=1}^t n_j \beta_j$, on a nécessairement $v = 0$.

En conclusion, puisque $2v$ est la codimension du groupe d'isotropie G_x dans le sous-groupe parabolique $wP_I w^{-1}$ (cf. le lemme 6), on a : $G_x = wP_I w^{-1}$ et finalement $G.x$ est projective donc fermée; d'où la proposition 10. \square

7.2. Démonstration du théorème principal

Pour terminer la démonstration du théorème principal 7, on utilise le résultat suivant qui nous ramène à l'étude, faite ci-dessus, du \mathfrak{g} -module $H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda|_{X_I})$.

Théorème 11 ([T1, théorème 4.1]). *Le \mathfrak{g} -module $H_{X^+(x)}^d(\mathcal{L}_\lambda)$ est de longueur finie et possède une filtration de sous- \mathfrak{g} -modules :*

$$H_{X^+(x)}^d(\mathcal{L}_\lambda) = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots,$$

telle que $\bigcap_{k \geq 0} M_k = 0$ et pour tout $k \geq 0$:

$$M_k/M_{k+1} = H_{X_I^+(x)}^{d_I}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_X(D_k)|_{X_I}),$$

où $D_k \in \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}D_\alpha$ est un diviseur de X .

Puisque les faisceaux inversibles $\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_X(D_k)$ sont encore spéciaux, la proposition 10 s'applique : on en déduit que les quotients successifs de la filtration du théorème ci-dessus n'ont aucun sous-quotient simple de dimension finie lorsque le point x est hors de l'orbite fermée. Il en est donc de même pour le \mathfrak{g} -module $H_{X^+(x)}^d(\mathcal{L}_\lambda)$.

Cela achève la démonstration du théorème 7.

8. Applications

Nous allons appliquer le théorème 7 au problème du calcul des groupes de cohomologie $H^d(X, \mathcal{L}_\lambda)$, $d \geq 0, \lambda \in \text{pic}(X)$.

Comme les faisceaux \mathcal{L}_λ sont \widehat{G} -linéarisés sur X , tous ces groupes de cohomologie sont des \widehat{G} -modules. Donc pour chaque entier d et chaque poids $\lambda \in \text{pic} X$, on a une décomposition en somme directe de \widehat{G} -modules simples :

$$H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathcal{X} \\ \mu \text{ dominant}}} L(\mu)^{\oplus m_\lambda^d(\mu)},$$

où $m_\lambda^d(\mu) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ est la multiplicité du module simple $L(\mu)$ dans le \widehat{G} -module $H^d(X, \mathcal{L}_\lambda)$.

8.1. Suite spectrale de Grothendieck–Cousin

Pour estimer les entiers $m_\lambda^d(\mu)$, on dispose d’une suite spectrale qui fait intervenir des groupes de cohomologie à support dans des cellules de Bialynicki-Birula de X .

Fixons une décomposition cellulaire de X :

$$X = \bigsqcup_{i=0}^N X_i^+,$$

c-à-d que l’on note x_0, \dots, x_N les points fixes de T dans X , que l’on choisit un sous-groupe à un paramètre ζ de T tel que $X^{\zeta(\mathbf{k}^*)} = X^T$ et que l’on pose $X_i^+ := X^+(x_i)$ la cellule de Bialynicki-Birula centrée en x_i . On supposera de plus que ζ est dominant et régulier, i.e. :

$$\forall \alpha \in \Phi^+, \quad \langle \alpha, \zeta \rangle > 0.$$

D’après [BB76, Theorem 3], il existe une suite décroissante de sous-espaces fermés de X :

$$X = Z_0 \supseteq \dots \supseteq Z_N \supseteq Z_{N+1} = \emptyset$$

telle que pour chaque i , $Z_i \setminus Z_{i+1} = X_i^+$ (quitte à renuméroter les points fixes x_i).

D’après [K], on a alors une suite spectrale de \mathfrak{g} -modules qui converge :

$$E_1^{p,q} = H_{X_i^+}^{p+q}(\mathcal{L}_\lambda) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{L}_\lambda). \tag{10}$$

Les termes initiaux sont seulement des \mathfrak{g} -modules mais les termes finaux sont des \widehat{G} -modules, *c-à-d* des sommes directes de \mathfrak{g} -modules de dimension finie.

A priori cette suite spectrale ne dégénère pas en page un mais on peut la simplifier. En effet, tous les termes $E_1^{p,q}$ tels que $p+q \neq \text{codim}_X(X_p^+)$ sont nuls. D’un autre côté, grâce au théorème 7, une autre simplification est possible : on va pouvoir ne tenir compte que des $E_1^{p,q}$ tels que le point fixe x_p est dans l’orbite fermée. En effet, les autres termes $E_1^{p,q}$ n’ont pas de \widehat{G} -modules parmi leurs sous-quotients simples.

En ce qui concerne les caractères de \widehat{T} , on utilisera les notations suivantes.

Définition 3. Pour tout $\mu \in \mathcal{X}$, il existe au plus un $w \in W$ tel que $w(\mu + \rho) - \rho$ soit dominant ; dans ce cas, on note :

$$\mu^+ := w(\mu + \rho) - \rho, \quad w_\mu := w, \quad \text{et} \quad l(\mu) := l(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ : \langle \mu + \rho, \alpha^\vee \rangle < 0\}|.$$

8.2. Caractéristique d’Euler–Poincaré

Si V est un \widehat{G} -module rationnel, on note $\text{cl}(V)$ la classe des \widehat{G} -modules isomorphes à V . Le *groupe de Grothendieck* des \widehat{G} -modules rationnels, noté $K(\widehat{G})$, est le groupe commutatif défini par les générateurs : $\text{cl}(V)$ et par les relations : $\text{cl}(V) = \text{cl}(V') + \text{cl}(V'')$ pour chaque suite exacte courte $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V''$ de \widehat{G} -modules. Pour tout \widehat{G} -module V , on note $[V]$ l’image de V dans $K(\widehat{G})$.

Pour tout $\lambda \in \text{pic}X$, notons $\chi(X, \mathcal{L}_\lambda)$ l’élément

$$\sum_{d \geq 0} (-1)^d [H^d(X, \mathcal{L}_\lambda)]$$

de $K(\widehat{G})$; c’est la caractéristique d’Euler–Poincaré globale du faisceau inversible \mathcal{L}_λ .

Pour tout $\lambda \in \text{pic}X$ et tout $\mu \in \mathcal{X}$ dominant, notons :

$$\chi_\lambda(\mu) := \sum_{d \geq 0} (-1)^d m_\lambda^d(\mu),$$

c’est la multiplicité selon $[L(\mu)]$ du \widehat{G} -module virtuel $\chi(X, \mathcal{L}_\lambda)$.

Théorème 12. *Pour tout $1 \leq i \leq l$, soit $\rho_i := \langle \rho, \tilde{\alpha}_i^\vee \rangle = (\rho, \tilde{\alpha}_i) / (\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha}_i)$. Pour toute partie J de $\{1, \dots, r\}$, soient :*

$$R_J := \sum_{\substack{i=1 \\ i \in J}}^r \mathbb{Z}_{>0} \tilde{\alpha}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin J}}^r \mathbb{Z}_{\leq 0} \tilde{\alpha}_i,$$

$$\Omega_J := \sum_{\substack{i=1 \\ i \in J}}^r \mathbb{Z}_{< -\rho_i} \tilde{\omega}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin J}}^r \mathbb{Z}_{> -\rho_i} \tilde{\omega}_i.$$

Si λ est un poids spécial de $\text{pic}(X)$, alors on a

$$\chi(X, \mathcal{L}_\lambda) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \sum_{\substack{\nu \\ \nu + \rho \text{ régulier}}} (-1)^{l(\nu) + |J|} [L(\nu^+)],$$

où dans la deuxième somme, ν décrit l’ensemble de caractères $(\lambda + R_J) \cap \Omega_J$.

Autrement dit, pour tout poids dominant $\mu \in \mathcal{X}$:

$$\chi_\lambda(\mu) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \sum_{\nu} (-1)^{l(\nu) + |J|},$$

où cette fois, ν décrit l’ensemble fini de caractères $(\lambda + R_J) \cap \Omega_J \cap W * \mu$ (on note pour tout $w \in W$ et tout $\eta \in \mathcal{X}$, $w * \eta := w(\eta + \rho) - \rho$).

Remarque 12. Sur les figures 1, 2 et 3, on a représenté les ensembles Ω_J et R_J dans le cas de la compactification magnifique de l’espace homogène $\text{Sp}_{2n}/\text{Sp}_4 \times \text{Sp}_{2n-4}$, $n \geq 4$ (cf. la section 9 pour les notations).

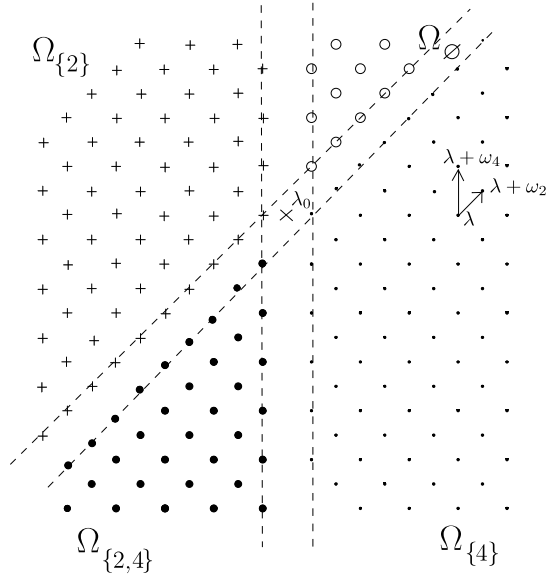


FIGURE 1. Les ensembles Ω_J pour la compactification magnétique de $\mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2n-4}$, $n \geq 4$, où : $\lambda_0 := -((\rho, \tilde{\alpha}_2)/(\omega_2, \tilde{\alpha}_2))\omega_2 - ((\rho, \tilde{\alpha}_4)/(\omega_4, \tilde{\alpha}_4))\omega_4 = -2\omega_2 - ((2n - 5)/2)\omega_4$.

