Université Claude Bernard
L2 **PCSI**

UE Mathématiques 4
2020-2021

Correction de l'Examen du mercredi 19 mai 2021

Première partie

Exercice 1 :[5 points]

En utilisant la transformée de Laplace, trouver la solution de l'équation différentielle

$$f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = 2e^{-t}\,,$$

(pour $t > 0$) avec conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 1. .
Supposant qu'elle existe, soit $\mathcal{L}[f]$ la transformée de Laplace de la solution cherchée. Par le cours, on a

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) = s\mathcal{L}[f](s) - 1$$

et donc $\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - s$, utilisant les conditions initiales de l'énoncé. Prenant donc la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[f](s) - s - 2 = 2\mathcal{L}[e^{-t}](s) = \frac{2}{s+1}\,,$$

utilisant notamment la formule (12) du formulaire pour $a = -1$ et $n = 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)((s+1)^2+1)} \\
&= \frac{s^2+3s+4}{(s+1)((s+1)^2+1)} \\
&= \frac{2}{s+1} - \frac{s}{(s+1)^2+1} = \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\
&= 2\mathcal{L}[e^{-t}](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) + \mathcal{L}[e^{-t}\sin(t)](s)\,,
\end{aligned}$$

utilisant à nouveau le formulaire (formules (12), (13) et (14), et la décomposition en éléments simples réelle). D'où, par l'unicité de la fonction donnant une transformée de Laplace, on obtient que la solution cherchée est donnée par $f(t) = e^{-t}(2 + \sin(t) - \cos(t))$.

Exercice 2 :[3 points]

1. Calculer la transformée de Fourier de $F(x) = xe^{-2|x|}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p^2}{(p^2+4)^4}dp.$$

   On admettra (sans démonstration ni calcul) la valeur de l'intégrale suivante :
$$\int_{\mathbb{R}} x^2e^{-4|x|}dx = \frac{1}{16}.$$

Correction de l'exercice 2. 1. Utilisant la formule du cours, $\widehat{xf} = i(\widehat{f})'$ si f et xf sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a que $\widehat{F}(p) = i(\widehat{g})'(p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}$, avec g donnée par $g(x) := e^{-2|x|}$. On calcule alors directement

$$\begin{aligned}\widehat{g}(p) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx-2|x|}dx = \int_0^{+\infty} e^{-ipx-2x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ipx+2x}dx \\ &= \left[\frac{e^{-(ip+2)x}}{-(ip+2)}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{(-ip+2)x}}{-ip+2}\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{ip+2} + \frac{1}{-ip+2} = \frac{4}{p^2+4},\end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathbb{R}$. D'où on en déduit $\widehat{F}(p) = i\left(\frac{4}{p^2+4}\right)' = -\frac{8ip}{(p^2+4)^2}$.
2. Par la formule de Fourier-Plancherel ((4) dans le formulaire), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}(p)|^2 dp = 64 \int_{\mathbb{R}} \frac{p^2}{(p^2+4)^4} dp = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2 dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-4|x|} dx = \frac{\pi}{8},$$

d'où l'intégrale cherchée vaut $\frac{\pi}{512}$.

Exercice 3 :[2 points+ Bonus :1 point]

1. Calculer le produit $e^{x^2}\delta_0$ de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ et de δ_0, la distribution de Dirac en 0.

   Rappel de notation du cours : la distribution T_f associée à une fonction f est

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

2. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

   Calculer la dérivée au sens des distributions $(T_f)'$.
3. **[Bonus : 1 point]** En déduire toutes les solutions u de l'équation différentielle

$$u' - 2xu = \delta_0$$

   au sens des distributions.

Correction de l'exercice 3. 1. D'après la définition du cours du produit d'une fonction régulière (ici e^{x^2}) et d'une distribution, on calcule en toute fonction test φ

$$\left(e^{x^2}\delta_0\right)(\varphi) = \delta_0\left(e^{x^2}\varphi\right) = e^0\varphi(0) = \delta_0(\varphi),$$

d'où $e^{x^2}\delta_0 = \delta_0$.
2. Si $H := 1_{[0,+\infty[}$ est la fonction de Heaviside, on a alors que $f(x) = g(x)H(x)$, avec $g(x) = e^{x^2}$. D'où, par la formule de dérivation d'un produit "fonction lisse $\times$ distribution", on a :

$$(T_f)' = g'T_H + g(T_H)' = 2xe^{x^2}H(x) + e^{x^2}\delta_0 = 2xe^{x^2}H(x) + \delta_0,$$

utilisant la question 1 et $(T_H)' = \delta_0$ (cours). Alternativement, on peut calculer directement à partir de la définition d'une dérivée au sens des distribution en une fonction test φ :

$$(T_f)'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H(x)g(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} e^{x^2}\varphi'(x)dx = -\left[e^{x^2}\varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{x^2}\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(0) + T_{Hg'}(\varphi) = (\delta_0 + T_{Hg'})(\varphi)\,,$$

d'où on retrouve bien que $(T_f)'$ est la somme de la distribution régulière associée à $x \mapsto 2xe^{x^2}H(x)$ et de δ_0. Comme troisième méthode possible, on pouvait aussi utiliser la formule des sauts ((9) dans le formulaire).

