Cours 2. Suites et séries de fonctions

Mathématiques 4

22 janvier 2024

1. Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

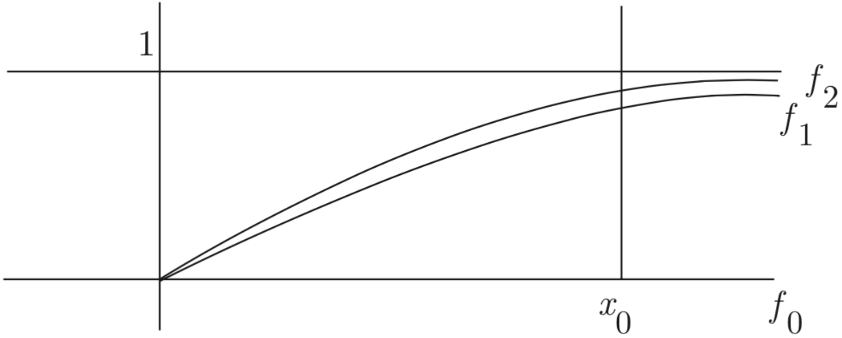
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n : D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. Une suite de fonctions pourra être notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n).

Exemple 1

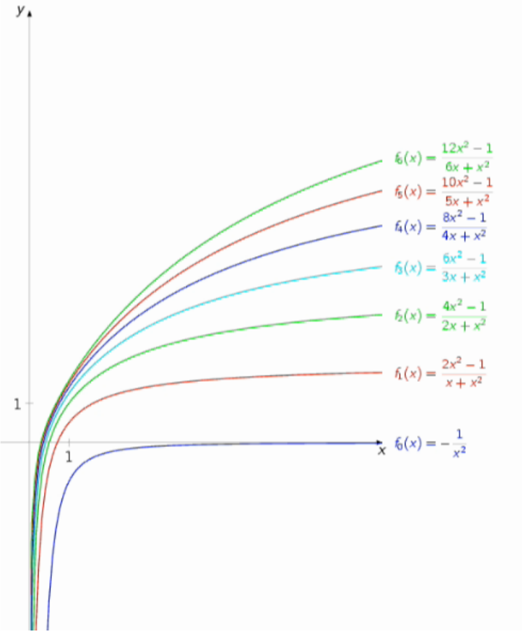
Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$



Exemple 2

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{array} \right.$$


y
x
1
1
$f_6(x) = \frac{12x^2 - 1}{6x + x^2}$
$f_5(x) = \frac{10x^2 - 1}{5x + x^2}$
$f_4(x) = \frac{8x^2 - 1}{4x + x^2}$
$f_3(x) = \frac{6x^2 - 1}{3x + x^2}$
$f_2(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + x^2}$
$f_1(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + x^2}$
$f_0(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exemple 3

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \cos(nx). \end{array} \right.$$

Exemple 4

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

Convergence

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple ....

Convergence simple

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ. De la même manière, on peut étudier la converge d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher* (ou non) d'une fonction "limite" (converger).

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} D & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \quad f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x). \end{array} \right.$$

Convergence simple

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) converge simplement sur D, si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D, alors la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} D & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \qquad f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \end{cases}$$

est appelée la limite simple de la suite (f_n) sur D.

Convergence simple

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a :

- pour $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Convergence simple

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n(x^2-\frac{1}{2n})}{n(x+\frac{x^2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x^2-\frac{1}{2n})}{(x+\frac{x^2}{n})} = 2x^2/x = 2x.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 2x.$$

Convergence simple

Exemple 4 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

- Si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $(f_n(x))$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))$ n'admet pas de limite.

Donc (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n).

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence uniforme

Supposons que (f_n) est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Donc on suppose qu'il y a déjà une convergence simple.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n, serait aussi satisfaite par f.
On peut se demander

- si chaque f_n est continue, f est-elle continue ?
- si chaque f_n est dérivable, f est-elle dérivable et a-t-on $f' = \lim_{n \to +\infty} f_n'$?
- si chaque f_n est intégrable, f est-elle intégrable et a-t-on alors
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt \, ?$$

La convergence simple n'est pas suffisante. On utilisera ici une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Pour $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction *majorée* au sens où il existe M tel que $g(x) \leq M$ pour tout $x \in D$, on rappelle que $A := \sup_{x \in D} g(x)$ est le plus petit réel M satisfaisant cette propriété. S'il existe $x \in D$ tel que $A = g(x)$, on dit que A est le *maximum* de g.

Exemple

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = -e^x$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$. Ce supremum n'est pas un maximum.

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f. On dit que (f_n) converge uniformément sur D vers f si :

- la quantité $u_n = \sup_{x \in D}(|f_n(x) - f(x)|) \in \mathbb{R}$ est finie, au sens où la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est majorée par un réel $M_n < +\infty$, pour tout n assez grand,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Convergence uniforme

En pratique ...

Proposition 1

La suite (f_n) converge uniformément sur D vers f, si et seulement si, il existe une suite réelle (u_n) vérifiant :

- pour tout n assez grand : $\forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Convergence uniforme

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n), il faut après avoir trouvé la limite simple f, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n, indépendamment de x (on dit aussi "uniformément en x").

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Pour tout $x > 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \dfrac{1}{1+nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a donc $u_n = \sup\limits_{x \in D} \dfrac{1}{1+nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a, +\infty[$ où $a > 0$.