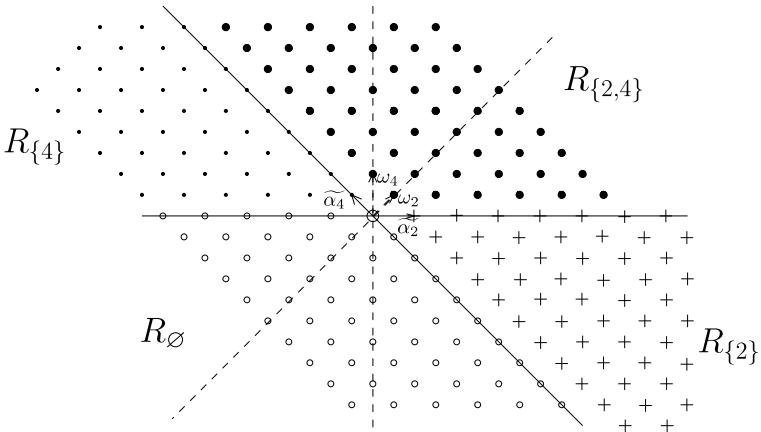


FIGURE 2. Les ensembles R_J pour la compactification magnétique de $\mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2n-4}$, $n \geq 5$.

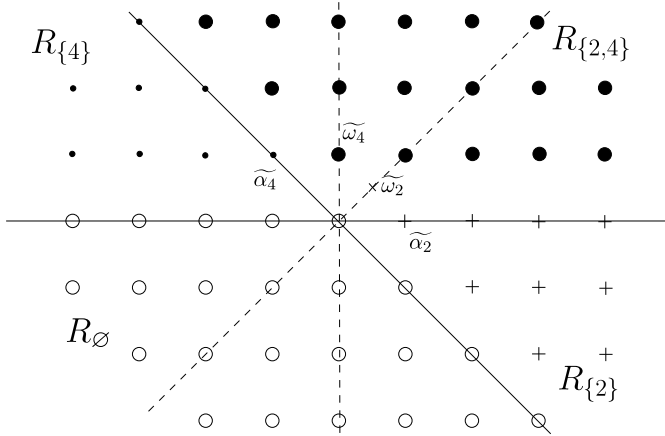


FIGURE 3. Les ensembles R_J pour la compactification magnifique de $\mathrm{Sp}_8/\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_4$.

Démonstration. Pour calculer la caractéristique d’Euler–Poincaré globale des faisceaux \mathcal{L}_λ , on a seulement besoin des premiers termes de la suite spectrale (10).

On veut calculer :

$$\chi_\lambda(\mu) = \sum_{d \geq 0} (-1)^d [H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)].$$

D’après (10), on a

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(\mu) &= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} [E_1^{p,q} : L(\mu)] \\ &= \sum_{d \geq 0} (-1)^d \sum_{p \geq 0} [H_{X_p^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \end{aligned}$$

(rappelons que les cellules X_p^+ sont définies par un sous-groupe à un paramètre ζ dominant et régulier, cf. §8.1).

Or, d’après le théorème principal 7, si la cellule X_p^+ n’est pas centrée en un point de l’orbite fermée, alors la multiplicité $[H_{X_p^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)]$ est nulle. Donc, si l’on note X_w^+ la cellule de Bialynicki-Birula centrée en le point wQ/Q , on trouve

$$\chi_\lambda(\mu) = \sum_{d \geq 0} (-1)^d \sum_{w \in W^Q} [H_{X_w^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)].$$

(Rappelons que les points fixes de l’orbite fermée $F = G/Q$ sont paramétrés par W^Q , l’ensemble des représentants de longueur minimale de W/W_Q .)

D’un autre côté, le groupe de cohomologie à support $H_{X_w^+}^d(\mathcal{L}_\lambda)$ est nul si $d \neq \mathrm{codim}_X X_w^+$ et si $d = \mathrm{codim}_X X_w^+$, on a d’après [T1, théorèmes 4.1 et 4.4] :

$$[H_{X_w^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = \begin{cases} 1 & \text{si } w^{-1}(\mu + \rho) \in \lambda + \rho + \sum_{\substack{i=1 \\ x_w^+ \subseteq D_i}}^r \mathbb{Z}_{>0} \tilde{\alpha}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ x_w^+ \not\subseteq D_i}}^r \mathbb{Z}_{\leq 0} \tilde{\alpha}_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

Or, pour chaque cellule X_w^+ et chaque diviseur D_i , le tore \widehat{T} agit sur la fibre $\mathcal{O}_X(D_i)|_{wQ/Q}$ via le caractère $w(\tilde{\alpha}_i)$. On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X_w^+ \subseteq D_i &\Leftrightarrow \langle w(\tilde{\alpha}_i), \zeta \rangle < 0, \\ X_w^+ \not\subseteq D_i &\Leftrightarrow \langle w(\tilde{\alpha}_i), \zeta \rangle > 0. \end{aligned}$$

De plus, comme $X_w^+ \cap \bigcap_{i=1}^r D_i = BwQ/Q$, on a

$$\text{codim}_X X_w^+ = |\{1 \leq i \leq r : \langle w(\tilde{\alpha}_i), \zeta \rangle < 0\}| + l(w). \tag{12}$$

Posons $J_w := \{1 \leq i \leq r : \langle w(\tilde{\alpha}_i), \zeta \rangle < 0\}$. On déduit de ce qui précède que :

$$\chi_\lambda(\mu) = \sum_w (-1)^{l(w) + |J_w|},$$

où w décrit l'ensemble, que nous noterons $W_{\lambda, \mu}$, des éléments w de W tels que :

$$w^{-1}(\mu + \rho) \in \lambda + \rho + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in J_w}}^r \mathbb{Z}_{>0} \tilde{\alpha}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin J_w}}^r \mathbb{Z}_{\leq 0} \tilde{\alpha}_i.$$

Si on admet le lemme suivant :

Lemme 13. *Pour tout poids spécial ν tel que $\nu + \rho$ est régulier et pour tout $\alpha \in \Delta_1$:*

$$\langle w_\nu(\tilde{\alpha}), \zeta \rangle < 0 \Leftrightarrow \langle \nu + \rho, \tilde{\alpha} \rangle < 0.$$

alors on remarque que l'application

$$\begin{aligned} W_{\lambda, \mu} &\rightarrow \{(J, \nu) : J \subseteq \{1, \dots, r\}, \nu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \cap W * \mu\}, \\ w &\mapsto (J_w, w^{-1}(\mu + \rho) - \rho), \end{aligned}$$

est une bijection. D'où les formules de l'énoncé et la fin de la démonstration du théorème 12.

Démontrons maintenant le lemme 13. L'équivalence à démontrer n'est pas immédiate car a priori, $w_\lambda(\tilde{\alpha})$ n'est pas un élément de $\widehat{\Phi}_1$. Néanmoins, on va montrer que $w_\lambda(\tilde{\alpha})$ est une somme de 2 racines positives ou de 2 racines négatives.

Pour cela, on vérifie qu'il existe des entiers $n_\delta \geq 0, \delta \in \Delta_0$ tels que :

$$\alpha' := \alpha + \sum_{\delta \in \Delta_0} n_\delta \delta \in \Phi_1^+ \quad \text{et} \quad |\langle \rho, \alpha'^\vee \rangle + \langle \rho, \theta(\alpha')^\vee \rangle| \leq 1. \tag{13}$$

Il suffit, en effet, de traiter le cas où X est de rang 1 avec $\widetilde{\Phi}_1 = \{\pm\widetilde{\alpha}\}$. Cela fait seulement huit possibilités ; dans le tableau suivant, chaque variété symétrique complète est représentée par le diagramme de Satake de l'espace homogène G/H (c'est le diagramme de Dynkyn de G où les sommets correspondant aux éléments de Δ_0 sont noircis et où les racines simples α_i et $-\bar{\theta}(\alpha_i)$ distinctes sont reliées par \curvearrowright). Pour chaque exemple, on donne $\theta(\alpha)$ et une racine α' qui vérifie (13) :

TABLE 1.

X	θ α'
α_1 	$-\theta(\alpha_1) = \alpha_1$ $\alpha' = \alpha_1$
$\alpha_1 \rightleftarrows \alpha_2$ 	$\theta(\alpha_1) = \alpha_2$ $\alpha' = \alpha_1$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \alpha_3$ 	$-\theta(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{n-1} \rightleftarrows \alpha_n, n \geq 2$ 	$-\theta(\alpha_1) = \alpha_1 + 2 \sum_{i=2}^n \alpha_i$ $\alpha' = \alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{n-2} \begin{matrix} \nearrow \alpha_{n-1} \\ \searrow \alpha_n \end{matrix}, n \geq 4$ 	$-\theta(\alpha_1) = \alpha_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-2} \alpha_i + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ $\alpha' = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{n-1} \text{---} \alpha_n$ 	$-\theta(\alpha_1) = \sum_{i=2}^n \alpha_i$ $\alpha' = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_i$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \alpha_3 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{n-1} \rightleftarrows \alpha_n, n \geq 2$ 	$-\theta(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_i + \alpha_n$ $\alpha' = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$
$\alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \alpha_3 \text{---} \alpha_4$ 	$-\theta(\alpha_4) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$ $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

On choisit donc α' qui vérifie (13) : on a alors $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}'$ et $w_\lambda(\widetilde{\alpha}) = w_\lambda(\alpha') - w_\lambda(\theta(\alpha'))$.

Or, comme le caractère $w_\lambda(\lambda + \rho)$ est dominant régulier et comme $\theta(\lambda) = -\lambda$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} w_\lambda(\alpha') \in \Phi^+ &\Leftrightarrow \langle w_\lambda(\lambda + \rho), w_\lambda(\alpha')^\vee \rangle > 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \lambda, \alpha'^\vee \rangle + \langle \rho, \alpha'^\vee \rangle > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -w_\lambda(\theta(\alpha')) \in \Phi^+ &\Leftrightarrow \langle \lambda + \rho, -\theta(\alpha')^\vee \rangle > 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda, -\theta(\alpha')^\vee \rangle + \langle \rho, -\theta(\alpha')^\vee \rangle > 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda, \alpha'^\vee \rangle - \langle \rho, \theta(\alpha')^\vee \rangle > 0.
 \end{aligned}$$

Mais puisque, le poids $\lambda + \rho$ est entier et régulier, les nombres

$$\langle \lambda, \alpha'^\vee \rangle + \langle \rho, \alpha'^\vee \rangle \text{ et } \langle \lambda, \alpha'^\vee \rangle - \langle \rho, \theta(\alpha')^\vee \rangle$$

sont des entiers non nuls, dont la différence est en valeur absolue inférieure ou égale à 1, d'après (13). Ce sont donc des entiers de mêmes signes.

