Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de printemps 2021-2022**

M4

Proposition de corrigé pour l'exercice sur Laplace pour le CC2 (séquence 1) du 25 avril 2022

Partie I (à rédiger sur une première copie)

<u>Exercice 1.</u> 10 points On considère l'équation différentielle

$$y'''(t) + 2y''(t) + 5y'(t) = 0\,, \tag{1}$$

d'inconnue $y:\ [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, pour un certain $a \leq 0$, avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1\,. \tag{2}$$

1. Si y est solution de (1) et (2) sur $[a, +\infty[$, trouver une équation satisfaite par $\mathcal{L}[y]$, où $\mathcal{L}[y]$ est la transformée de Laplace de y.

Si y est solution, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}(y)(s)$ est défini, on aura

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0),$$

et

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0),$$

et

$$\mathcal{L}(y''')(s) = s\mathcal{L}(y'')(s) - y''(0),$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''')(s) &= s\big(s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0)\big) - y''(0) \\
&= s\Big(s\big(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)\big) - y'(0)\Big) - y''(0) \\
&= s^3\mathcal{L}(y)(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0),
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0).$$

Comme $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, on a donc

$$\mathcal{L}(y''')(s) = s^3\mathcal{L}(y)(s) - s - 1,$$

et

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2\mathcal{L}(y)(s) - 1,$$

et

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s).$$

Et puisqu'on a supposé que y est solution de l'équation différentielle (1),

$$s^3\mathcal{L}(y)(s) - s - 1 + 2\big(s^2\mathcal{L}(y)(s) - 1\big) + 5s\mathcal{L}(y)(s) = 0.$$

Donc $\mathcal{L}(y)$ satisfait l'équation

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+3}{s^3+2s^2+5s}.$$

---

2. Étant donnés un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 et des nombres réels a, b, c tels que $b^2 - 4c < 0$, donner la forme de la décomposition en éléments simples réelle de la fraction rationnelle
$$\frac{P(s)}{(s-a)(s^2+bs+c)}.$$
Dans cette question 2, on ne demande **pas** de calculer les coefficients de la décomposition en fonction de a, b, c.

Le dénominateur est de degré 3, et le numérateur P inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, le facteur de degré 2 dans le dénominateu n'a pas de racines réelles. D'après le cours, la forme de la décomposition est donc

$$\frac{P(s)}{(s-a)(s^2+bs+c)} = \frac{\alpha}{s-a} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2+bs+c},$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

---

3. En utilisant la question précédente, calculer la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}[y]$.

Le dénominateur dans $\mathcal{L}(y)$ se factorise :

$$s^3 + 2s^2 + 5s = s(s^2 + 2s + 5).$$

Le polynôme s^2+2s+5 n'a pas de racines réelles. Par ailleurs, le numérateur dans $\mathcal{L}(y)$ est de degré 1, donc inférieur au degré du dénominateur. Donc d'après la question précédente, la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}(y)$ est de la forme

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2+2s+5}. \tag{3}$$

Calcul de α : on multiplie par s les deux membres de (3) puis on évalue en $s = 0$:

$$s\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5} = \alpha + s \cdot \frac{\beta s + \gamma}{s^2+2s+5},$$

donc

$$\frac{3}{5} = \alpha.$$

Calcul de β et γ : les racines complexes de s^2+2s+5 sont $-1+2i$ et $-1-2i$, de sorte que

$$s^2+2s+5 = (s+1-2i)(s+1+2i).$$

On multiple les deux membres de (3) par $s+1+2i$ puis on évalue en $s = -1-2i$:

$$\begin{aligned}(s+1+2i)\mathcal{L}(y)(s) &= \frac{(s+1+2i)(s+3)}{s(s+1+2i)(s+1-2i)} \\ &= \frac{s+3}{s(s+1-2i)} \\ &= (s+1+2i) \cdot \frac{\alpha}{s} + \frac{(s+1+2i)(\beta s+\gamma)}{(s+1+2i)(s+1-2i)}.\end{aligned}$$

Donc en évaluant en $s = -1-2i$:

$$\frac{-1-2i+3}{(-1-2i)(-4i)} = 0 + \frac{(\beta(-1-2i)+\gamma)}{-4i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{-1-2i+3}{(-1-2i)} = \beta(-1-2i)+\gamma,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{5}(2-2i)(-1+2i) = -\beta+\gamma-2i\beta.$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve

$$-\beta+\gamma = \frac{2}{5}, \quad -2\beta = \frac{6}{5},$$

et donc

$$\beta = -\frac{3}{5}, \quad \gamma = -\frac{1}{5}.$$

On a obtenu

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-\frac{3}{5}s - \frac{1}{5}}{s^2+2s+5}.$$

---

4. En déduire une formule explicite pour la solution y de (1) et (2).

On utilise le formulaire : la fonction $s \in \mathbb{R}_+^\star \to 1/s$ est la transformée de Laplace de la fonction constante égale à 1 (choisir $a = 0$ et $n = 0$ dans le formulaire, en utilisant $0! = 1$). Par ailleurs, le polynôme $s^2 + 2s + 5$ n'a pas de racines réelles donc peut s'écrire comme somme de carrés :

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2.$$

On calcule

$$\frac{-\frac{3}{5}s - \frac{1}{5}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{3s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}.$$

On cherche à voir la fonction ci-dessus comme somme d'une transformée de Laplace d'une fonction de type $e^{at}\cos(\omega t)$ et d'une fonction de type $e^{at}\sin(\omega t)$. On écrit donc

$$-\frac{1}{5} \cdot \frac{3s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{3(s + 1) - 2}{(s + 1)^2 + 2^2} = \frac{-3}{5} \cdot \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{5}\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}.$$

D'après le formulaire,

$$\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} = \mathcal{L}(e^{-t}\cos(2t))(s), \qquad \text{pour } s > -1,$$

et

$$\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} = \mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t))(s), \qquad \text{pour } s > -1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{-1}{5} \cdot \frac{3s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} &= \frac{-3}{5}\mathcal{L}\big(e^{-t}\cos(2t)\big)(s) + \frac{1}{5}\mathcal{L}\big(e^{-t}\sin(2t)\big)(s) \\ &= \mathcal{L}\Big(e^{-t}\big(\frac{-3}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t)\Big)(s).\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}\Big(\frac{3}{5} + e^{-t}\big(\frac{-3}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t)\Big)(s),$$

et donc (par injectivité de la transformée de Laplace),

$$y(s) = \frac{3}{5} + e^{-t}\big(\frac{-3}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t).$$

---

5. Quel a convient pour l'ensemble de définition $[a, +\infty[$ de y ?

La transformée de Laplace de la fonction constante $t \to 1$ n'est définie que pour $s > 0$: en effet, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

diverge pour $s \leq 0$. Par ailleurs, d'après le formulaire, les fonctions $t \to e^{-t}\cos(2t)$ et $t \to e^{-t}\sin(2t)$ ont des transformées de Laplace définies pour $s > -1$. Donc en prenant l'intersection des domaines de définition des transformées de Laplace (c'est-à-dire en considérant les contraintes $s > 0$ et $s > -1$ simultanément), on trouve $s > 0$. Donc la transformée de Laplace de la solution y trouvée plus haut est définie seulement pour $s > 0$. Par ailleurs, la solution y trouv'ee plus haut est définie sur tout $\mathbb{R}$, en particulier sur tout intervalle $[a, +\infty[$.