En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na},$$

donc en posant $u_n = \dfrac{1}{1+na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Convergence uniforme

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{cases}$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1 + 2x^3}{nx + x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1 + 2x^3}{nx + x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x \qquad (n \text{ fixé})$$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.
Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 2 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f, sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.
En effet, on a

$$\frac{1+2a^3}{nb+b^2} \leq \frac{1+2x^3}{nx+x^2} \leq \frac{1+2b^3}{na+a^2},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n := \frac{1+2b^3}{na+a^2}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Convergence et continuité

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D.

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \big) = \lim_{n \to +\infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big).$$

Convergence et continuité

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite simple est $f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

  la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt.$$

Convergence et intégrales

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\to \mathbb{R}, \;\; f(x) = 1$.
Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt = (x - a) - \frac{\ln(1 + nx)}{n} + \frac{\ln(1 + na)}{n}, \; F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = F$ uniformément.

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle série de fonctions de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la suite de fonctions (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

Convergence simple

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D.

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction S, on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Convergence simple

Exemple 1

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

Exemple 2 : séries géométriques

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D si la suite de fonctions (S_n) donnée par les sommes partielles converge uniformément sur D.

Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc $\left|S_n(z) - S(z)\right| = \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \left(\leq \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||}\right).$

Comme $\lim\limits_{\substack{|z| \to 1 \\ z \neq 1}} \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty$, la série $\sum f_n(z)$ ne converge pas uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$\left|S_n(z) - S(z)\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Convergence uniforme et reste partiel

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S. On appelle suite des restes partiels, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le reste d'ordre n.

Remarque

Remarquons que (R_n) est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D. Alors elle converge uniformément sur D si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n. C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série *alternée* qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|f_n(x)|$ est **décroissante** et $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence uniforme et reste partiel

Exemple 3

Comme $\sum f_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence normale

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| < +\infty$$

qu'on appelle la norme de la convergence uniforme de f.

Remarquons que si (f_n) est une suite de fonctions bornées à partir d'un certain rang, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Convergence normale

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur D si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur D.

Convergence normale

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Convergence normale

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Liens entre les différentes formes de convergence

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Convergence absolue} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Convergence normale} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Convergence simple} \\
 & \text{Convergence uniforme} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Remarque

La convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} D =]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{array} \right.$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet, la série *à termes positifs* $\sum |f_n(x)|$ satisfait

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \qquad (x \text{ fixé})$$

et la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et donc $\sum |f_n|$ n'est pas convergente.

Rappel

Le terme général d'une série **numérique** convergente tend vers 0. Si ce terme général ne tend pas vers 0, on dit d'ailleurs que la série diverge grossièrement.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors la suite numérique $(\|f_n\|)$ converge vers 0.

Attention

Les réciproques dans la proposition précédente sont toutes fausses en général... !

Convergence et continuité

Comme les sommes partielles des séries de fonctions présentent des propriétés analogues à celles des suites de fonction, on a aussi :

Théorème 1

Si une séries de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0.
On a en particulier

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S. Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \;\; F(x) = \int_a^x S(t)\, dt,$$

  la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a en particulier

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\, dt \Big).$$

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$; on peut en particulier dériver terme à terme au sens où

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t).$$

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
(2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
(3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et écrire S' comme la somme d'une série.
(4) Montrer que S est Riemann-intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\displaystyle\int_1^2 S(x)\, dx$ comme la somme d'une série.

Corrigé

(1) On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^3x^2) - nx \times (2xn^3)}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}\,,$$

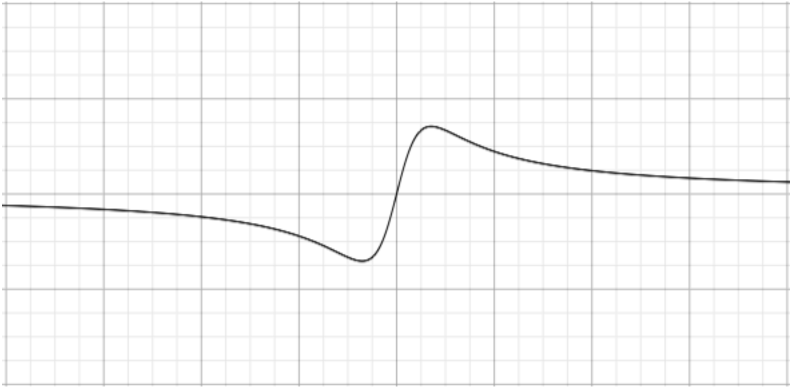
$$f_n'(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n^3}}\,,$$

$$f_n'(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[\,.$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur }]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$



Pour n assez grand,

$$[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}] \subseteq [-a, a], \ \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a.
Sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. On peut alors choisir $a \in]0, x_0[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0. La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. On conclut que sa limite S est continue en x_0.

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation des séries, on étudie la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$. On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$, $|(1 - n^3x^2)| \leq |1| + |-n^3x^2| = 1 + n^3x^2$ et donc

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3b^2)}{(1 + n^3a^2)^2}, \quad \text{si } 0 < a < b,$$

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3a^2)}{(1 + n^3b^2)^2}, \quad \text{si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n(1+n^3\alpha^2)}{(1+n^3\beta^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha^2}{\beta^4 n^2} \qquad (\alpha, \beta > 0 \text{ fixés})$$

et donc la série $\sum f_n'$ est normalement, puis uniformément convergente sur $[a, b]$.
Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe bien $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.
Par conséquent, S est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}.$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1,2]$ et les f_n sont continues donc Riemann-intégrables, d'où S est Riemann-intégrable sur $[1,2]$. On a ainsi

$$\int_1^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n^2}\ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n^2}\ln\left(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\right).$$

Merci de votre attention !