Comme le sous-groupe à un paramètre ζ est dominant régulier, on peut conclure :

$$\begin{aligned}
 \langle w_\lambda(\tilde{\alpha}), \zeta \rangle > 0 &\Leftrightarrow w_\lambda(\alpha') \text{ et } w_\lambda(-\theta(\alpha')) \in \Phi^+ \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda + \rho, \alpha'^\vee \rangle \text{ et } \langle \lambda + \rho, -\theta(\alpha')^\vee \rangle > 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda + \rho, \alpha' \rangle \text{ et } \langle \lambda + \rho, -\theta(\alpha') \rangle > 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda + \rho, \tilde{\alpha}' \rangle > 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \lambda + \rho, \tilde{\alpha} \rangle > 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarque 13. En particulier, les codimensions des cellules de Bialynicki-Birula qui interviennent dans le calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré sont indépendantes du sous-groupe à un paramètre ζ choisi.

8.3. Estimée des multiplicités

Pour deux \widehat{G} -modules V_1, V_2 de dimension finie, la notation $V_1 \leq V_2$ signifiera que pour tout caractère dominant μ :

$$[V_1 : L(\mu)] \leq [V_2 : L(\mu)].$$

On obtient grâce à la suite spectrale (10) et avec les notations du théorème 12 la majoration suivante des multiplicités $m_\lambda^d(\mu)$:

Théorème 14. *Pour tout poids spécial $\lambda \in \text{pic}(X)$ et pour tout entier d :*

$$H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) \leq \bigoplus_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \bigoplus_{\substack{\nu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \nu + \rho \text{ régulier} \\ l(\nu) + |J| = d}} L(\nu^+). \tag{14}$$

Remarque 14. Lorsque X est de rang minimal, i.e. lorsque $r = \text{rg}(G) - \text{rg}(H)$, cette inégalité est une égalité (cf. [T2, théorème 3.1]). Nous donnerons dans la section suivante un exemple, qui n'est pas de rang minimal, pour lequel on peut aussi démontrer l'égalité. En revanche, nous verrons que cette inégalité peut devenir stricte dans le cas de la variété des coniques complètes (cf. le théorème 17).

Démonstration. On déduit de (10) que pour tout poids dominant μ :

$$\begin{aligned}
 [H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] &\leq \sum_{\substack{p,q \\ p+q=d}} [E_1^{p,q} : L(\mu)] \\
 &\leq \sum_{\substack{p,q \\ p+q=d}} [H_{X_p^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)].
 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème 7, la multiplicité $[H_{X_p^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)]$ est nulle si la cellule X_p^+ n'est pas centrée en un point de l'orbite fermée $F \simeq G/Q$. Donc :

$$[H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \leq \sum_{w \in W^Q} [H_{X_w^+}^d(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)].$$

L'inégalité de l'énoncé résulte alors de (11) et du lemme 13. □

On déduit de ce théorème le résultat d'annulation suivant :

Corollaire 14.1. *Pour tout poids spécial $\lambda \in \text{pic}(X)$, $H^1(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$.*

Remarque 15. En particulier, si X est une variété symétrique complète non exceptionnelle (i.e. si tous les poids de $\text{pic}X$ sont spéciaux) alors, pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X , on a : $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$. C'est le cas par exemple pour la *variété des quadriques complètes*, la compactification magnifique de $\text{PGL}_n/\text{PSO}_n$.

Démonstration du corollaire. Soient $J \subseteq \{1, \dots, r\}$ et $\nu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J$ tel que $\nu + \rho$ est régulier.

Nous allons montrer que $l(\nu) + |J|$ ne vaut jamais 1 :

Remarquons que :

$$\nu \in \lambda + R_J \Rightarrow \theta(\nu) = -\nu.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \forall \delta \in \Delta_0, \quad \langle \nu, \delta^\vee \rangle &= \langle \theta(\nu), \theta(\delta)^\vee \rangle = -\langle \nu, \delta^\vee \rangle \\
 \Rightarrow \forall \delta \in \Delta_0, \quad \langle \nu, \delta^\vee \rangle &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

On a :

$$J = \{1 \leq i \leq r : (\nu + \rho, \tilde{\alpha}_i) < 0\} \quad \text{et} \quad l(\nu) = |\{\alpha \in \Phi^+ : (\nu + \rho, \alpha) < 0\}|.$$

Donc : $|J| \leq l(\nu)$. Mais alors :

$$l(\nu) + |J| = 1 \Rightarrow |J| = 0 \text{ et } l(\nu) = 1.$$

Nous allons voir que dans ce cas, on a en fait $l(\nu) \geq 2$: absurde.

D'une part, il existe un unique $\alpha \in \Delta$ tel que $w_\nu(\alpha) \in \Phi^-$ i.e. : $\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle < 0$ ou encore :

$$\langle \nu, \alpha^\vee \rangle + 1 < 0 \tag{16}$$

(en particulier, $\alpha \in \Delta_1$).

D'autre part, comme $|J| = 0$, on a : $\langle \nu + \rho, \tilde{\alpha} \rangle > 0$ c-à-d $\langle \nu + \rho, \alpha \rangle + \langle \nu + \rho, -\theta(\alpha) \rangle > 0$. Donc :

$$\begin{aligned} \langle \nu + \rho, -\theta(\alpha) \rangle &> -\langle \nu + \rho, \alpha \rangle > 0 \\ \Rightarrow \langle \nu + \rho, -\theta(\alpha)^\vee \rangle &> 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \langle \rho, -\theta(\alpha)^\vee \rangle &> -\langle \nu, -\theta(\alpha)^\vee \rangle \\ \Rightarrow \langle \rho, -\theta(\alpha)^\vee \rangle &> -\langle \nu, \alpha^\vee \rangle > 1. \end{aligned}$$

On est donc sous l'hypothèse du lemme suivant :

Lemme 15. Soit $\alpha \in \Delta_1$ tel que $\langle \rho, -\theta(\alpha)^\vee \rangle > 2$. Alors il existe $\delta \in \Delta_0$ tel que :

$$\alpha + \delta \in \Phi^+, \quad \langle \rho, (\alpha + \delta)^\vee \rangle = 2, \quad (\alpha + \delta, \alpha + \delta) = (\alpha, \alpha).$$

Avec (15) et (16), ce lemme permet de conclure :

$$\begin{aligned} \langle \nu + \rho, (\alpha + \delta)^\vee \rangle &\leq \langle \nu, (\alpha + \delta)^\vee \rangle + 2 \\ &\leq 2 \frac{\langle \nu, \alpha + \delta \rangle}{\langle \alpha + \delta, \alpha + \delta \rangle} + 2 \\ &\leq 2 \frac{\langle \nu, \alpha \rangle}{\langle \alpha + \delta, \alpha + \delta \rangle} + 2 \\ &\leq \langle \nu, \alpha^\vee \rangle + 2 \leq 0 \\ \Rightarrow \langle \nu + \rho, (\alpha + \delta)^\vee \rangle &< 0 \end{aligned}$$

car $\nu + \rho$ est régulier ; et donc, $l(\nu) \geq 2$. □

Il reste à démontrer le lemme 15 : Il suffit de traiter les six cas où X est de rang 1 et où $\Delta_0 \neq \emptyset$. On le fait dans le tableau suivant (Table 2) en donnant pour chaque exemple, une racine $\alpha + \delta$ qui vérifie l'énoncé du lemme :

TABLE 2.

X	α	$\alpha + \delta$	$\langle \rho, (\alpha + \delta)^\vee \rangle$
	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	2
	α_1	$\alpha_1 + \alpha_2$	2
	α_1	$\alpha_1 + \alpha_2$	2
	α_1 ou α_n	$\alpha_1 + \alpha_2$ ou $\alpha_{n-1} + \alpha_n$	2
	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	2
	α_4	$\alpha_3 + \alpha_4$	2

Remarque 16. Plus généralement, si d n'est pas de la forme $l(\nu) + |J_\nu|$, pour un poids spécial ν (on note J_ν l'ensemble $\{1 \leq i \leq r : (\nu + \rho, \tilde{\alpha}_i) < 0\}$), alors $H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour tout poids spécial λ de $\text{pic } X$.

9. Deux exemples

9.1. Un cas d'égalité

En général, le théorème 7 ne suffit pas pour améliorer les inégalités (14). Néanmoins, nous allons voir un exemple de variété symétrique complète X pour lequel ce théorème 7 permet de transformer en égalités les inégalités (14) et donc de déterminer tous les groupes de cohomologie de tous les fibrés en droites sur X .

Cet exemple sera la compactification magnifique de l'espace symétrique $\text{Sp}_{2n}/\text{Sp}_4 \times \text{Sp}_{2n-4}$, pour $n \geq 4$. Cet espace symétrique est appelé $C_n^{H,4}$ dans [L, table 8] et son diagramme de Satake est

$$\overset{\alpha_1}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha_2}{\circ} \text{---} \overset{\alpha_3}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha_4}{\circ} \text{---} \overset{\alpha_5}{\bullet} \text{---} \dots \text{---} \overset{\alpha_{n-1}}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha_n}{\bullet} \text{---} \text{---} \overset{\alpha_{n-1}}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha_n}{\bullet} . \tag{17}$$

Il se trouve en effet que pour cet exemple de variété symétrique complète X on a une décomposition cellulaire qui « s'adapte bien » à l'étude de la suite spectrale de Grothendieck–Cousin.

Fixons d'abord quelques notations.

Soient J la matrice $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ et J_0 la matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} -I_2 & & & & & \\ & I_{n-2} & & & & \\ & & -I_2 & & & \\ & & & I_{n-2} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

(où I_p est la matrice identité de taille $p \times p$).

Le groupe G sera dorénavant le groupe $\text{Sp}_{2n}(\mathbf{k})$, i.e. le sous-groupe des matrices $g \in \text{GL}_{2n}(\mathbf{k})$ telles que : $g^t J g = J$.

L'automorphisme $\theta : G \rightarrow G, g \mapsto J_0 g J_0$ est une involution dont le groupe des points fixes vérifie : $G^\theta \simeq \text{Sp}_4 \times \text{Sp}_{2n-4}$. Nous noterons X la compactification magnifique de G/G^θ . C'est une variété symétrique complète de rang 2. En particulier, X n'est pas de rang minimal car $\text{rang } G - \text{rang } G^\theta = 0$; le résultat que nous énonçons ci-dessous (cf. le théorème 16) n'est donc pas contenu dans [T2].

On choisit $\Phi, \Phi_0, \Phi_1, \dots$ comme dans la section 2.

