

# Cours 4. Notions sur les Équations aux Dérivées Partielles (ÉDP)

Mathématiques 4

5 février 2024

## Quelques rappels

Pour étudier un certain nombre de phénomènes, on peut utiliser une version locale des lois de la physique : mécanique (classique, quantique, relativiste), électromagnétisme, acoustique, thermodynamique etc.

Cette étude aboutit généralement à une modélisation mathématique des différents phénomènes utilisant des équations différentielles ordinaires (souvent raccourci en ÉDO ou EDO) ou des *Équations aux Dérivées Partielles* (souvent raccourci en ÉDP ou EDP).

## Définition 1

Soit  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Si la limite

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

existe (et est finie), on l'appelle la **i-ème dérivée partielle de  $f$**  au point  $(a_1, \dots, a_n) \in D$  et on la note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$ .

Si pour tout  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ ,  $f$  admet une  $i$ -ème dérivée partielle au point  $\bar{a}$ , l'application  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$  est appelée la **i-ème dérivée partielle de  $f$**  (ou la dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$ ). Si toutes ces fonctions sont continues, on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ .

## Exemple 1

Considérons la fonction  $f(x, y) = xy$ . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(b+h) - ab}{h} = a.$$

## Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$ , on fixe les autres variables et on calcule la dérivée usuelle à une variable où la variable est  $x_i$ . Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} = x.$$

## Définition 2

Soit  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Si toutes les dérivées partielles de  $f$  existent en un point  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ , alors on appelle **gradient de  $f$  au point  $\bar{a}$**  le vecteur

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right)$$

## Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

## Définition 3

La **dérivée partielle de  $f$  d'ordre  $j$**  par rapport aux variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_j}$  est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}} \right).$$

## Exemple 2

Considérons la fonction  $f(x, y) = x^4 + y^3$ . Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

De façon itérative, si toutes les dérivées partielles d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  de  $f$  existent et sont continues sur tout  $D$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $D$ .

## Définition 4

Le **laplacien** d'une fonction de classe  $C^2$   $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

# Composition des fonctions de plusieurs variables

## Proposition 5 (Règle de la chaîne)

Soient  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant des dérivées partielles et  $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$  une application dérivable. Alors, l'application  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la composition  $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt},$$

où les  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sont calculées en  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  et les  $\frac{dx_i}{dt}$  en  $t$ .

## Attention

Le choix des notations n'est pas anodin pour mener à bien ces calculs !

## Exercice (ai-je bien compris ?)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto f(x, x)$ . (Indication : ce n'est **pas**  $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ )

Une **équation aux dérivées partielles** d'ordre  $m$  est une relation entre une fonction de plusieurs variables  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et ses dérivées partielles :

$$F\left(\bar{x}, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0. \quad (E)$$

Le plus souvent, le problème est posé sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . On cherche des applications  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des **conditions sur le bord**  $\partial D$  (on parle aussi de **conditions initiales** lorsque l'une des variables représente le temps).

La forme générale d'une **équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** est

$$(E) \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta u = f,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta$  sont des constantes et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une application appelée le second membre de l'équation.

On dit que l'équation  $(E)$  est :

- *elliptique* si  $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ ,
- *parabolique* si  $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$ ,
- *hyperbolique* si  $4\alpha\gamma - \beta^2 < 0$ .

## Exemples

- L'équation des ondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  est hyperbolique.
- L'équation de Laplace (ou Poisson)  $\Delta u = 0$  (ou  $\Delta u = f$ ) est elliptique.
- L'équation de la chaleur  $\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  est parabolique ( $c > 0$ ).

La propagation d'une onde sur une **corde infinie** est modélisée par l'équation des ondes sur  $\mathbb{R}$

$$(EO1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions  $u_0$  et  $u_1$  sont respectivement, l'état et la vitesse initiaux (**conditions initiales**).

## Remarque

L'équation étant d'ordre *deux* en temps en temps, il est naturel d'imposer les *deux* conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  en  $t = 0$ .

## Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

Supposons que  $u_0$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $u_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors il existe une unique solution de (EO1) donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( u_0(x + ct) + u_0(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy .$$

Cette expression est parfois appelée **formule de D'Alembert**.

# Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une **demi-corde (infinie)**. Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \end{array} \right.$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions  $u_0$  et  $u_1$  sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante. Si les conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  dans (EO2) sont les restrictions de fonctions paires définies sur tout  $\mathbb{R}$  pour lesquelles le Théorème 1 et donc la formule de d'Alembert s'appliquent, on peut tirer profit de ce théorème pour résoudre également (EO2).

# Équation des ondes : solutions à variables séparées

Dans une géométrie adaptée, la **séparation des variables** consiste à chercher des solutions où on "sépare" les variables  $x$  et  $t$ , en écrivant

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On cherche donc les solutions qu'on appelle à **variables séparées** de l'équation des ondes. On suppose donc qu'il existe des fonctions  $F$  et  $G$  telles que

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F''G.$$

# Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que  $F(x) \neq 0$  et  $G(t) \neq 0$ , on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de  $x$  et celle de droite uniquement de  $t$ , il existe un réel  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda.$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$c^2 F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$G''(t) - \lambda G(t) = 0.$$

# Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si  $\lambda = 0$ , alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(t) = \alpha t + \beta.$$

- si  $\lambda > 0$ , alors

$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, \quad G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

- si  $\lambda < 0$ , alors

$$F(x) = a \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b \sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$
$$G(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda}t) + b \sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

# Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les **solutions**  $L$ -**périodiques** de l'équations des ondes :

$$(EO3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + L, t), \end{cases}$$

où on suppose que les fonctions  $u_0$  et  $u_1$  sont  $L$ -périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ( $\omega = \frac{2\pi}{L}$ )

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

# Équation des ondes : séries de Fourier

Supposons que la solution  $u(x, t)$  soit développable en séries de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En dérivant *formellement* terme à terme (utiliser le théorème de dérivation terme à terme des séries du Cours 2 pour un argument rigoureux au cas par cas), on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \geq 1} -(n\omega)^2 (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

# Équation des ondes : séries de Fourier

Par identification, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( (a_n''(t) + (cn\omega)^2 a_n(t)) \cos(n\omega x) \right. \\ &\quad \left. + (b_n''(t) + (cn\omega)^2 b_n(t)) \sin(n\omega x) \right) = 0 \end{aligned}$$

et en tenant compte des conditions initiales et utilisant l'unicité de la décomposition en série de Fourier de  $x \mapsto u(x, t)$  pour tout  $t$ , on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où  $\lambda_n = cn\omega$ .

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution  $u(x, t)$ .

# Équation des ondes : séries de Fourier

## Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2], \end{cases}$$

et  $u_1(x) = 0$ .

Remarque. Dans les résolutions avec séries de Fourier, plutôt que de dériver directement une série terme à terme comme ci-dessus, il est parfois plus rigoureux d'utiliser la propriété suivante, conséquence directe de la définition des  $a_n, b_n$  et d'une **intégration par parties** :

## Proposition

Si  $f$  est continue,  $L$ -périodique (avec toujours  $L = \frac{2\pi}{\omega}$ ) et  $C^1$  par morceaux, alors pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$a_n(f') = n\omega b_n(f), \quad b_n(f') = -n\omega a_n(f).$$

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

# Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions  $F(x)$  et  $G(y)$  telles que

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante  $\lambda$  telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

# Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si  $\lambda = 0$ , alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si  $\lambda > 0$ , alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad G(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si  $\lambda < 0$ , alors

$$F(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

# Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec condition initiale sur tout  $\mathbb{R}$

$$(EC1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur sur  $[0, +\infty[$  avec condition au bord en  $x = 0$

$$(EC2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0, t) = u_0(t), & \forall t > 0, \end{cases}$$

## Remarque

L'équation étant d'ordre 1 en temps, il est naturel de n'imposer qu'une seule condition initiale  $u_0$  en  $t = 0$  dans (EC1).

