Université Claude Bernard — UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** — 2020-2021

**Correction du Contrôle Continu du Lundi 15 mars 2021**

**Durée : 1 heure.**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.
Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet.
Le sujet contient 2 exercices.

---

**Première partie**
(à rendre sur la première copie)

**Exercice 1 : [10 points]**
L'objectif de cet exercice est de trouver l'unique solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = 1 \qquad (E)$$

avec conditions initiales $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

1. Soit $f$ solution de $(E)$. Donner une équation satisfaite par sa transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$. On pourra utiliser le formulaire au dos de cette page.
2. Déterminer trois réels $a, b, c$ tels qu'on ait l'identité

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2}\,.$$

3. Déterminer l'unique solution $f$ de $(E)$ en utilisant les deux questions précédentes.

**Correction de l'exercice 1**

**1.** Soit une solution $f$ de (E) qui possède une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Par linéarité de la transformation de Laplace, la fonction $\mathcal{L}(f)$ satisfait l'équation

$$\mathcal{L}(f'') + 3\mathcal{L}(f') + 2\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1).$$

La fonction constante égale à 1 est de la forme $t \to e^{at}t^n$, avec $a = 0$ et $n = 0$. Donc par la formule (12) du formulaire

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{0!}{(s-0)^1} = \frac{1}{s}, \quad \text{pour } s > 0.$$

Par ailleurs, pour toute fonction $g$ de type exponentiel $a$ :

$$\mathcal{L}(g')(s) = s\mathcal{L}(g)(s) - f(0), \quad \text{pour } s > a,$$

et donc

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0),$$

si bien que $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation

$$s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0) + 3s\mathcal{L}(f)(s) - 3f(0) + 2\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, \qquad \text{pour } s > 0.$$

En tenant compte des conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$ données dans l'énoncé, on a donc

$$(s^2 + 3s + 2)\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{pour } s > 0.$$

On observe que $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$ est strictement positif pour $s > 0$. Donc on peut diviser par $s^2 + 3s + 2$ pour $s > 0$, et finalement

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

**2.** On cherche la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $s \to \dfrac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$ pour $s > 0$, c'est-à-dire $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 1} + \frac{c}{s + 2}. \tag{1}$$

On multiplie par $s$ :

$$\frac{1}{(s + 1)(s + 2)} = a + \frac{bs}{s + 1} + \frac{cs}{s + 2},$$

puis on évalue en $s = 0$, pour trouver:

$$\frac{1}{2} = a.$$

De même on multiplie (1) par $s + 1$ puis on évalue en $s = -1$ pour trouver

$$-1 = b,$$

et on multiplie (1) par $s + 2$ puis on évalue en $s = -2$ pour trouver

$$\frac{1}{2} = c$$

On peut vérifier partiellement les calculs précédents en multipliant (1) par $s$ des deux côtés puis en prenant la limite $s \to +\infty$. On obtient ainsi

$$0 = a + b + c,$$

condition qui est satisfaite quand $a = 1/2$, $b = -1$ et $c = 1/2$.

**3.** Avec les questions précédentes, on a donc

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2(s + 2)}. \tag{2}$$

En utilisant à nouveau la formule (12), on voit que

$$\frac{1}{s + 1} = \mathcal{L}(e^{-t})(s), \quad \frac{1}{s + 2} = \mathcal{L}(e^{-2t})(s).$$

Donc avec (2), on a

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(e^{-t})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-2t})(s).$$

Par linéarité de Laplace, on a donc

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2}(e^{-2t} + 1) - e^{-t}\Big),$$

et par injectivité de Laplace on obtient finalement

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + 1) - e^{-t}.$$

Vérification: on a bien $f(0) = f'(0) = 0$. Par ailleurs,

$$f'(t) = -e^{-2t} + e^{-t}, \qquad f''(t) = 2e^{-2t} - e^{-t},$$

et donc

$$\begin{aligned} f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) &= 2e^{-2t} - e^{-t} + 3(-e^{-2t} + e^{-t}) + 2\big(\frac{1}{2}(e^{-2t} + 1) - e^{-t}\big) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Deuxième partie**
(à rendre sur la deuxième copie)

**Exercice 2 : [10 points]**
Soit $F$ la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

pour $x$ réel.

1. Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \leq e^{-t}.$$

2. En déduire que $F$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Justifier que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une expression de $F'(x)$ sous la forme d'une fraction rationnelle.
(Indications : soit on pourra utiliser une transformée de Laplace du formulaire, soit on pourra intégrer une fonction à valeurs complexes, soit on pourra transformer l'intégrale à l'aide d'une technique usuelle.).
5. En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide d'une fonction usuelle.