On a

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{\alpha_2, \alpha_4\}, \\ \theta(\alpha_2) &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\ \theta(\alpha_4) &= \begin{cases} -2\alpha_3 - \alpha_4 & \text{si } n = 4, \\ -\alpha_3 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - \dots - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n & \text{si } n \geq 5, \end{cases} \end{aligned}$$

(la numérotation des racines est donnée par le diagramme (17)). On a donc : $\text{pic } X = \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \mathbb{Z}\omega_4$.

Théorème 16. Soit X la compactification magnifique de l'espace symétrique $\mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2n-4}$, $n \geq 4$. Pour tout faisceau inversible \mathcal{L}_λ sur X , de poids $\lambda \in \mathbb{Z}\omega_2 + \mathbb{Z}\omega_4$, on a :

$$H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{J \subseteq \{2,4\}} \bigoplus_{\substack{\nu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \nu + \rho \text{ régulier} \\ l(\nu) + |J| = d}} L(\nu^+)$$

(les notations sont celles du théorème 12).

Plus concrètement :

$$H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$$

si $d \notin \{0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21, 8n - 16\}$ et si $d = 0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21$ ou $8n - 16$ alors :

$$H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\mu \in E_\lambda^d} L(\mu^+)$$

pour les ensembles de poids E_λ^d qui sont donnés dans le tableau suivant :

TABLE 3.

d	E_λ^d
0	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : x, y \geq 0\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_4$
5	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : x \leq -4, x + y \geq -2\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_4$
$4n - 12$	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : y \leq -2n + 5, x + 2y \geq -2n + 5\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_4$
$4n - 8$	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : -2y - 2n + 5 \leq x \leq -y - 2n + 3\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_4$ $\cup \{x\omega_2 + y\omega_4 : -y - 2 \leq x \leq -2y - 2n + 1\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_4$
$4n - 4$	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : y \geq 0, x + 2y \leq -2n + 1\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_4$
$8n - 21$	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : x \geq 0, x + y \leq -2n + 3\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{\leq 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_4$
$8n - 16$	$\{x\omega_2 + y\omega_4 : x \leq -4, y \leq -2n + 5\} \cap \lambda + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_2 + \mathbb{Z}_{> 0}\tilde{\alpha}_4$

Remarque 17. (i) La dimension de X est $8n - 16$.

(ii) Si on pose pour tout $d \geq 0$ et tout $J \subseteq \{2, 4\}$:

$$\Omega_J^d := \{\nu \in \Omega_J : \nu + \rho \text{ régulier et } l(\nu) + |J| = d\}$$

alors on a

$$E_\lambda^d = \bigcup_{J \subseteq \{2,4\}} \Omega_J^d \cap (\lambda + R_J).$$

On a représenté les ensembles Ω_J^d dans le cas où $n = 4$ sur la figure 4.

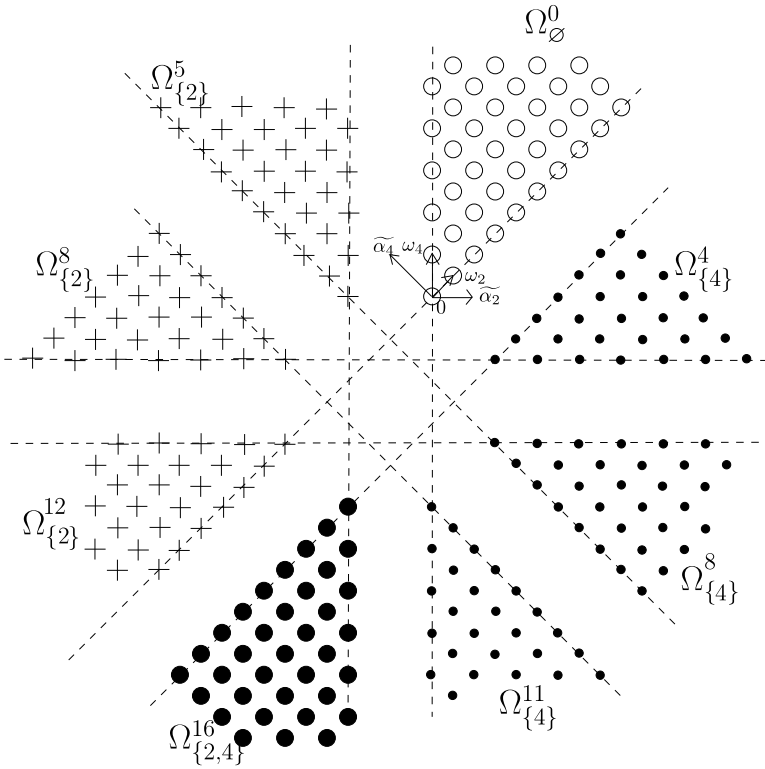


FIGURE 4. Les ensembles Ω_j^d lorsque $n = 4$.

Démonstration. Soit \mathcal{L}_λ un faisceau inversible sur X , de poids $\lambda \in \text{pic} X$, tel que : $H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$. D'après le théorème 14, il existe alors un poids $\nu \in \text{pic} X$ tel que : $\nu + \rho$ est régulier et $l(\nu) + |J_\nu| = d$ (où $l(\nu) = |\{\alpha \in \Phi_1^+ : \langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle < 0\}|$ et $J_\nu = \{i \in \{2, 4\} : (\nu + \rho, \tilde{\alpha}_i) < 0\}$).

Or, on a

$$\begin{aligned} \Phi_1^+ = & \left\{ \sum_{i \leq k < j} \alpha_k : i = 1, 2 \text{ et } j \geq 3 \text{ ou } i = 3, 4 \text{ et } j \geq 5 \right\} \\ & \sqcup \left\{ \sum_{i \leq k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leq k < n} \alpha_k + \alpha_n : i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } i < j \leq n \right\} \\ & \sqcup \left\{ 2 \sum_{i \leq k \leq n} \alpha_k + \alpha_n : i = 1, 2, 3, 4 \right\}. \end{aligned}$$

Pour un poids $\nu = x\omega_2 + y\omega_4 \in \text{pic} X$, $x, y \in \mathbb{Z}$, lorsque α décrit l'ensemble Φ_1^+ , voici les valeurs prises par $\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle$.

TABLE 4.

$\alpha \in \Phi_1^+$	$\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle$
$\sum_{i \leq k < j} \alpha_k$	$\begin{cases} x + j - i & \text{si } i = 1, 2 \text{ et } j = 3, 4, \\ x + y + j - i & \text{si } i = 1, 2 \text{ et } 5 \leq j \leq n, \\ y + j - i & \text{si } i = 3, 4 \text{ et } 5 \leq j \leq n \end{cases}$
$\sum_{i \leq k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leq k < n} \alpha_k + \alpha_n$	$\begin{cases} 2x + 2y + 2n - 1 & \text{si } i = 1, j = 2, \\ x + 2y + 2n + 2 - i - j & \text{si } i = 1, 2 \text{ et } j = 3, 4, \\ x + y + 2n + 2 - i - j & \text{si } i = 1, 2 \text{ et } 5 \leq j \leq n, \\ 2y + 2n - 5 & \text{si } i = 3 \text{ et } j = 4, \\ y + 2n + 2 - i - j & \text{si } i = 3, 4 \text{ et } 5 \leq j \leq n \end{cases}$
$2 \sum_{i \leq k < n} \alpha_k + \alpha_n$	$\begin{cases} x + y + n + 1 - i & \text{si } i = 1, 2, \\ y + n + 1 - i & \text{si } i = 3, 4 \end{cases}$

On déduit de ce tableau que le poids $\nu + \rho$ est régulier (i.e. $\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 0$) si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} x \neq -1, -2, -3, \\ y \neq -1, -2, \dots, -2n + 6, \\ x + y \neq -3, -4, \dots, -2n + 4, \\ x + 2y \neq -2n + 4, -2n + 3, -2n + 2. \end{cases}$$

Puisque de plus, si on choisit le produit scalaire $(,)$ tel que $(\alpha_1, \alpha_1) = 2$, on a

$$(\nu + \rho, \tilde{\alpha}_2) = 2(x + 2) \text{ et } (\nu + \rho, \tilde{\alpha}_4) = \begin{cases} 2(2y + 3) & \text{si } n = 4, \\ 2(y + n - \frac{5}{2}) & \text{si } n \geq 5, \end{cases} \tag{18}$$

on obtient que $d = l(\nu) + |J_\nu|$ ne peut prendre que les valeurs $0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21, 8n - 16$ comme dans l'énoncé.

Pour terminer la démonstration, il reste à vérifier que la « composante finie » de la suite spectrale :

$$E_1^{p,q} = H_{X_p^+}^{p+q}(\mathcal{L}_\lambda) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{L}_\lambda)$$

dégénère en page un, i.e.

$$[E_r^{p,q} : L(\mu)] = [E_1^{p,q} : L(\mu)] \tag{19}$$

pour tout poids dominant μ , pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ et tout $r \geq 1$.

On aura alors :

$$[H^d(X, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = \sum_{\substack{p,q \\ p+q=d}} [E_1^{p,q} : L(\mu)].$$

Fixons un poids dominant μ .

Nous allons montrer (19) par récurrence sur r .

On suppose donc que $[E_r^{p,q} : L(\mu)] = [E_1^{p,q} : L(\mu)]$ et on considère les morphismes de \mathfrak{g} -modules de la suite spectrale

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}.$$

Puisque $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} / \text{Im } d_r^{p-r,q+r-1}$, il s'agit de démontrer que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, le \mathfrak{g} -module $\text{Im } d_r^{p,q}$ est de multiplicité nulle selon $L(\mu)$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que :

$$[\text{Im } d_r^{p,q} : L(\mu)] \neq 0. \tag{20}$$

On a alors :

$$[E_r^{p,q} : L(\mu)] \neq 0 \quad \text{et} \quad [E_r^{p+r,q-r+1} : L(\mu)] \neq 0.$$

Comme $E_r^{p,q}$ est un sous-quotient de $E_1^{p,q}$, on a donc aussi :

$$[E_1^{p,q} : L(\mu)] = [H_{X_p^+}^{p+q}(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \neq 0.$$

En conséquence, d'une part, la cellule X_p^+ est de codimension $p + q$ et d'autre part, X_p^+ est centrée en un point de l'orbite fermée F de X de la forme $x_p = w_\nu Q/Q$ pour un certain poids $\nu \in \text{pic } X$ (d'après le théorème 7 et (11)). D'où : $p + q = l(\nu) + |J_\nu|$ avec $\nu \in \text{pic } X$; en particulier :

$$p + q = 0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21 \quad \text{ou} \quad 8n - 16. \tag{21}$$

De même, la cellule X_{p+r}^+ est centrée en un point $x_{p+r} = w_{\nu'} Q/Q$ pour un certain poids $\nu' \in \text{pic } X$ et on aurait :

$$p + q + 1 = 0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21 \quad \text{ou} \quad 8n - 16 \tag{22}$$

Il résulte alors de (21) et (22) que $1 = a - b$ pour certains $a, b \in \{0, 5, 4n - 12, 4n - 8, 4n - 4, 8n - 21, 8n - 16\}$: cela est impossible si $n \geq 5$.

Il reste donc à traiter le cas de la compactification magnifique de $\text{Sp}_8/\text{Sp}_4 \times \text{Sp}_4$, i.e. le cas où $n = 4$.

Dans ce cas, il se peut que (21) et (22) soient vérifiées, on a donc besoin d'un argument supplémentaire pour conclure. Les seuls cas possibles sont :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} p + q = 4n - 12 = 4, \\ p + q + 1 = 5, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (**) \left\{ \begin{array}{l} p + q = 8n - 21 = 11, \\ p + q + 1 = 4n - 4 = 12. \end{array} \right.$$

Ces deux cas se traitent de la même façon ; on va par exemple supposer (*), c'est-à-dire que : $l(\nu) + |J_\nu| = p + q = 4$ et $l(\nu') + |J_{\nu'}| = 5$.

Comme $n = 4$, le tableau 4 devient :

TABLE 5.

$\alpha \in \Phi_1^+$	$\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle$
$\alpha \in \Phi_1^+$	$\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle$
$\sum_{i \leq k < j} \alpha_k$	$x + j - i \quad \text{si } i = 1, 2 \text{ et } j = 3, 4$
$\sum_{i \leq k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leq k < 4} \alpha_k + \alpha_4$	$\begin{cases} 2x + 2y + 7 & \text{si } i = 1, j = 2, \\ x + 2y + 10 - i - j & \text{si } i = 1, 2 \text{ et } j = 3, 4, \\ 2y + 3 & \text{si } i = 3 \text{ et } j = 4 \end{cases}$
$2 \sum_{i \leq k < 4} \alpha_k + \alpha_n$	$\begin{cases} x + y + 5 - i & \text{si } i = 1, 2, \\ y + 5 - i & \text{si } i = 3, 4 \end{cases}$

On a : $l(\nu) + |J_\nu| = 4 \Rightarrow |J_\nu| = 1$. Mais alors, d'après (18), on a forcément : $J_\nu = \{\tilde{\alpha}_4\}$. De même, $l(\nu') + |J_{\nu'}| = 5 \Rightarrow J_{\nu'} = \{\tilde{\alpha}_2\}$.

En particulier, en posant $D := D_{\tilde{\alpha}_4}$:

$$X_p^+ \subseteq D \quad \text{et} \quad X_{p+r}^+ \cap D \subsetneq X_{p+r}^+.$$

Soit \mathcal{J}_D le faisceau d'idéaux définissant le diviseur D (c'est un faisceau inversible). Le morphisme $\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_D \rightarrow \mathcal{L}$ induit un morphisme entre les suites spectrales associées à $\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_D$ et à \mathcal{L} . On a donc le diagramme commutatif de \mathfrak{g} -modules suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(\mathcal{L}_\lambda) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & E_r^{p+r,q-r+1}(\mathcal{L}_\lambda) \\ \alpha_r^{p,q} \uparrow & & \uparrow \alpha_r^{p+r,q-r+1} \\ E_r^{p,q}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & E_r^{p+r,q-r+1}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D). \end{array}$$

D'un autre côté, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D \rightarrow \mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\lambda|_D \rightarrow 0$$

induit une longue suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D) \rightarrow H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda|_D) \rightarrow \dots$$

Si

$$X_p^+ \subseteq D,$$

la cellule X_p^+ est de codimension 3 dans D et $H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda|_D) = 0$. Le morphisme :

$$H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D) = E_1^{p,q}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_D) \rightarrow E_1^{p,q}(\mathcal{L}_\lambda) = H_{X_p^+}^4(\mathcal{L}_\lambda)$$

est donc surjectif.

Cela n’entraînerait pas forcément que le morphisme $\alpha_r^{p,q}$ du diagramme précédent soit surjectif mais puisque, par hypothèse de récurrence,

$$[E_1^{p,q}(\mathcal{L}) : L(\mu)] = [E_r^{p,q}(\mathcal{L}) : L(\mu)]$$

pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X , on a néanmoins :

$$[\text{Im } \alpha_r^{p,q} : L(\mu)] = [E_r^{p,q} : L(\mu)]$$

d’où :

$$[\text{Im } d_r^{p,q} : L(\mu)] = [\text{Im}(d_r^{p,q} \circ \alpha) : L(\mu)].$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} [\text{Im } d_r^{p,q} : L(\mu)] &= [\text{Im}(\alpha_r^{p+r,q-r+1} \circ d_{r,D}^{p,q}) : L(\mu)] \\ &\leq [E_r^{p+r,q-r+1}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_D) : L(\mu)] \\ &\leq [H_{X_{p+r}^+}^5(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D) : L(\mu)]. \end{aligned}$$

En raisonnant de même à partir du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^{n-1}) & \longrightarrow & E_r^{p+r,q-r+1}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_r^{p,q}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^n) & \longrightarrow & E_r^{p+r,q-r+1}(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^n) \end{array}$$

on obtient que :

$$[\text{Im } d_r^{p,q} : L(\mu)] \leq [H_{X_{p+r}^+}^5(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^n) : L(\mu)]$$

pour tout $n \geq 1$.

Or, si $D \cap X_{p+r}^+ \subsetneq X_{p+r}^+$, on a

$$\varprojlim_n H_{X_{p+r}^+}^5(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{J}_D^n) = 0,$$

d’après [T0, cor. II.3.2.1]. On a donc : $[\text{Im } d_r^{p,q} : L(\mu)] = 0$; d’où la contradiction (cf. (20)). \square

9.2. Cas de la variété des coniques complètes

Nous allons démontrer le résultat suivant (cf. la section 1.1 pour la définition de $\overline{\mathbb{C}}$).

Théorème 17. *Soient $R_1 := 2\mathbb{Z}_{>0}\alpha_1 - 2\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$ et $R_2 := -2\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 + 2\mathbb{Z}_{>0}\alpha_2$. On note s_1, s_2 les réflexions simples s_{α_1} et s_{α_2} , $w_0 := s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ et $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$.*

Pour tout $\lambda \in 2\mathbb{Z}\omega_1 + 2\mathbb{Z}\omega_2$, on a

$$(i) \quad H^0(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \in \lambda - 2\mathbb{Z} \geq 0 \\ \mu \text{ dominant}}}^{\alpha_1 - 2\mathbb{Z} \geq 0 \alpha_2} L(\mu),$$

$$(ii) \quad H^5(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \in w_0 \lambda - 2\mathbb{Z} \geq 2 \\ \mu \text{ dominant}}}^{\alpha_1 - 2\mathbb{Z} \geq 2 \alpha_2} L(\mu).$$

$$(ii) \quad H^1(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = H^4(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = 0.$$

$$(iii) \quad H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \text{ dominant} \\ \mu + \rho \in s_1(\lambda + \rho + R_1) \setminus (s_2 s_1)(\lambda + \rho + R_1)}} L(\mu) \oplus \bigoplus_{\substack{\mu \text{ dominant} \\ \mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2) \setminus (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2)}} L(\mu),$$

$$H^3(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \text{ dominant} \\ \mu + \rho \in (s_2 s_1)(\lambda + \rho + R_1) \setminus s_1(\lambda + \rho + R_1)}} L(\mu) \oplus \bigoplus_{\substack{\mu \text{ dominant} \\ \mu + \rho \in (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2) \setminus s_2(\lambda + \rho + R_2)}} L(\mu).$$

Démonstration. On va montrer (iii). On traite le cas de $H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$:

Nous verrons, d'abord, que si $\mu + \rho \in s_1(\lambda + \rho + R_1) \setminus (s_2 s_1)(\lambda + \rho + R_1)$ ou si $\mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2) \setminus (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2)$ alors $L(\mu)$ apparaît dans la décomposition de $H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ avec la multiplicité 1 et, ensuite, que $[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0$ dans tous les autres cas.

Remarquons que si $\mu + \rho \in s_1(\lambda + \rho + R_1)$, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{aligned} \mu &= s_1(\lambda + \rho + 2m\alpha_1 + 2n\alpha_2) - \rho \\ &= \lambda - (2m - 2n + \langle \lambda, \alpha_1^\vee \rangle + 1)\alpha_1 + 2n\alpha_2. \end{aligned}$$

Or, $\lambda \in \text{pic}(\overline{\mathcal{C}}) = 2\mathbb{Z}\omega_1 + 2\mathbb{Z}\omega_2$ donc $\langle \lambda, \alpha_1^\vee \rangle \in 2\mathbb{Z}$. Donc $\mu \in \lambda + (2\mathbb{Z} + 1)\alpha_1 + 2\mathbb{Z}\alpha_2$.

De même, si $\mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2)$ ou si $\mu + \rho \in (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2)$, on a $\mu \in \lambda + 2\mathbb{Z}\alpha_1 + (2\mathbb{Z} + 1)\alpha_2$.

En particulier, on a :

$$\begin{aligned} s_1(\lambda + \rho + R_1) \cap s_2(\lambda + \rho + R_2) \\ = s_1(\lambda + \rho + R_1) \cap (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2) = \emptyset. \end{aligned} \tag{23}$$

1ère étape. Si $\mu + \rho \in s_1(\lambda + \rho + R_1) \setminus (s_2 s_1)(\lambda + \rho + R_2)$, alors $[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 1$.