Grâce aux séries de Fourier, on peut démontrer le résultat suivant (cf. TD4) :

## Théorème 3

Soient  $c > 0$  et  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  par morceaux, continue et  $2\pi$ -périodique. Alors il existe une unique solution  $u$  de (EC1) vérifiant

- pour tout  $t > 0$ ,  $u(x, t)$  est  $2\pi$ -périodique comme fonction en  $x$ ,
- la dérivée partielle  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (resp.  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ) existe et est continue sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$ .

Cette dernière propriété dit exactement que, posant  $u_t : x \mapsto u(x, t)$ , on a  $u_t \rightarrow u_0$  uniformément sur  $\mathbb{R}$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .

## Théorème 4

Soient  $c > 0$  et  $u_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  par morceaux, continue et  $2\pi$ -périodique. Alors il existe une unique solution  $u$  de (EC2) vérifiant

- pour tout  $x > 0$ ,  $u(x, t)$  est  $2\pi$ -périodique comme fonction en  $t$ ,
- la dérivée partielle  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (resp.  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ) existe et est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$ .

## Équation des ondes : séries de Fourier

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application. On lui associe l'équation homogène (sans second membre)

$$(EH) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée  $(EH)$  est un espace vectoriel de dimension 2.

Pour résoudre l'équation  $(E)$ , on calcule une solution particulière  $y_0$  de  $(E)$  et on résout l'équation homogène associée  $(EH)$ .

Si  $y_{EH}$  est la solution générale de  $(EH)$  alors la solution générale de  $(E)$  est

$$y_E = y_{EH} + y_0.$$

Pour résoudre l'équation homogène ( $EH$ ) on associe l'équation caractéristique

$$(EC) \quad ar^2 + br + c = 0.$$

- Si  $\Delta > 0$  alors  $(EC)$  admet deux solutions réelles  $r_1, r_2$ . Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de  $(EH)$  et donc la solution générale de  $(EH)$  est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation caractéristique ( $EC$ ) admet une racine réelle double  $r$ . Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx}, e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de ( $EH$ ) et donc la solution générale de ( $EH$ ) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation caractéristique ( $EC$ ) admet deux racines complexes conjuguées  $\alpha + i\beta$ ,  $\alpha - i\beta$ . Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de ( $EH$ ) et donc la solution générale de ( $EH$ ) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

## Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$(EO) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + 2, t), \end{cases}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2], \end{cases}$$

et  $u_1(x) = 0$ .

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions  $u_0$  et  $u_1$ . Comme  $u_1$  est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de  $u_0$  (en toute rigueur celui de la fonction  $\bar{u}_0$  définie sur  $\mathbb{R}$ , 2-périodique et qui coïncide avec  $u_0$  sur  $[0, 2]$ ).

La fonction  $\bar{u}_0$  étant alors paire on a  $b_n = 0$ , reste donc à calculer  $a_n$ . On a ( $T = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$ )

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x) dx = \int_0^2 u_0(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$ , on a

$$a_n = \int_0^2 u_0(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (2-x) \cos(n\pi x) dx .$$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx &= \left[ \frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} . \end{aligned}$$

Avec le changement de variable  $t = 2 - x$ , on obtient

$$\int_1^2 (2 - x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}.$$

D'où, on conclut

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2}.$$

La série de Fourier de  $u_0$  est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme  $\bar{u}_0$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout  $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est normale (donc uniforme) sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u(x, t)$  une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En dérivant formellement terme à terme, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \geq 1} (-(n\omega)^2 a_n(t) \cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où  $\lambda_n = cn\omega$ .

Comme  $\omega = \pi$  et avec ce qui précède, on obtient

$$(1) \quad a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = 1, \quad a_0'(0) = 0$$

$$(2) \quad a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a_n'(0) = 0$$

$$(3) \quad b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = 0, \quad b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1.$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est  $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$  dont les solutions sont  $r = \pm icn\pi$ . La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a'_n(0) = C_2 cn\pi = 0,$$

d'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement  $b_n(t) = 0$ .

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \right) \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x).$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !