Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année universitaire 2023-2024
2 mai 2024

Contrôle final

---

*L'épreuve dure 2h00. Vous pouvez utiliser librement le formulaire en fin de sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Sauf mention explicite du contraire, une partie importants du barème est réservée à la **justification** des réponses. Les exercices sont indépendants.*

Exercice 1 (6 points). En utilisant la transformée de Laplace, trouver la solution $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t}\cos(t)$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Correction.
1. On cherche tout d'abord une formule pour la transformée de Laplace de la solution f cherchée. D'après la formule (8) du formulaire, on obtient pour f que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Appliquant cette formule à f', on obtient

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\,.$$

Prenant alors la transformée de Laplace de l'équation différentielle considérée, on obtient

$$\mathcal{L}[f'' + 2f' + f](s) = \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$\iff (s^2+2s+1)\mathcal{L}[f](s) = sf(0) + f'(0) + 2f(0) + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} = s + 2 + \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s^3+4s^2+7s+5}{s^2+2s+2}$$

$$\iff \mathcal{L}[f](s) = \frac{s^3+4s^2+7s+5}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}\,.$$

2. On effectue maintenant la décomposition en éléments simples de la fractions rationnelle

$$Y(s) = \frac{s^3+4s^2+7s+5}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = \frac{p(s)}{q(s)}\,,$$

avec $q(s) = (s+1)^2(s^2+2s+2) = (s+1)^2(s+1-i)(s+1+i)$. Comme $\deg(p) < \deg(p)$, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ (voir aussi le formulaire) assure qu'il existe des nombres réels a, b, c, d (autant que le degré du dénominateur) uniques tels que

$$\frac{s^3+4s^2+7s+5}{(s+1)^2((s+1)^2+1)} = \frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{s+1} + \frac{cs+d}{(s+1)^2+1}\,. \qquad (\star)$$

Multipliant $(\star)$ par $(s+1)^2$, on obtient

$$\frac{s^3+4s^2+7s+5}{(s+1)^2+1} = a + b(s+1) + (s+1)^2\left(\frac{cs+d}{(s+1)^2+1}\right)\,.$$

NB. Contrairement à $(\star)$, cette nouvelle relation est évaluable en -1 qui n'y est jamais pôle, i.e. racine du dénominateur. Évaluant donc en $s = -1$, on obtient $\boxed{a = 1}$. Dérivant cette relation, on obtient

$$\frac{(3s^2+8s+7)((s+1)^2+1) - (s^3+4s^2+7s+5)\times 2(s+1)}{((s+1)^2+1)^2} = b + (s+1)R(s)$$

où R n'a pas de pôle en -1 ; évaluant cette dernière relation en -1 (et réutilisant les calculs déjà effectués lors de l'étape précédente...), on obtient $\boxed{b = 2}$.
On repart à présent de $(\star)$. Multipliant donc $(\star)$ par $(s+1)^2+1$, on obtient

$$\frac{s^3+4s^2+7s+5}{(s+1)^2} = d + cs + ((s-1)^2+1)\left(\frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{s+1}\right)\,.$$

Évaluant alors en $-1+i$, on tire de $(-1+i)^2 = -2i$, $(-1+i)^3 = 2+2i$ que

$$-i = (d-c) + ci\,.$$

Comme c et d sont réels, on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires que $\boxed{c = d = -1}$. Revenant à $(\star)$, on en déduit finalement que

$$\frac{s^3 + 4s^2 + 7s + 5}{(s+1)^2((s+1)^2+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

3. On identifie maintenant la solution f telle que $\mathcal{L}[f](s) = \frac{s^2-s+3}{(s+1)((s-1)^2+1)}$ en utilisant si besoin le formulaire. On tire de la décomposition en éléments simples que f donnée par $f(t) = e^{-t}(t + 2 - \cos(t))$ convient.