On se donne une décomposition de $\overline{\mathcal{C}}$ en cellules de Bialynicki-Birula :

$$\overline{\mathcal{C}} = \bigsqcup_{x \in \overline{\mathcal{C}}^T} \overline{\mathcal{C}}_x^+.$$

On a une suite spectrale convergente : $E_1^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ pour une certaine numérotation x_1, x_2, \dots des points fixes $x \in \overline{\mathcal{C}}^T$ et où $E_1^{p,q} = H_{\overline{\mathcal{C}}_x^+}^{p+q}(\mathcal{L}_\lambda)$. Soit p_0

tel que $x_{p_0} = s_1 \mathbf{z}$. Comme $X_{s_1}^+ \subseteq D_{\alpha_1}$ et $X_{s_1}^+ \not\subseteq D_{\alpha_2}$, on a d'après [T1, prop. 4.6 et théorème 4.4] :

$$[E_1^{p_0, 2-p_0} : L(\mu)] = [H_{X_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 1.$$

En revanche, si $p \neq p_0$, on a pour tout $r \geq 0$:

$$[E_r^{p,2-p} : L(\mu)] \leq [E_1^{p,2-p} : L(\mu)] = 0.$$

En effet, sinon, d'une part on aurait d'après le théorème 7 x_p de la forme $x_p = w\mathbf{z}$ pour un certain $w \in W$ tel que $\text{codim}_{\overline{\mathcal{C}}} \overline{\mathcal{C}}_w^+ = 2$ et donc $x_p = s_2\mathbf{z}$ (car $x_p \neq x_{p_0} = s_1\mathbf{z}$). Mais d'autre part, on aurait aussi $\mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2)$ ce qui est impossible d'après (*).

On en déduit que $[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = [E_\infty^{p_0,2-p_0} : L(\mu)]$.

Or, si $r \geq 1$,

$$E_{r+1}^{p_0,2-p_0} = \frac{\ker(E_r^{p_0,2-p_0} \rightarrow E_r^{p_0+r,3-p_0-r})}{\text{Im}(E_r^{p_0-r,1-p_0+r} \rightarrow E_r^{p_0,2-p_0})}.$$

Mais d'une part :

$$[E_r^{p_0-r,1-p_0-r} : L(\mu)] \leq [E_1^{p_0-r,1-p_0-r} : L(\mu)] = [H_{\overline{\mathcal{C}}_{x_{p_0-r}}^+}^1(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0$$

car si la cellule $\overline{\mathcal{C}}_{x_{p_0-r}}^+$ est de codimension 1, $x_{p_0-r} \notin F$, l'unique G -orbite fermée de $\overline{\mathcal{C}}$ (cf. la section 1.1, (v)) ; d'autre part, on a aussi :

$$[E_r^{p_0+r,3-p_0+r} : L(\mu)] \leq [E_1^{p_0+r,3-p_0+r} : L(\mu)] = [H_{\overline{\mathcal{C}}_{x_{p_0+r}}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0$$

car si x_{p_0+r} est de la forme $x_{p_0+r} = w\mathbf{z}$ pour un certain $w \in W$, et si la cellule correspondante $\overline{\mathcal{C}}_w^+$ est de codimension $|J_w| + l(w) = 3$, on a $w = s_1s_2$ ou s_2s_1 et $\mu + \rho \notin w(\lambda + \rho + R_w)$ (cf. (23)).

On en déduit que :

$$[E_{r+1}^{p_0,2-p_0} : L(\mu)] = [E_r^{p_0,2-p_0} : L(\mu)]$$

pour tout $r \geq 1$ et donc que :

$$[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = [E_\infty^{p_0,2-p_0} : L(\mu)] = [E_1^{p_0,2-p_0} : L(\mu)] = 1.$$

De la même façon, on montre que si $\mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2) \setminus (s_1s_2)(\lambda + \rho + R_2)$, $[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 1$.

2ème étape. Si, par exemple, $\mu + \rho \in (s_2s_1)(\lambda + \rho + R_1) \cap s_1(\lambda + \rho + R_1)$, alors $[H^2(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0$ (cela peut arriver, e.g. : $\mu := \omega_2$, $\lambda := -14\omega_1 + 8\omega_2$).

Pour le démontrer, on choisit la décomposition cellulaire de Bialynicki-Birula de $\overline{\mathcal{C}}$ donnée par le sous-groupe à un paramètre :

$$\nu : \mathbf{k}^* \rightarrow T, \quad z \mapsto \begin{bmatrix} z^3 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2} \end{bmatrix}.$$

Pour ce sous-groupe à un paramètre, on a : $\bar{\mathcal{C}} = \bigsqcup_{p=0}^{11} \bar{\mathcal{C}}_p^+$ avec en particulier, $\bar{\mathcal{C}}_5^+ = \bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+$ et $\bar{\mathcal{C}}_6^+ = \bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^+$.

On sait déjà que :

$$[H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \leq \sum_{p=0}^{11} [E_r^{p, 2-p} : L(\mu)]$$

pour tout $r \geq 1$. Or, comme les seuls points fixes $x_p \in \bar{\mathcal{C}}^T$ tels que $x_p \in F$ et $\bar{\mathcal{C}}_p^+$ soit de codimension 2 dans $\bar{\mathcal{C}}$ sont $s_1 \mathbf{z}$ et $s_2 \mathbf{z}$ et comme $\mu + \rho \notin s_2(\lambda + \rho + R_2)$ (cf. (23)), on a forcément :

$$[E_r^{p, 2-p} : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow [H_{\bar{\mathcal{C}}_p^+}^2(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow x_p = s_1 \mathbf{z} \Rightarrow p = 5.$$

Ainsi, pour tout $r \geq 1$, $[H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \leq [E_r^{5, -3} : L(\mu)]$.

On va montrer que $[E_2^{5, -3} : L(\mu)] = 0$.

Puisque

$$E_2^{5, -3} = \frac{\ker(E_1^{5, -3} \xrightarrow{d_1^{5, -3}} E_1^{6, -3})}{\text{Im}(E_1^{4, -3} \xrightarrow{d_1^{4, -3}} E_1^{5, -3})},$$

il suffit de vérifier que $[\ker d_1^{5, -3} : L(\mu)] = 0$.

Or, $d_1^{5, -3}$ est le morphisme

$$d_1^{5, -3} : H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda)$$

induit par la décomposition $\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+ = \bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^+ \sqcup \bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+ \setminus \bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^+$ où $\bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^+$ est fermé dans $\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+$.

Pour tout \mathfrak{g} -module M et tout caractère central $\chi : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{k}$ (où $Z(\mathfrak{g})$ est le centre de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g}) rappelons que :

$$M_\chi := \{m \in M : \exists n > 0, (\ker \chi)^n m = 0\}$$

est l'espace-propre généralisé associé à χ .

On note encore χ_μ le caractère central par lequel $Z(\mathfrak{g})$ agit sur $L(\mu)$ et :

$$M[\mu] := \{m \in M_{\chi_\mu} : \forall t \in T, t.m = \mu(t)m\}$$

le T -espace-propre de M_{χ_μ} de poids μ .

On va utiliser que $[M : L(\mu)] = \dim_{\mathbf{k}} M[\mu]$ pour tout \mathfrak{g} - \widehat{B} -module.

On sait que $H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda)[\mu]$ est de dimension 1 autrement dit :

$$H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda)[\mu] = \mathbf{k}f_\mu$$

pour un certain élément f_μ non nul de $H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda)$.

On a donc $\ker(d_1^{5, -3})[\mu] = \mathbf{k}f_\mu$ ou 0.

Or, on peut déterminer f_μ et montrer que $d_1^{5, -3}(f_\mu) \neq 0$ (cf. l'annexe).

On a donc $\ker(d_1^{5, -3})[\mu] = 0$ d'où : $[\ker d_1^{5, -3} : L(\mu)] = 0$.

De même, si $\mu + \rho \in s_2(\lambda + \rho + R_2) \cap (s_1 s_2)(\lambda + \rho + R_2)$, on peut montrer que $[H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0$.

Enfin, si $\mu + \rho \notin s_1(\lambda + \rho + R_1) \cup s_2(\lambda + \rho + R_2)$, on a

$$[H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] \leq [H^2_{\mathbb{C}^+_{s_1}}(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] + [H^2_{\mathbb{C}^+_{s_2}}(\mathcal{L}_\lambda) : L(\mu)] = 0.$$

Le cas de $H^3(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ se démontre avec les mêmes arguments. \square

Voici une conséquence du théorème 17.

Corollaire 17.1. *Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ et $\lambda := 2\lambda_1\omega_1 + 2\lambda_2\omega_2 \in \text{pic}(\bar{\mathcal{C}})$. On a*

$$\begin{aligned}
 H^0(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0, \end{cases} \\
 H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3 \leq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_2 + 3 \leq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 \geq 0, \end{cases} \\
 H^3(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3 \leq 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_2 - 1 \geq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3 \leq 0, \end{cases} \\
 H^5(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6 \leq 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6 \leq 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Cf. la figure 5.) Par exemple, si $\lambda = 12\omega_1 - 6\omega_2$, $H^0(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ et $H^5(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ sont non nuls. Mais, pour tout $\lambda \in \text{pic}\bar{\mathcal{C}}$, on a $H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda)$ ou $H^3(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) = 0$.

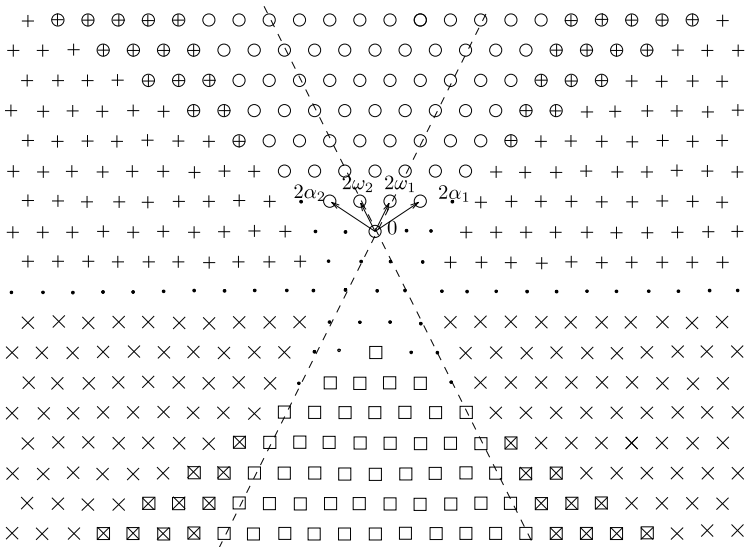


FIGURE 5. Le groupe de Picard de la variété des coniques complètes $\bar{\mathcal{C}}$ (légende : $\circ : \lambda \in \text{pic}\bar{\mathcal{C}}$ tel que $H^0(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$; $+$: $\lambda \in \text{pic}\bar{\mathcal{C}}$ tel que $H^2(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$; \times : $\lambda \in \text{pic}\bar{\mathcal{C}}$ tel que $H^3(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$; \square : $\lambda \in \text{pic}\bar{\mathcal{C}}$ tel que $H^5(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$).

