Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2021-2022
25 avril 2022

PCSI L2 UE Mathématiques 4
Séquence 1

Contrôle Continu 2

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. Le sujet comporte trois exercices indépendants.*

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1 [10 points] On considère l'équation différentielle

$$y'''(t) + 2y''(t) + 5y'(t) = 0\,, \tag{1}$$

d'inconnue $y : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, pour un certain $a \leq 0$, avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1\,. \tag{2}$$

1. Si y est solution de (1) et (2) sur $[a, +\infty[$, trouver une équation satisfaite par $\mathcal{L}[y]$, où $\mathcal{L}[y]$ est la transformée de Laplace de y.
2. Étant donnés un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 et des nombres réels a, b, c tels que $b^2 - 4c < 0$, donner la forme de la décomposition en éléments simples réelle de la fraction rationnelle
$$\frac{P(s)}{(s-a)(s^2+bs+c)}.$$
Dans cette question 2, on ne demande **pas** de calculer les coefficients de la décomposition en fonction de a, b, c.
3. En utilisant la question précédente, calculer la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}[y]$.
4. En déduire une formule explicite pour la solution y de (1) et (2).
5. Quel a convient pour l'ensemble de définition $[a, +\infty[$ de y ?

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 2 [2 points] L'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$$

est-elle convergente ou divergente ? Justifier soigneusement votre réponse.

Exercice 3 [8 points] Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1. Pour $x > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est bien convergente.
2. Pour $x > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est bien convergente.
3. En intégrant par parties, exprimez $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.
4. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. En utilisant l'égalité
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et un changement de variables, calculer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
6. En déduire $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

Dès que ces formules ont un sens, on pourra utiliser librement que

— la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ de f est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$,

— $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Laplace usuelles

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leq j \leq m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i - j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((s-a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j} + s d_{i,j}}{(((s-a_i)^2 + b_i^2))^j}.$$