Exercice 2 (6 points). Soient $\alpha \in]0, \pi[$ fixé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f, puis donner la série de Fourier S_f de f.
3. Citer un résultat précis du cours assurant que la série de Fourier S_f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa somme $S_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ a-t-on l'égalité $S_f(x) = f(x)$?
5. Montrer sans calcul que la série de Fourier S_f de f ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. A-t-on convergence normale de S_f sur $\mathbb{R}$?
6. Déterminer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\alpha)}{n}$ en fonction du paramètre α.
7. Déterminer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$ en fonction du paramètre α.

Correction. *Cet exercice est essentiellement l'exercice 4 de la feuille de TD 3A.*
2. La fonction étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On calcule alors, utilisant la parité (et le formulaire si besoin),

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

puis, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n\alpha)}{n}.$$

La série de Fourier de f est donc par définition

$$\frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi} \cos(nx).$$

3. D'après le Théorème de Dirichlet (cours 3), la fonction f étant C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge simplement en tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, où $f(x^+) := \lim\limits_{y \to 0^+} f(y)$ et $f(x^-) := \lim\limits_{y \to 0^-} f(y)$. Dans notre cas particulier, on obtient donc

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq \pm\alpha + 2k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = \pm\alpha + 2k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. Comme $f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = S_f(x)$ si $x = \pm\alpha + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ par définition, on conclut de la question précédente que $S_f(x) = f(x) \iff x \neq \pm\alpha + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
5. La série de Fourier S_f est la série de fonctions $\frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi} \cos(nx)$ est continue. Nous avons vu en question 3 que cette série converge simplement vers une fonction $x \mapsto S_f(x)$ qui a des "sauts" en $\pm\alpha + 2\pi\mathbb{Z}$ et est donc discontinue. Par un résultat du cours 2 (Théorème 1, transparent 48), si la convergence était uniforme, cette somme serait continue. La convergence n'est donc pas uniforme, et donc pas normale non plus (la convergence normale impliquant la concergence uniforme).
6. Explicitant la question 3 en $x = \pi \neq \pm\alpha$, on obtient

$$f(\pi) = S_f(\pi) \iff 0 = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\alpha) \times (-1)^n}{n\pi} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\alpha)}{n} = -\frac{\alpha}{2}.$$

7. En utilisant la formule de Parseval (formule (3) du formulaire), on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{1}{4}\frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\sin(n\alpha)^2}{n^2\pi^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}\,.$$

Exercice 3 (5 points). *Une méthode pour obtenir la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne.*

1. Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(pt)\,dt$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'intégrale donnant $F(p)$ est convergente.
   (b) Montrer soigneusement que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis donner une expression intégrale de $F'(p)$.
   (c) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a $F'(p) + \dfrac{p}{2}F(p) = 0$.
   (d) En déduire que $F(p) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{p^2}{4}}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

   Indication : pour la question 1.(d), on pourra montrer que $F(0)^2 = \dfrac{\pi}{4}$ *en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.*
2. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $f(x) = e^{-x^2}$, alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est donnée par $\hat{f}(p) = 2F(p)$ pour tout p.

Correction. *Cet exercice est essentiellement issu de l'exercice 2, p.2, du cours 6 et de l'exemple 0.3, p.5, du cours 7.*

Exercice 4 (5 points, dont bonus de 2 points). Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée et fixée pour tout l'exercice. On s'intéresse à l'*équation de la chaleur* homogène sur tout $\mathbb{R}$, avec condition initiale v au temps $t = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Soit $w\colon]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$w(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}v(y)dy\,.$$

1. Montrer que w est bien définie et satisfait $\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. (Bonus) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{t\to 0^+} w(t,x) = v(x)\,.$$

Correction. *Cet exercice est contenu dans la preuve du théorème 0.2 du cours 8.*

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x)f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x)f(x)dx, \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x}f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

(4) La transformée de Fourier de f est donnée par $\hat{f}(p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}f(x)dx$.

(5) Formule d'inversion s'écrit $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx}dp$.

(6) Le produit de convolution est donné par $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(7) La formule de Plancherel s'écrit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

(8) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(9)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(10)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\lvert p\rvert}$
(11)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(12)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(13)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(14)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(15)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(16)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(17)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(18)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$**,** avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j}+sd_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$