Exercice 1.

Etudier la limite de f quand $x \to a$ avec

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} - \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + x^3}} \quad \text{et } a = +\infty$$

2.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2\sin(x)} \quad \text{et} \quad a = 0$$

3.

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)} \quad \text{et} \quad a = 0$$

Correction exercice 1.

1.

$$\frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \to 0$$
$$\frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + x^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^3} = 1 \to 1$$

Donc $f(x) \to -1$

2.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2\sin(x)} = \frac{1 + x + o(x) - \big(1 - x + o(x)\big)}{2\big(x + o(x)\big)} = \frac{2x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{2 + o(1)}{2 + o(1)} \to 1$$

3.

$$3x - \frac{3}{2}\sin(2x) = 3x - \frac{3}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) = 3x - 3x - \frac{3}{2} \times \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\sim 4x^3$$

Donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{3x}{4x^3} = \frac{3}{4x^2} \to +\infty$$

Exercice 2.

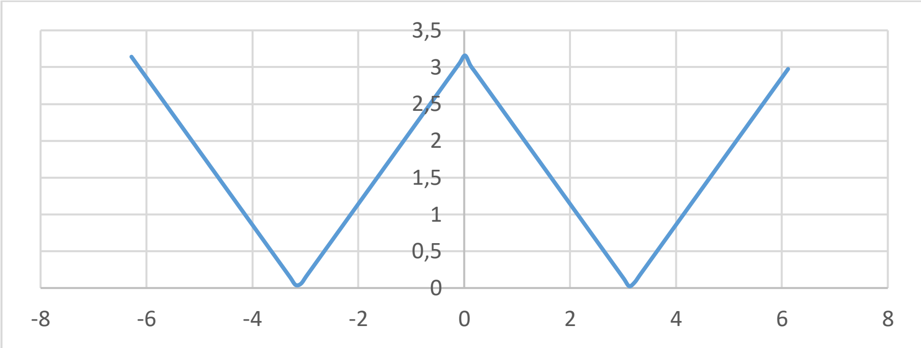
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π périodique définie par

$$f(x) = \pi - x \quad \text{sur} \quad [0, \pi]$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[0,2\pi]$.
2. Montrer que le coefficient a_n de la série de Fourier de f est donné par
$$a_0 = \pi; \;\; \forall n \geq 1 \;\; a_n = 2\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}$$
3. Ecrire la série de Fourier de f dont la somme sera noté S_f.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $S_f(x) = f(x)$?
5. En déduire
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Correction exercice 2.

1.



2. Pour $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}[-(\pi - x)^2]_0^\pi = \pi$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) = -\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) = 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

3. La fonction étant paire $\forall n \geq 0$, $b_n = 0$.

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

4. La fonction étant continue et C^1 par morceaux, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_f(x) = f(x)$

5. Pour $x = 0$

$$f(0) = S_f(0) \Leftrightarrow \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1-1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)}{(2p+1)^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8}$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

Exercice 3.

Soit f la série de fonctions définie pour $x \in]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nx^n}, \text{ sur }]1; +\infty[$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{nx^n} = \frac{1}{n}x^{-n}$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions de terme général f_n sur $]1,+\infty[$.
2. Soit $a > 1$ fixé. Montrer que f est dérivable et que pour tout $x > a$
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$
3. Expliquer pourquoi cette égalité est vraie pour tout $x > 1$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$, $0 < f(x) < \frac{1}{x-1}$.
5. En déduire que pour tout $x > 0$
$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Correction exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 1$
$$0 < \frac{1}{nx^n} \leq \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$
Comme $0 < \frac{1}{x} < 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.
Donc la série de terme général f_n converge simplement.
2. La série des (f_n) converge simplement et les fonctions f_n sont dérivables, et pour tout $x \geq a$,
$$f_n'(x) = -x^{-n-1}$$
Donc
$$|f_n'(x)| \leq a^{-n-1} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{a}\right)^n$$
$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)_n$ est le terme générale d'une série géométrique convergente car $0 < \frac{1}{a} < 1$, car $a > 1$. Ce qui montre que la série de fonction (f_n') converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.
On peut appliquer le théorème de dérivation
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{-n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}, \text{ sur } [a;+\infty[$$
3. Soit $x_0 > 1$ on considère $a \in]1, x_0[$, on a $x_0 \in [a,+\infty[$ donc f est dérivable en x_0, ceci pour tout $x_0 > 1$ donc f est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
4. Pour tout $x > 1$
$$0 < f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1 = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$
5. Pour tout $x > 1$.
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \ln(x-1) - \ln(x) + K = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + K$$
Première méthode
D'après la question précédente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Seconde méthode

Pour $x \geq a$ et $n \geq 1$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{nx^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Comme $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)_n$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $0 < \frac{1}{a} < 1$, la série de fonction $(f_n)_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

La convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $[a; +\infty[$ permet d'intervertir la limite en $+\infty$ et somme donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

Quelle que soit la méthode

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + K\right) = \ln(1) + K = K$$

Donc $K = 0$.