Annexe

Calcul de $\left[\ker \left(H_{\mathbb{C}^{s_1}}^2(\mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H_{\mathbb{C}^{s_2 s_1}}^3(\mathcal{L}_\lambda) \right) : L(\mu) \right]$.

Notons S_3 l'espace des matrices symétriques 3×3 à coefficients dans \mathbf{k} et $\pi : S_3 \setminus \{0\} \times S_3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(S_3) \times \mathbb{P}(S_3)$ la surjection standard.

Si $\lambda = 2\lambda_1\omega_1 + 2\lambda_2\omega_2 \in \text{pic } \overline{\mathbb{C}} (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z})$, alors :

$$\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(\lambda_1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3)}(\lambda_2)|_{\overline{\mathbb{C}}}.$$

Donc, pour tout ouvert V de $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{L}_\lambda(V)$ est l'espace des fonctions f régulières sur $\pi^{-1}V$ telles que :

$$\forall s, s' \in \mathbf{k}, \forall Q, Q' \in S_3, \quad f(sQ, s'Q') = s^{\lambda_1} s'^{\lambda_2} f(Q, Q').$$

Nous allons introduire certaines fonctions rationnelles X_i, Y_i sur $\overline{\mathbb{C}}$. Pour cela rappelons la description de la cellule ouverte de $\overline{\mathbb{C}}$ associée au sous-groupe à un paramètre :

$$\nu : \mathbf{k}^* \rightarrow T, \quad z \mapsto \begin{bmatrix} z^3 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2} \end{bmatrix}.$$

Pour tout $z \in \mathbf{k}^*$ et pour tout $([Q], [Q']) \in \overline{\mathbb{C}}$, on a

$$\begin{aligned} & \nu(z) \cdot ([Q], [Q']) \\ &= \left(\begin{bmatrix} z^{-6}Q_{1,1} & z^{-2}Q_{1,2} & z^{-1}Q_{1,3} \\ z^{-2}Q_{1,2} & z^2Q_{2,2} & z^3Q_{2,3} \\ z^{-1}Q_{1,3} & z^3Q_{2,3} & z^4Q_{3,3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z^6Q'_{1,1} & z^2Q'_{1,2} & zQ'_{1,3} \\ z^2Q'_{1,2} & z^{-2}Q'_{2,2} & z^{-3}Q'_{2,3} \\ zQ'_{1,3} & z^{-3}Q'_{2,3} & z^{-4}Q'_{3,3} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\mathbf{z} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

la cellule ouverte $\overline{\mathbb{C}}_0^+$ est définie par :

$$\overline{\mathbb{C}}_0^+ = \{([Q], [Q']) \in \overline{\mathbb{C}} : Q_{1,1} \neq 0, Q'_{3,3} \neq 0\}.$$

Cette cellule ouverte est isomorphe à l'espace affine \mathbb{A}^5 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}^5 \simeq \overline{\mathbb{C}}_0^+, \\ & (x_i)_{1 \leq i \leq 5} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 x_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Pour chaque $1 \leq i \leq 5$, on définit alors X_i (resp. Y_i) comme une fonction régulière sur l'ouvert $s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+$ (resp. $s_2s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+$) par :

$$X_i : s_1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_4x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4x_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) \mapsto x_i$$

(resp.

$$Y_i : (s_2s_1) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_3 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & y_4y_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_4y_5 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) \mapsto y_i).$$

Or, comme on a :

$$s_1\mathbf{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$s_2s_1\mathbf{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

les cellules $\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+$ et $\overline{\mathcal{C}}_{s_2s_1}^+$ sont données par

$$\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+ = \{([Q], [Q']) \in \overline{\mathcal{C}} : Q_{1,1} = Q_{1,2} = Q_{1,3} = 0, Q_{2,2} \neq 0, Q'_{3,3} \neq 0\},$$

$$\overline{\mathcal{C}}_{s_2s_1}^+ = \left\{ ([Q], [Q']) \in \overline{\mathcal{C}} : \begin{array}{l} Q_{1,1} = Q_{1,2} = Q_{1,3} = Q_{2,2} = Q_{2,3} = 0, \\ Q_{3,3} \neq 0, Q'_{2,3} = Q'_{3,3} = 0, Q'_{2,2} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

On peut aussi vérifier que :

$$\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+ = \{([Q], [Q']) \in s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ : X_1 = X_4 = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{C}}_{s_2s_1}^+ = \{([Q], [Q']) \in s_2s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ : Y_1 = Y_3 = Y_4 = 0\}.$$

Comme la cellule $\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+$ est fermé dans l'ouvert $s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+$ de X , on a

$$H_{\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda) \simeq H_{\overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda|_{s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+})$$

$$\simeq H^1(s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \setminus \overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+, \mathcal{L}_\lambda).$$

Or, l'ouvert $s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \setminus \overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+$ est recouvert par deux ouverts affines :

$$s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \setminus \overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+ = (s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_1 \neq 0)) \cup (s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_4 \neq 0))$$

donc en utilisant la cohomologie de Čech on trouve :

$$H^1(s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \setminus \overline{\mathcal{C}}_{s_1}^+, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \frac{\mathcal{L}_\lambda(s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_1 \neq 0) \cap (X_4 \neq 0))}{\mathcal{L}_\lambda(s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_1 \neq 0)) + \mathcal{L}_\lambda(s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_4 \neq 0))}.$$

En notant, pour $1 \leq i \leq 5$, $x_i := X_i \circ \pi$, la fonction régulière sur $\pi^{-1}s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+$, et, pour $1 \leq i, j \leq 3$, $q_{i,j}$ (resp. $q'_{i,j}$) la fonction régulière sur $S_3 \times S_3$:

$$q_{i,j} : (Q, Q') \mapsto Q_{i,j} \quad (\text{resp. } q'_{i,j} : (Q, Q') \mapsto Q'_{i,j}),$$

on trouve donc :

$$\begin{aligned} H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda) &\simeq \frac{\bigoplus_{\substack{n_2, n_3, n_5 \geq 0 \\ n_1, n_4 \in \mathbb{Z}}} \mathbf{k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}x_5^{n_5}}{\bigoplus_{\substack{n_2, n_3, n_4, n_5 \geq 0 \\ n_1 \in \mathbb{Z}}} \mathbf{k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}x_5^{n_5} + \bigoplus_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_5 \geq 0 \\ n_4 \in \mathbb{Z}}} \mathbf{k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}x_5^{n_5}} \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{n_2, n_3, n_5 \geq 0 \\ n_1, n_4 > 0}} \mathbf{k} \frac{x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_5^{n_5}}{x_1^{n_1}x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q_{3,3}^{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Or, on a une réunion décroissante :

$$H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda) = \bigcup_{n \geq 0} H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}}(-nD_2))$$

(cf. [T0, lemme IV.3.3]). Soient $M, N \geq 0$ deux entiers tels que :

$$\mu + \rho = s_1(\lambda + \rho + 2(M+1)\alpha_1 - 2N\alpha_2). \tag{24}$$

On a alors :

$$H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}}(-nD_2))[\mu] = H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda)[\mu] = \mathbf{k}f_\mu$$

si $n \leq N$ et $H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}}(-nD_2))[\mu] = 0$ si $n > N$.

On en déduit que :

$$f_\mu \in H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}}(-ND_2)) \setminus H_{s_1}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}}(-(N+1)D_2)).$$

Comme $D_2 \cap s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ = s_1\overline{\mathcal{C}}_0^+ \cap (X_5 = 0)$, cela signifie que :

$$f_\mu \in \bigoplus_{\substack{n_2, n_3 \geq 0 \\ n_5 \geq N \\ n_1, n_4 > 0}} \mathbf{k} \frac{x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_5^{n_5}}{x_1^{n_1}x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q_{3,3}^{\lambda_2} \setminus \bigoplus_{\substack{n_2, n_3 \geq 0 \\ n_5 \geq N+1 \\ n_1, n_4 > 0}} \mathbf{k} \frac{x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_5^{n_5}}{x_1^{n_1}x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q_{3,3}^{\lambda_2}.$$

Or, les fonctions $x_i, 1 \leq i \leq 5, q_{2,2}, q'_{3,3}$ sont des T -vecteurs propres de poids respectifs :

$$s_1(-\alpha_1), s_1(-\alpha_2), s_1(-\alpha_1 - \alpha_2), s_1(-2\alpha_1), s_1(-2\alpha_2), s_1(2\omega_1), s_1(2\omega_2).$$

Il s'ensuit que, pour $n_1, n_4 > 0, n_2, n_3 \geq 0$ et $n_5 \geq N$, le monôme

$$\frac{x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_5^{n_5}}{x_1^{n_1} x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q'_{3,3}^{\lambda_2}$$

est de T -poids μ si et seulement si :

$$\begin{aligned} s_1(\lambda + (n_1 + 2n_4 - n_3)\alpha_1 - (2n_5 + n_2 + n_3)\alpha_2) &= \mu \\ \Leftrightarrow \lambda + (n_1 + 2n_4 - n_3)\alpha_1 - (2n_5 + n_2 + n_3)\alpha_2 &= s_1\mu \\ \Leftrightarrow \lambda + (n_1 + 2n_4 - n_3)\alpha_1 - (2n_5 + n_2 + n_3)\alpha_2 &= \lambda + (2M + 3)\alpha_1 - 2N\alpha_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 + 2n_4 - n_3 = 2M + 3, \\ 2(n_5 - N) + n_2 + n_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = 2(M - n_4) + 3, \\ n_5 = N, n_2 = n_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f_\mu \in \bigoplus_{n_4=1}^{M+1} \mathbf{k} \frac{x_5^N}{x_1^{2(M-n_4)+3} x_4^{n_4}}.$$

De même, en utilisant la filtration croissante :

$$H_{\mathbb{C}_{s_1}}^2(\mathcal{L}_\lambda) = \bigcup_{m \geq 0} \ker \left(H_{\mathbb{C}_{s_1}}^2(\mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H_{\mathbb{C}_{s_1}}^2(\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(mD_1)) \right)$$

on trouve aussi que :

$$f_\mu \in \bigoplus_{\substack{n_2, n_3, n_5 \geq 0 \\ n_1 > 0 \\ 1 \leq n_4 \leq M+1}} \frac{x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_5^{n_5}}{x_1^{n_1} x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q'_{3,3}^{\lambda_2} \setminus \bigoplus_{\substack{n_2, n_3, n_5 \geq 0 \\ n_1 > 0 \\ 1 \leq n_4 \leq M}} \frac{x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_5^{n_5}}{x_1^{n_1} x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q'_{3,3}^{\lambda_2}.$$

Finalement, à multiplication par un scalaire non nul près, f_μ est de la forme :

$$\begin{aligned} f_\mu &= \frac{x_5^N}{x_1 x_4^{M+1}} q_{2,2}^{\lambda_1} q'_{3,3}^{\lambda_2} \\ &+ \text{une combinaison linéaire des } \frac{x_5^N}{x_1^{2(M-n_4)+3} x_4^{n_4}} q_{2,2}^{\lambda_1} q'_{3,3}^{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{25}$$

où $1 \leq n_4 \leq M$.

