Cours 3. Séries trigonométriques, séries de Fourier

Mathématiques 4

29 janvier 2024

1. Introduction

Parmi ses contributions majeures, Joseph Fourier a introduit l'équation de la chaleur et a montré que les solutions de cette équation peuvent s'écrire comme sommes de séries trigonométriques bien choisies qui portent son nom depuis : les séries de Fourier.

Du point de vue des *applications*, les séries de Fourier sont un outil fondamental en traitement du signal ; elles peuvent aussi être considérées comme le premier pas vers la théorie moderne du traitement de l'information (FFT , ondelettes, JPEG, Hubble $\rightarrow$"sparse data"). Mais même du point de vue *théorique*, elles sont au cœur de pans entiers de mathématiques contemporaines, non seulement en analyse, mais aussi en théorie des nombres.

Considérons une barre homogène de longueur finie L. On s'intéresse à déterminer la température $u(x,t)$ de la barre au point x et à l'instant t.

On impose que la température est toujours nulle[1] aux extrémités (*conditions de bord*) et qu'à l'instant $t = 0$, elle est donnée par une fonction $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$ (*condition initiale*).

L'équation qui régit la température $u(x,t)$ en chaque point x à un instant $t > 0$ est l'équation de la chaleur, ici en dimension 1 :

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

où $D > 0$ est le coefficient de diffusion.

1. On suppose en fait qu'elle est toujours égale aux extrémités à une *constante* T_0, puis nulle, quitte à prendre T_0 comme température de référence.

En cherchant des solutions particulières à variables séparées, i.e. de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, on aboutit après calcul à des solutions de (E) de la forme

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt\right)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.
Les entiers $n \in \mathbb{N}$ apparaissent afin de satisfaire les conditions de bord ; en revanche, ces solutions ne satisfont pas forcément les conditions initiales.

L'équation (E) est *linéaire* au sens où on a un certain "principe de superposition" : la somme ou un multiple de fonctions de la forme précédente reste encore solution de (E). En passant aux sommes d'un nombre infini, donc aux séries, on peut chercher des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2}Dt\right),$$

$$\text{avec} \qquad \varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions, qui servent à décomposer une fonction périodique comme "combinaison linéaire" de fonctions périodiques plus simples, de la forme $\cos(n\omega x)$ ou $\sin(n\omega x)$, c'est à dire comme somme d'une série de la forme

$$\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

2. Séries trigonométriques

Définition 1

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ et (a_n) et (b_n) sont des suites réelles ou complexes.

On dit que la série est réelle si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles.

Périodicité

Rappel

Soit $T \neq 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. On dit alors que T est une période de f.

Le plus petit $T > 0$ vérifiant la propriété précédente (s'il existe) est parfois appelé la période de f.

Exemple

Pour $\omega > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \cos(n\omega x)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
On a bien en effet

$$\cos(n\omega(x + 2\pi/\omega)) = \cos(n\omega x + 2n\pi) = \cos(n\omega x).$$

Périodicité

Supposons que la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f, donc donnée par

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \,.$$

Comme ces fonctions $\sin(n\omega x)$ et $\cos(n\omega x)$ sont $\frac{2\pi}{\omega}$-périodiques, la somme f est également $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique. En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos(n\omega(x + 2\pi/\omega)) = \cos(n\omega x),\ \sin(n\omega(x + 2\pi/\omega)) = \sin(n\omega x)$$

et donc par passage à la limite que $f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$, et f est bien $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

Convergence

Proposition 1

Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'*inégalité triangulaire* donne

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Convergence

Proposition 2 (Critère d'Abel)

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont **décroissantes** pour n assez grand et tendent vers 0, alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est convergente au moins pour tout

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}\right) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,:\, y \neq \frac{2k\pi}{\omega} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Cette restriction sur x est nécessaire : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ ne saurait converger en $x = 0$...
- De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence est uniforme (et donc la somme continue) en tout les x à distance $\geq \varepsilon$ de $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Écriture complexe

Considérons une série trigonométrique réelle

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

En utilisant les formules d'Euler

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1) s'écrit

Écriture complexe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right)$$

ou encore

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(e^{in\omega x} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x} \frac{a_n + ib_n}{2} \right).$$

Posons donc

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Écriture complexe

Alors la série (1) devient

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x})$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x})$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n e^{in\omega x}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

La dernière expression est appelée la forme complexe de la série trigonométrique (1).

Calcul des coefficients a_n, b_n

Considérons une série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

convergeant *uniformément* sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)). \tag{1}$$

On souhaite calculer/identifier les coefficients a_n et b_n *en fonction de* f, (un peu) comme dans le cas des fonctions développables en séries entières. Ceci donnerait en particulier l'unicité d'une telle décomposition de f.

Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé. En multipliant les deux côtés de l'égalité (1) par $\cos(p\omega x)$, on a

$$f(x)\cos(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\cos(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)$$

. On multiplie aussi les deux côtés de l'égalité (1) par $\sin(p\omega x)$ pour écrire

$$f(x)\sin(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\sin(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)$$

.

