Contrôle final

L'épreuve dure 2h00. Vous pouvez utiliser librement le formulaire en fin de sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Sauf mention explicite du contraire, on prendra soin de ***justifier*** *les réponses.*

Exercice 1 (7 points). En utilisant la transformée de Laplace, trouver la solution de l'équation différentielle

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 2\cos t\,,$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Correction.
1. On cherche tout d'abord une formule pour la transformée de Laplace de la solution f cherchée. D'après la formule (8) du formulaire, on a $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Appliquant cette formule à une dérivée, on obtient

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\,.$$

Prenant alors la transformée de Laplace de l'équation différentielle considérée, on obtient

$$\mathcal{L}[f'' + 2f' + f](s) = 2\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\iff (s^2+2s+1)\mathcal{L}[f](s) = sf(0) + f'(0) + 2f(0) + \frac{2s}{s^2+1} = s + 2 + \frac{2s}{s^2+1} = \frac{s^3+2s^2+3s+2}{s^2+1}$$

$$\iff \mathcal{L}[f](s) = \frac{s^3+2s^2+3s+2}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)}\,.$$

Cette dernière égalité et obtenue en divisant le numérateur et le dénominateur par $(s+1)$.
Remarque : même si on ne remarque pas que -1 est racine du numérateur, on peut continuer l'exercice sans problème avec la forme non simplifiée ; cela demande simplement un peu plus de calculs.
2. On effectue maintenant la décomposition en éléments simples de la fractions rationnelle $Y(s) = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = (s+1)(s+i)(s-i)$. Comme $\deg(p) < \deg(p)$, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ (voir aussi le formulaire) assure qu'il existe des nombres complexes a, b, c (autant que le degré du dénominateur) uniques tels que

$$Y(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+i} + \frac{c}{s-i}\,. \qquad (\star)$$

La fraction rationnelle initiale étant à coefficients réels, il découle de l'unicité des coefficients que $c = \bar{b}$ (voir cours). Multipliant la décomposition par $(s+1)$, on obtient

$$\frac{s^2+s+2}{s^2+1} = a + (s+1)\left(\frac{b}{s+i} + \frac{c}{s-i}\right)\,;$$

-1 n'étant plus pôle dans cette relation, on peut évaluer en -1 pour obtenir $\boxed{a = \frac{1-1+2}{2} = 1}$. De même, on peut maintenant multiplier $(\star)$ par $s+i$ et évaluer en $-i$ pour obtenir

$$\left.\frac{s^2+s+2}{(s+1)(s-i)}\right|_{s=-i} = \frac{-1-i+2}{(-i+1)(-2i)} = -\frac{1}{2i} = \boxed{\frac{i}{2} = b}.$$

Revenant ainsi à $(\star)$ et utilisant $c = \bar{b}$, on peut écrire

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}\,.$$

3. On identifie maintenant la solution f telle que $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$ en utilisant si besoin le formulaire. On tire de la décomposition en éléments simples que f donnée par $f(t) = e^{-t} + \sin t$ convient.

Exercice 2 (6 points). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad \text{sur }]0, \pi].$$

On pose en particulier $f(0) = 0$.

1. Dessiner le graphe de f sur une période.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer la série de Fourier de f (avec les fonctions sin et cos).
4. En déduire la convergence et la somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin n}{n}.$$

Correction. Voir TD3A, exercice 5 et corrigé.

Exercice 3 (4 points). Montrez soigneusement que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{t}} dt$$

est convergente, où $g(t)$ est donné par

$$g(t) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{t+1}\right).$$

Correction. Posant $f(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{t}}$, on vérifie que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et donc bien Riemann intégrable sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$. En particulier, le dénominateur du terme $1/(t+1)$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Reste donc maintenant à étudier la convergence de l'intégrale en 0^+ et en $+\infty$.

Étude en 0^+ : on vérifie directement que $g(0) = 1 - \cos\pi = 2$. En particulier, comme $g(0) \neq 0$, on peut bien écrire

$$f(t) \sim \frac{g(0)}{\sqrt{t}} \sim \frac{2}{t^\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2}$$

quand $t \to 0^+$. Par le théorème de comparaison II du cours, le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ assure que l'intégrale est convergente en 0, c'est à dire que, pour tout $M > 0$, l'intégrale $\int_0^M f(t)dt$ est convergente, comme l'est $\int_0^M \frac{2}{t^\alpha} dt$.

Étude en $+\infty$: quand $t \to +\infty$, on a $\varepsilon := \frac{\pi}{t+1} \to 0$, de sorte qu'on peut utiliser le développement limité de la fonction cos en 0 pour écrire

$$\cos\left(\frac{\pi}{t+1}\right) = \cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + o(\varepsilon^2) = 1 - \frac{\pi^2}{2t^2} \underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)^2}_{=1+o(1)} + o\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right);$$

on en déduit donc toujours quand $t \to +\infty$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\right) = \frac{\pi^2}{2t^{\frac{5}{2}}}(1 + o(1)) \sim \frac{\pi^2}{2t^\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{5}{2},$$

utilisant la définition même d'un équivalent. Par le théorème de comparaison II du cours, le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{5}{2} > 1$ assure que l'intégrale est convergente en $+\infty$, c'est à dire que, pour tout $M > 0$, l'intégrale $\int_M^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, comme l'est $\int_M^{+\infty} \frac{1}{2t^\alpha} dt$.

Au bilan, on a bien montré que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, comme demandé dans l'énoncé.

Exercice 4 (3 points. Bonus sur 3 points). Soit v la fonction donnée pour tout y réel par $v(y) = \frac{3e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Soit u la fonction donnée pour $t > 0$ et x réel par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dy.$$

1. Soient $b > a > 0$. Montrer soigneusement que $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ pour tout $(t, x) \in]a, b[\times] - b, b[$.
2. (a) Étudier les limites de v en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En appliquant un résultat du cours, déterminer sans justification $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.

(c) (Bonus à traiter en dernier) Démontrer rigoureusement votre réponse à la question précédente.

Correction.

1. On applique le théorème de dérivations successives (Théorème 0.2 du cours 6) : tous les détails de cette question ont été traités dans le dernier (voir Point B à la fin de la page 3 du cours 8).

2.(a) On obtient $v(y) \to 3$ quand $y \to +\infty$ et $v(y) \to -1$ quand $y \to -\infty$.

2.(b) Par le Théorème 0.3 du cours 8, on a que $u(t,x) \to \frac{3-1}{2} = 1$ quand $t \to +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé.

2.(c) Voir la preuve de ce théorème dans le même cours.

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$
$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

(4) La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx.$$

(5) Formule d'inversion s'écrit $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx}dp$.

(6) Le produit de convolution est donné par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(7) La formule de Plancherel s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

(8) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(9)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(10)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\|p\|}$
(11)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(12)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(13)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(14)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(15)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(16)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(17)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(18)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j}+sd_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$