**Université Claude Bernard Lyon 1** PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2023-2024 Séquence 1

# Contrôle Partiel

19 février 2024

*L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire en fin de sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème donné est à titre indicatif. On prendra soin de* ***justifier*** *les réponses. Les* ***deux parties*** *sont à rédiger sur des* ***copies séparées****. Le sujet comporte une question de cours et quatre exercices.*

## Partie I (à rédiger sur une première copie)

**Question de cours.** [2 points] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la définition de la convergence normale de la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

**Exercice 1** [3 points]

1. Déterminer un équivalent simple quand $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^4 \ln(1+x)} \qquad (x \neq 0).$$

2. Étudier la limite de

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\ln(x)}.$$

quand $x \to +\infty$.

**Exercice 2** [5 points] Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^3 + e^x}.$$

1. Montrer que la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on notera $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sa somme.
2. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^x}{(n^3 + e^x)^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

## Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

**Exercice 3** [6 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique **paire** définie par

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \quad \text{sur} \quad [0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

**Tourner la page SVP**

2. Montrer que le coefficient $a_n$ de la série de Fourier de $f$ est donné par :
$$a_0 = 1 \ \text{ et } \ a_n = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{\pi^2 n^2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$
3. En déduire que la série de Fourier de $f$ est donnée par
$$\frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi^2(2p+1)^2} \cos((2p+1)x).$$
   Quand cette série converge, sa somme sera notée $Sf$.
4. Justifier la convergence simple de la série de Fourier et que $Sf(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Calculer la valeur des sommes
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

**Exercice 4** [4 points] On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E) \qquad y'' + 2y = f$$

où $f$ est la fonction donnée dans l'exercice 3.

1. On suppose que $y_0$ est une solution particulière de (E) développable en série de Fourier
$$y_0(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$
   Déterminer $A_n$ et $B_n$ [On ne demande pas ici de justifier la convergence des séries intermédiaires dans les calculs.]
2. Vérifier en justifiant soigneusement que la fonction ainsi trouvée est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la solution générale de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

## Formulaire

Les coefficients de Fourier de $f$ $T$-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période ($a$ au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$
$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

La série de Fourier est alors
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,.$$

Si $f$ est continue et $C^1$ par morceaux, alors on a pour $n > 0$
$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

La formule de Parseval, valable pour $f$ $T$-périodique continue par morceaux, s'écrit
$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\,.$$