3. On a donc clairement $(T_{Hg})' - 2xT_{Hg} = \delta_0$ et toute solution distributionnelle de cette équation différentielle est donc de la forme $Hg + \lambda g$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné.

Deuxième partie

Exercice 4 :[3 points]

1. Trouver un équivalent quand $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)^2\,.$$

2. L'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} \left[t\sin(\frac{1}{t}) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)^2 \right] dt$$

est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Correction de l'exercice 4. 1. On utilise les développements limités suivants en 0 (revus en cours) :

$$\sin(x) =_{x\to 0} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\cos(x) =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

En divisant par x et en prenant le carré, on obtient :

$$\frac{\sin(x)}{x} =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 &=_{x\to 0} (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \\ &= (1 - \frac{x^2}{2})^2 + 2(1 - \frac{x^2}{2})o(x^2) + o(x^4) \\ &= (1 - \frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) \\ &= 1 - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

(l'avant dernière ligne on utilise que $x^2 o(x^2) = o(x^4)$ est un $o(x^2)$, puis à la dernière ligne que $x^4 = o(x^2)$ en $x \to 0$.)

Alors qu'on ne peut pas faire la différence d'équivalents, on peut faire celle des développements limités, et on obtient :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)^2 =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) - (1 - x^2 + o(x^2)) = \frac{5x^2}{6} + o(x^2).$$

On rappelle que $f(x) \sim_{x\to 0} g(x)$ est par définition équivalent à $f(x) =_{x\to 0} g(x) + o(g(x))$ ce qui donne l'équivalent voulu :

$$f(x) \sim_{x\to 0} \frac{5x^2}{6}.$$

2. Avec la notation du 1, on doit voir l'intégrabilité de $\int_1^{+\infty} f(\frac{1}{t})dt$. D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en $t = 1$, donc l'intégrale converge en $t = 1$.
   En composant l'équivalent du 1 avec le changement de variable $x = \frac{1}{t} \to_{t\to+\infty} 0^+$, on obtient :
   $$\left|f(\frac{1}{t})\right| \sim_{t\to\infty} \frac{5}{6t^2} = O(\frac{1}{t^2})$$
   Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt < +\infty$ (Intégrale de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$) le critère de comparaison donne que $\int_1^{+\infty} \left|f(\frac{1}{t})\right| dt < +\infty$.
   Ainsi, $\int_1^{+\infty} f(\frac{1}{t})dt$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 5 :**[7 points+ Bonus : 1 point]** Soit g la fraction rationnelle donnée par
$$g(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}.$$

1. (2.5 points) Déterminer soigneusement les pôles de g avec leur ordre.
2. (1.5 points) Déterminer les résidus de g en ces pôles.
3. **[Bonus : 1 point]** Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin
   $$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 - 5e^{it}) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ \frac{1}{2}(e^{-it} - 2) & \text{si} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$
   On a tracé γ ci-dessous (avec $z = x + iy$).
   Est-ce que γ rencontre les pôles de g ? Justifier votre réponse.
   Indication : on pourra décrire les cercles parcourus par γ et calculer les distances des centres aux pôles.
4. (0.5 point) Trouver l'indice de γ en i. Justifier brièvement (sans utiliser de calcul d'intégrale).
5. (2.5 points) Calculer
   $$\int_\gamma g(z)dz.$$

Correction de l'exercice 5. 1. Déterminons les pôles de g avec leur ordre. [1/4 de point par pôle, 0.5 pour absence de pôle pour 1, 1/4 de point par ordre, 0, 5 pour la justification des ordres par les limites ou au moins la non annulation du numérateur !]
g est une fraction rationnelle donc les pôles sont les racines du dénominateur qui n'annulent pas le numérateur.
Le dénominateur se factorise $(z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$. Les racines du dénominateur sont donc $1, -1, i, -i$.
On regarde donc si elles annulent le numérateur et on voit que $1 - 3 + 2 = 0$ donc 1 est aussi racine du numérateur. On factorise donc celui-ci par $(z - 1)$
$$g(z) = \frac{(z - 1)(z - 2)}{(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)} = \frac{z - 2}{(z + 1)(z^2 + 1)}.$$
De plus , $-1 - 2 = -3 \neq 0$, $i - 2 \neq 0$ et $-i - 2 \neq 0$ donc $-1, i, -i$ ne sont pas des racines du nouveau numérateur de g, donc $-1, i, -i$ sont des pôles de g.
On rappelle qu'un pôle z_0 est d'ordre k si $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^k g(z) \neq 0$ existe et est non nulle.
Vérifions que tous les pôles sont d'ordre 1.

En effet, $\lim_{z\to -1}(z+1)g(z) = \frac{z-2}{(z^2+1)}]_{z=-1} = \frac{-3}{2} \neq 0$, on obtient donc que -1 est un pôle d'ordre 1.
Vérifions que i est un pôle d'ordre 1. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i}(z-i)g(z) &= \left[\frac{z-2}{(z+i)(z+1)}\right]_{z=i} \\ &= \frac{i-2}{(2i)(i+1)} = \frac{i-2}{2i-2} = \frac{(i-2)(2i+2)}{-8} = \frac{(-2-4i+2i-4)}{-8} = \frac{i+3}{4} \neq 0.\end{aligned}$$

Enfin $-i$ est aussi un pôle d'ordre 1. En effet, en conjuguant la précédente limite on obtient :

$$\lim_{z\to -i}(z+i)g(z) = \frac{3-i}{4} \neq 0.$$

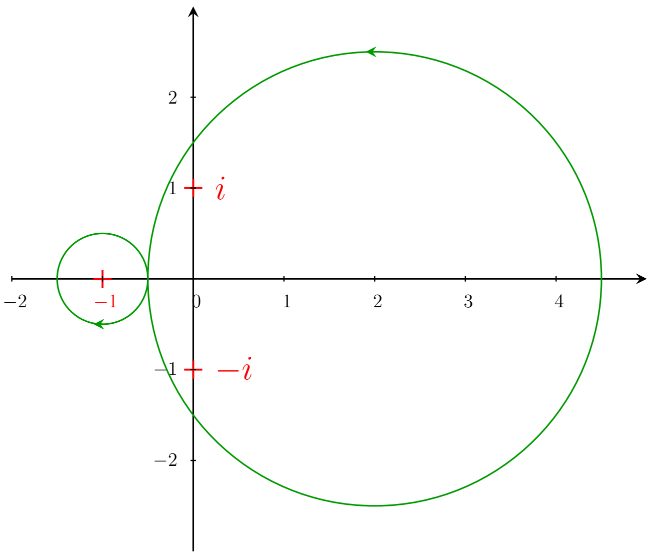
2. Déterminer les résidus de g en ces pôles. [0.5 points par résidu.]
   Méthode 1 :
   On vient déjà de déterminer les résidus de tous les pôles car ils sont d'ordre 1 par les calculs de limites

$$Res(g,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)g(z) = \frac{-3}{2}$$
$$Res(g,i) = \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \frac{3+i}{4},$$
$$Res(g,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)g(z) = \frac{3-i}{4}.$$

3. (1 point seulement avec justification) Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} i(1-e^{it}) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ -i(1-e^{-it}) & \text{si} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

   On a tracé γ ci-dessous (avec $z = x+iy$ et les pôles ajoutés pour répondre à la question).



   Montrons que γ ne rencontre PAS les pôles de g (ce qui est nécessaire pour que l'indice fasse sens et que la formule des résidus s'applique.) γ parcourt d'abord le cercle de centre 2 et de rayon 2.5 puis le cercle de centre -1 et de rayon 0.5.
   En effet, -1 est le centre du cercle de centre -1 et rayon 0.5 qui est la deuxième partie de γ, il est à distance 3 de 2, donc pas dans le cercle de centre 2 et rayon 2.5 qui constitue la première partie de γ.

On raisonne pareil pour $i, -i$. $|\pm i + 1| = \sqrt{2} > 0.5$ donc ils ne sont pas sur le deuxième cercle et $|\pm i - 2| = \sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{5}} < 2.5 = \sqrt{\frac{25}{4}}$ donc ils ne sont pas sur le premier cercle non plus.

4. (0.5 point) L'indice de γ en $\pm i$ est 1 car le premier cercle tourne autour de $\pm i$ en sens positif (contraire aux aiguilles d'une montre) et il est à l'extérieur du deuxième cercle.
5. (1 point pour 2 indices restant, 1.5 pour le reste) Calculons par la formule des résidus

$$\int_\gamma g(z)dz = (2i\pi)\left(Ind_\gamma(i)Res(g,i) + Ind_\gamma(-i)Res(g,-i) + Ind_\gamma(-1)Res(g,-1)\right).$$

Or -1 est à l'extérieur du premier cercle, mais à l'intérieur du deuxième cercle qui tourne en sens négatif autour de lui donc $Ind_\gamma(-1) = -1$. On obtient donc :

$$\int_\gamma g(z)dz = (2i\pi)\left(-\frac{-3}{2} + \frac{3+i}{4} + \frac{3-i}{4}\right) = (2i\pi)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 6i\pi.$$