On peut montrer de la même façon que si M', N' sont les entiers ≥ 0 tels que :

$$\mu + \rho = (s_2s_1)(\lambda + \rho + 2(M' + 1)\alpha_1 - 2N'\alpha_2) \tag{26}$$

et si on pose $y_i := Y_i \circ \pi$, fonctions régulières sur $\pi^{-1}(\overline{\mathbb{C}}_0^+)$, alors on a :

$$H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_2s_1}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda)[\mu] = \mathbf{k}g_\mu$$

avec g_μ de la forme :

$$g_\mu = \frac{y_5^{N'}}{y_1y_3y_4^{M'+1}}q_{3,3}^{\lambda_1}q'_{2,2}^{\lambda_2} + \text{une combinaison linéaire des } \frac{y_2^{n_2}y_5^{n_5}}{y_1^{n_1}y_3^{n_3}y_4^{n_4}}q_{3,3}^{\lambda_1}q'_{2,2}^{\lambda_2},$$

où les n_i sont des entiers vérifiant :

$$n_1 > 0, n_2 \geq 0, n_3 > 0, 0 < n_4 \leq M' + 1, n_5 \geq N' \text{ et } n_4 \leq M' \text{ ou } n_5 > N'.$$

Soient $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ les entiers tels que : $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$.

Remarquons que les relations (24) et (26) entraînent que

$$M' = M - \frac{\mu_2 + 1}{2} \quad \text{et} \quad N' = N + \frac{\mu_2 + 1}{2} \tag{27}$$

(on sait déjà que μ_2 est impair).

Pour déterminer $d_1^{5,-3}(f_\mu) \in H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_2s_1}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda)$, remarquons que la restriction :

$$\mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{L}_\lambda|_{s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0}$$

induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_1}^+}^2(\mathcal{L}_\lambda) & \xrightarrow{d_1^{5,-3}} & H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_2s_1}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda) \\ \downarrow & \nearrow d' & \\ H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_1}^+ \cap s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda) & & \end{array}$$

Il est plus facile de décrire le morphisme d' que de décrire directement $d_1^{5,-3}$; on a en effet :

$$\overline{\mathbb{C}}_{s_1}^+ \cap s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 = (s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 \cap (Y_3 \neq 0)) \cap (Y_2 = Y_4 = 0)$$

donc :

$$\begin{aligned} H_{\overline{\mathbb{C}}_{s_1}^+ \cap s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda) &\simeq H^1(s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 \cap (Y_3 \neq 0) \setminus (Y_2 = Y_4 = 0), \mathcal{L}_\lambda) \\ &\simeq \frac{\mathcal{L}_\lambda(s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 \cap (Y_1Y_3Y_4 \neq 0))}{\mathcal{L}_\lambda(s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 \cap (Y_1Y_3 \neq 0)) + \mathcal{L}_\lambda(s_2s_1\overline{\mathbb{C}}_0 \cap (Y_3Y_4 \neq 0))} \end{aligned}$$

et le morphisme d' est donné par :

$$d' : H_{\mathbb{C}_{s_1}^+ \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H_{\mathbb{C}_{s_2 s_1}^+}^3(\mathcal{L}_\lambda)$$

$$\forall n_2, n_5 \geq 0, n_1, n_4 > 0, n_3 \in \mathbb{Z}, \frac{y_2^{n_2} y_5^{n_5}}{y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_4^{n_4}} \mapsto \begin{cases} \frac{y_2^{n_2} y_5^{n_5}}{y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_4^{n_4}} & \text{si } n_1, n_4 < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, décrivons l'image de f_μ dans $H_{\mathbb{C}_{s_1}^+ \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda)$. Pour cela, on exprime les x_i en fonction des y_i dans le corps des fonctions rationnelles sur $S_3 \times S_3$:

$$x_1 = \frac{y_1 y_3 + O(y_2)}{y_3^2 + y_4 y_5 + O(y_2)},$$

$$x_2 = \frac{y_1 y_5 + O(y_2)}{y_3^2 + y_4 y_5 + y_1^2 y_5},$$

$$x_3 = -\frac{y_3}{y_3^2 + y_4 y_5 + y_1^2 y_5},$$

$$x_4 = \frac{y_4 (y_3^2 + y_4 y_5 + y_1^2 y_5)}{(y_3^2 + y_4 y_5)^2 + O(y_2)},$$

$$x_5 = \frac{y_5 (y_3^2 + y_4 y_5) + O(y_2)}{(y_3^2 + y_4 y_5 + y_1^2 y_5)^2}$$

(où la notation « $O(y_2)$ » signifie « $y_2 \times$ un polynôme en les y_i »); ces relations proviennent de l'égalité «matricielle» :

$$s_1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 x_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= (s_2 s_1) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_3 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & y_4 y_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_4 y_5 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right)$$

sur $s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0$.

D'un autre côté, comme on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+ \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 &= (s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \cap (X_1 = X_4 = 0) \\ &= (s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (Y_3 \neq 0)) \cap (Y_1 = Y_4 = 0) \\ &= (s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \cap (X_4 = X_1 Y_1 = 0), \end{aligned}$$

on a les isomorphismes suivants (de \mathfrak{g} -modules) :

$$\begin{aligned}
 H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+ \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda) &\simeq H^1((s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \setminus (X_1 = X_4 = 0), \mathcal{L}_\lambda) \\
 &\simeq H^1((s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (Y_3 \neq 0)) \setminus (Y_1 = Y_4 = 0), \mathcal{L}_\lambda) \\
 &\simeq H^1((s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \setminus (X_4 = X_1 Y_1 = 0), \mathcal{L}_\lambda) \\
 &\simeq \frac{\mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (X_1 X_4 \neq 0))}{\mathcal{L}_\lambda((s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \cap (X_1 \neq 0)) + \mathcal{L}_\lambda((s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0) \cap (X_4 \neq 0))} \\
 &\simeq \frac{\mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (Y_1 Y_3 Y_4 \neq 0))}{\mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (Y_1 Y_3 \neq 0)) + \mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (Y_3 Y_4 \neq 0))} \\
 &\simeq \frac{\mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (X_1 X_4 Y_1 \neq 0))}{\mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (X_1 Y_1 \neq 0)) + \mathcal{L}_\lambda(s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap s_1 \bar{\mathcal{C}}_0 \cap (X_4 \neq 0))}.
 \end{aligned}$$

En utilisant ces isomorphismes, en remplaçant dans la formule (25) de f_μ les x_i par leur expression en les y_i , et en utilisant les relations (27), on trouve que l'image de f_μ dans $H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_1}^+ \cap s_2 s_1 \bar{\mathcal{C}}_0}^2(\mathcal{L}_\lambda)$ est de la forme :

$$\frac{y_5^{N'}}{y_1 y_3 y_4^{M'+1}} q_{3,3}^{\lambda_1} q'_{2,2}^{\lambda_2} + \text{une combinaison linéaire de } \frac{y_2^{n_2} y_5^{n_5}}{y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_4^{n_4}} q_{3,3}^{\lambda_1} q'_{2,2}^{\lambda_2},$$

où $n_5 > N'$ ou $n_2 > 0$.

En conséquence :

$$d_1^{5,-3}(f_\mu) \in H_{\bar{\mathcal{C}}_{s_2 s_1}^3}^3(\mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{n_2, n_5 \geq 0 \\ n_1, n_3, n_4 > 0}} \mathbf{k} \frac{y_2^{n_2} y_5^{n_5}}{y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_4^{n_4}} q_{3,3}^{\lambda_1} q'_{2,2}^{\lambda_2}$$

a un coefficient 1 devant $(y_5^{N'} / y_1 y_3 y_4^{M'+1}) q_{3,3}^{\lambda_1} q'_{2,2}^{\lambda_2}$.

Ainsi : $d_1^{5,-3}(f_\mu) \neq 0$ (on a même $d_1^{5,-3}(f_\mu) = g_\mu$) et donc :

$$[\ker d_1^{5,-3} : L(\mu)] = 0.$$

Références

[BGG] I. N. Bernšteïn, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, *Differential operators on the base affine space and a study of \mathfrak{g} -modules* in: *Lie Groups and their Representations*, Proc. Summer School, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1971, Halsted, New York, 1975, pp. 21–64.

[BB73] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 480–497.

[BB76] A. Bialynicki-Birula, *Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. **24** (1976), 667–674.

- [ChMa] R. Chirivi, A. Maffei, *The ring of sections of a complete symmetric variety*, J. Algebra **261** (2003), no. 2, 310–326.
- [DCP] C. De Concini, C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, in: *Invariant Theory*, Proc. 1st 1982 Sess. C.I.M.E. (Montecatini, Italie), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 996, Springer-Verlag, New York, 1983, pp. 1–44.
- [D] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthiers-Villars, Paris, 1974. Russian transl: Ж. Диксмье, *Универсальные обёртывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [K] G. Kempf, *The Grothendieck–Cousin complex of an induced representation*, Adv. Math. **29** (1978), no. 3, 310–396.
- [L] O. Loos, *Symmetric Spaces II*, W. A. Benjamin, New York, 1969. Russian transl: О. Лоос, *Симметрические пространства*, Наука, М., 1985.
- [St] R. Steinberg, *Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques*, in: *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques de Bruxelles*, Gauthiers-Villars, Paris, 1962, pp. 113–127.
- [T0] A. Tchoudjem, *Représentations d’algèbres de Lie dans des groupes de cohomologie à support*, Thèse de doctorat, Grenoble 2002 (disponible à <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/51/38/PS/tel-00002269.ps>).
- [T1] A. Tchoudjem, *Cohomologie des fibrés en droites sur les compactifications des groupes réductifs*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 3, 415–448.
- [T2] A. Tchoudjem, *Cohomologie des fibrés en droites sur les variétés magnifiques de rang minimal*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 2, 171–214.