Correction de l'exercice 2

1. (1 point) Pour $t \geq 1$, on a par décroissance de l'inverse

$$0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{1} = 1.$$

De plus, le sinus vérifie $|\sin(xt)| \leq 1$ pour tout $x$ et $t$, donc en multipliant les inégalités (étant donné la positivité de l'exponentielle):

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| = |\sin(xt)| \frac{1}{t} e^{-t} \leq e^{-t}.$$

2. (2 points) Notons

$$f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$$

la fonction apparaissant dans l'intégrale. Il y a deux problèmes de convergence à examiner, un en 0 et un en $+\infty$, on découpe donc l'intégrale par la relation de Chasles:

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt$$

Convergence en 0: $\sin(xt) \sim_{t\to 0} xt$, donc $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} = x$. Comme une fonction constante est intégrable en 0, le théorème de comparaison donne que $f(x,t)$ est aussi intégrable pour chaque $x$ fixé en $t \to 0$.

Convergence en $+\infty$: Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la question 1 donne la domination $f(x,t) = O_{t\to+\infty}(e^{-t})$. Or cette fonction est une fonction intégrable en $+\infty$ (parmi les références du cours) vérifiant $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, donc par le théorème de comparaison, $f(x,t)$ est aussi intégrable pour chaque $x$ fixé en $t \to +\infty$.

3. (3.5 points) On applique le théorème de dérivation successive des intégrales à paramètre. D'abord $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ comme composée, produit et quotient à dénominateur non nul de polynômes (vu la région $t > 0$), sinus et exponentielles (qui sont des fonctions de classes $C^1$).Il faut dominer par des fonctions intégrables ne dépendant pas de $x$ les fonctions: $f$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\cos(xt)\frac{1}{t}e^{-t} = \cos(xt)e^{-t}.$$

La domination de la dérivée est facile, on borne juste le cosinus par 1:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\cos(xt)|e^{-t} \leq e^{-t}.$$

et la fonction $e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (cf 2.).

Pour la domination de $f$, on voit de la question précédente qu'on a besoin en 0 d'une comparaison du type $|\sin(xt)| \leq xt$ qui dépend de $x$. On se restreint donc à $x \in ]-M,M[$ pour appliquer le théorème sur $]-M,M[\times]0,+\infty[$ au lieu de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et on a donc la domination:

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right| \leq |xt|\,\frac{1}{t}e^{-t} = |x|e^{-t} \leq Me^{-t}\,.$$

Ceci est de nouveau une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ qui ne dépend pas de $x$. Le théorème de dérivation successive des intégrales à paramètre indique donc que $F$ est $C^1$ sur $]-M,M[$. Comme ceci est vrai pour tout $M < \infty$ quelconque, $F$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. (2.5 points) La question précédente donne une formule intégrale pour $F'(x)$ sur $]-M,M[$ (pour tout $M$ donc sur $\mathbb{R}$):

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt.$$

Si on note $g_x(t) = \cos(xt)$, on connaît la transformée de Laplace (à partir du formulaire (13) avec $\omega = x, a = 0$, pour $s > 0$):

$$\mathcal{L}(g_x)(s) = \frac{s}{s^2+x^2}, s > 0$$

En appliquant à $s = 1$, on obtient l'intégrale précédente est

$$F'(x) = \mathcal{L}(g_x)(1) = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. (1 point) On sait que $F$ est une primitive de cette fonction $\frac{1}{1+x^2}$ donc $F(x) = \arctan(x) + C$ avec $C$ une constante. En notant que $f(0,t) = 0$, on a $F(0) = 0$ donc cela impose la constante $C = 0$. On obtient donc

$$F(x) = \arctan(x).$$

**Formulaire pour le Contrôle Continu 1**

**La transformée de Laplace** de $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{C}$ de type exponentiel $a$ est donnée pour $s > a$ par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\,.$$

**Transformées de Laplace usuelles**

| (11) | $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ |
|---|---|---|
| (12) | $e^{at}t^n$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$ |
| (13) | $e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$ | $\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$ |
| (14) | $e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$ |
| (15) | $e^{ta}h(t), a > 0$ | $\mathcal{L}[h](s-a)$ |

**La décomposition en éléments simples complexe** de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $\deg(p) < \deg(q)$ et $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_k)^{m_k}$, est donnée par

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j}\,,$$

où

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i - j)!} \left[ \frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}\,,$$

pour $1 \leq j \leq m_i$ et $1 \leq i \leq k$.

**Décomposition en éléments simples réelle**

Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((s-a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour $s_i, a_i, b_i$ réels, et $Y$ comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j} + sd_{i,j}}{((s-a_i)^2 + b_i^2)^j}.$$

---