Calcul des coefficients a_n, b_n

Comme la série converge uniformément, on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(p\omega x)\, dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)\, dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\, dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)\, dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(p\omega x)\ dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)\ dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx.$$

Il reste donc à calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les quantités

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\, dx, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\, dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

Exercice

Montrer que

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\;dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\;dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\;dx = 0.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n

Après substitution, on obtient donc

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\, dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n : conclusion

Considérons toujours une série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa somme f donnée par

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\ dx.$$

En écriture complexe

On obtient de façon similaire

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) e^{in\omega x}\, dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

3. Séries de Fourier

Séries de Fourier

Définition (Séries de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique où on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\ dx\ ,$$

(appelés coefficients de Fourier).

On peut écrire les coefficients en fonction de la période T

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx.$$

Séries de Fourier : exemple

Exemple

Considérons la fonction 2π-périodique suivante, appelée la fonction **créneau** :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Séries de Fourier : exemple

Calculons les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = 1;$$

pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Séries de Fourier : exemple

D'où on obtient la série de Fourier

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nx)$$

et comme $(1-(-1)^n) = 0$ si n est pair et $(1-(-1)^n) = 2$ si n est impair, on peut écrire la série sous la forme

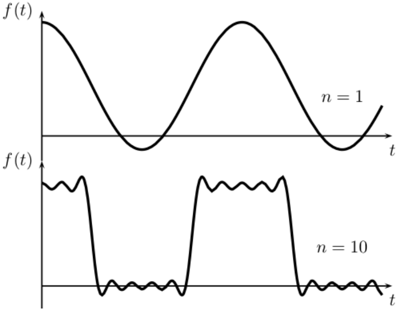
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x).$$

Séries de Fourier : exemple

Si on calcule la somme partielle pour des valeurs de n de plus en plus grande

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-(-1)^k)}{\pi k} \sin(kx)$$

on constate une *convergence* vers la fonction f, comme le montre le dessin suivant :



Séries de Fourier : convergence

Donc, d'une façon général, étant donnée une fonction f et sa série de Fourier, on peut se demander :

- **La série de Fourier** associée à f **est-elle convergente** en un certain sens ?
- En cas d'une telle convergence, peut-on aussi dire que la série converge **vers** f ?

Séries de Fourier : convergence

Notation

Si la série de Fourier associée à f converge simplement, on note sa somme Sf :

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Attention

Il existe des fonctions, même continues (périodiques), dont la série de Fourier diverge au moins en un point x, de sorte que l'égalité $Sf(x) = f(x)$ n'a même pas de sens.

Culture

Cependant, un résultat dû à Fejér (allant au delà des ambitions de ce cours) dit cependant que si f est continue et que sa série de Fourier converge en x, alors on a $Sf(x) = f(x)$.

Séries de Fourier : convergence

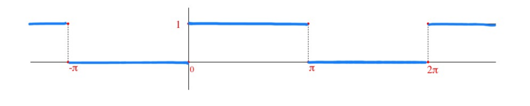
Définition 3

Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche en x_0 existent et sont finies.

Définition 4

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ avec des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^-.

Exemple



Remarque

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a, b]$ et elles sont toutes de première espèce.

Notation

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$f(x^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h)\,; \quad f(x^-) = \lim_{h \to 0^+} f(x-h).$$

Théorème de Dirichlet ou de Jordan-Dirichlet

Théorème 1 (convergence simple)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux sur tout intervalle fermé et borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que les quantités

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

existent et sont finies. Alors la série de Fourier associée à f converge en x

et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, f est de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et f et f' possèdent des limites finies à gauche et à droite en a_i et a_{i+1}.

Théorème 2 de Jordan-Dirichlet (Convergence normale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Supposons que f est de classe C^1 par morceaux sur tout intervalle fermé et borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier associée à f converge et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.

Enfin la convergence est normale (et donc uniforme) sur tout intervalle fermé et borné où la fonction f est continue. Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, on a même

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n| + |b_n|) \text{ converge.}$$

Exemple

Reprenons la fonction créneau

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pour } x\in[0,\pi] \\ 0 & \text{pour } x\in]\pi,2\pi[, \end{cases}$$

dont nous avons calculé la série de Fourier

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin((2k+1)x).$$

On peut donc écrire

$$Sf(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin((2k+1)x).$$

On voit que f est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ (comme f est 2π-periodique, il suffit de le vérifier sur une période $[0, 2\pi]$) et qu'elle est aussi de classe C^1 par morceaux (exercice). Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi | m \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

et pour $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x).$$

Périodicité et intégrales

Propriété

Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Preuve

On a

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

Or en utilisant le changement de variable $t = x - T$, on a

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx, \quad \text{d'où le résultat.}$$

Périodicité et intégrales

Donc pour le calcul des coefficients de Fourier, on a

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\,dx,$$

et pour les fonctions 2π-périodiques, en prenant $a = -\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Parité et intégrales

Rappel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

- Si f est paire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$
- Si f est impaire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Parité et intégrales

Conséquence

- Si f est paire alors

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx,$$

$$b_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Si f est impaire alors

$$a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx.$$

Exemples

(1) Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f.
Vérifions que f est paire. Si $|x| \leq \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 1$ et si $|x| > \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 0$.

Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\alpha} 1dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos(nx)dx = \frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}.$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. La fonction f a deux points de discontinuité sur $[-\pi,\pi]$: $-\alpha,\alpha$. Comme f est dérivable par morceaux et que f est continue sur $[-\pi,\pi]\setminus\{-\alpha,\alpha\}$, on a d'après le théorème de Dirichlet que, pour tout $x \in [-\pi,\pi]\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}\cos(nx) \qquad \text{et que}$$

$$Sf(-\alpha) = \frac{f((-\alpha)^+) + f((-\alpha)^-)}{2} = \frac{1}{2}, \quad Sf(\alpha) = \frac{f(\alpha^+) + f(\alpha^-)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f. Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \ dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx) \ dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. Comme f est dérivable par morceaux, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Application. En prenant $x = 0$, on obtient

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Applications définies sur un intervalle fermé et borné

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application où $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite développer f en séries de Fourier. Pour ce faire, on cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction de g à $[a, b]$ coïncide avec f.

Si g satisfait les conditions du théorème de Dirichlet, on aura

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

aux points où g est continue. En particulier, aux points où f est continue

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Applications définies sur un intervalle fermé et borné

Propriété

Soit $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux telle que $f(a) = f(a+2\pi)$. Alors il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux qui coïncide avec f sur $[a, a+2\pi]$.

Preuve

On translate le graphe de f sur les intervalles de la forme $[a+2k\pi, a+2(k+1)\pi]$ qui recouvrent $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [a+2k\pi, a+2(k+1)\pi], \text{ et on définit } g \text{ sur } [a+2k\pi, a+2(k+1)\pi]$$

$$\text{par } g(x) = f(x-2k\pi)$$

On vérifie bien que g est 2π-périodique et coïncide sur $[a, a+2\pi]$ avec f. □

Exemple 3

Développons en série de Fourier la fonction e^x sur l'intervalle $]0,\pi[$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \in]0,\pi[\\ e^{-x} & si \quad x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Alors f vérifie les conditions de la propriété précédente et donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique qui coïncide avec f sur $]-\pi,\pi[$. La fonction g est paire et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \, dx = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx = 2\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}.$$

Donc pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}\cos(nx).$$

Relations de Bessel-Parseval

Théorème 1 (Bessel-Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux, avec $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$. Alors, on a (Inégalité de Bessel)

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2 \, dx,$$

En plus, les séries $\sum_{n\geq 0} |c_n|^2$, $\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ sont convergentes et on a (Égalité de Parseval)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2 \, dx,$$

où les a_n, b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f et les c_n sont les coefficients en écriture complexe.

Remarque

Donc si f est 2π-périodique (et continue par morceaux ou plus généralement Riemann intégrable), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx.$$

L'une des beautés de cette identité est qu'elle a lieu même si la série de Fourier diverge ou a une somme différente de f en certains point !

Relations de Bessel-Parseval

Exemple 1 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $0 < \alpha < \pi$. On a $a_0 = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $\;a_n = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}$. En appliquant la formule de Parseval, on obtient :

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{4\sin^2(n\alpha)}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\alpha}{\pi},$$

puis

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) = \frac{\alpha\pi - \alpha^2}{2}.$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

On a $a_0 = \pi$, $\quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
En appliquant l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Interprétation géométrique et vectorielle

À la lumière de l'identité de Parseval, on peut réinterpréter la théorie des séries de Fourier en utilisant les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceaux. Alors E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni des opérations usuelles

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

On définit

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais pas forcément définie positive. Cependant, elle conserve beaucoup de propriétés d'un produit scalaire.

Interprétation géométrique et vectorielle

Si on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = 0,$$

alors f est nulle partout, sauf en un nombre fini de points. Pour pouvoir parler d'un produit scalaire, on *identifie* donc f et g si elles sont identiques sauf en un nombre fini de points sur $[0, 2\pi]$.

Ainsi sur ce nouvel espace, l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle$ devient un produit scalaire.

On peut aussi se restreindre à l'espace des applications continues où $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire.

Interprétation géométrique et vectorielle

Définition 1

On appelle semi-norme de la convergence en moyenne quadratique d'une fonction $f \in E$, le nombre réel

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, considérons l'application

$$e_n : x \mapsto e_n(x) = e^{inx}.$$

Alors $e_n \in E$.

Interprétation géométrique et vectorielle

Propriété 1

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans E.

Propriété 2

Soit $f \in E$. Le coefficient de Fourier c_n (de l'écriture complexe) de f vérifie

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

Remarquons que $c_n e_n$ est la projection orthogonale de f sur la droite dirigée par e_n.

Propriété 3

Soit $f \in E$. On a $\frac{1}{2} = \| \cos(n\cdot)\|_2^2 = \| \sin(n\cdot)\|_2^2$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et les coefficients de Fourier a_n, b_n de f vérifient

$$a_n = 2 \langle \cos(nx) | f \rangle \,, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n = 2 \langle \sin(nx) | f \rangle \,, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Merci de votre attention !