Intégration généralisée. Mesures.

1 Rappels sur les primitives et les intégrales sur un segment

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1. Une primitive sur I d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée F' de F satisfait $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Rappel : si F est une primitive et c est une constante $F + c$ est encore une primitive.
L'intégrale d'une fonction continue (ou continue par morceaux) a été définie en TMB par limite de sommes de Riemann. Mais dans la pratique, on utilise des primitives connues et on utilise le *théorème fondamental du calcul* :

Théorème 0.1 (Théorème fondamental du calcul). *Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé et borné I (aussi appelé segment). Soit F une primitive de f, alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exercice 1. (Type TMB, à réviser si non maitrisé)

Calculer les primitives suivantes :

$$1) \int x^3 dx, \qquad 2) \int \sin x \cos x dx, \qquad 3) \int \frac{\ln(x)}{x} dx,$$
$$4) \int x \sin(x) dx, \qquad 5) \int x \cos(x) dx, \qquad 6) \int x e^x dx \,.$$

1. C'est une primitive usuelle $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (on oublie souvent le c pour désigner *une* primitive plutôt que *toutes* les primitives).
2. On utilise une dérivée d'un produit $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$ la dérivée de $\frac{(u(x))^2}{2}$ est $u(x)u'(x)$ donc
$$\int \sin x \cos x dx = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2}$$
3. Même méthode avec $u(x) = \ln(x), u'(x) = 1/x$ donc une primitive sur $]0, +\infty[$ est
$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$
4. On fait une intégration par partie : $u(x) = x, v'(x) = \sin(x)$, soit $v(x) = -\cos(x), u'(x) = 1$:

$$\int v'(x)u(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

5. De même on obtient :

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) + \cos(x),$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x.$$

Remarque 0.1. Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction $I \to \mathbb{R}$. Si f est à valeurs positives, l'intégrale de f sur le segment I est l'aire du domaine

$$D = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

autrement dit $\int_a^b f(x)dx = Aire(D)$. En général, si f est à valeurs réelles, l'intégrale de f sur le segment I est la différence de l'aire des domaines

$$D_+ = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

$$D_- = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

soit $\int_a^b f(x)dx = Aire(D_+) - Aire(D_-)$. C'est l'aire *algébrique* située entre l'axe Ox et le graphe de f. L'aire *géométrique* est quant à elle la quantité

$$\int_a^b |f(x)|dx = Aire(D_+) + Aire(D_-).$$

2 Intégrales impropres

Définition 2. Pour une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I qui ne contient pas toutes ses bornes ou qui n'est pas borné, l'intégrale impropre est définie de l'une des manières suivantes.

1. Dans le cas $I = [a, b[$ avec $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

2. Dans le cas $I =]a, b]$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

3. Dans le cas $I =]a, b[$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on fixe un $c \in]a, b[$ et on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ces définitions s'appliquent dès que les limites existent et sont finies. On dit alors que l'intégrale est **convergente**.

Dans cette partie du cours, on s'occupera surtout du cas $I = [a, b[$ puisque le cas $I =]a, b]$ est similaire en remplaçant f par $x \mapsto f(-x)$.

Le cas le plus important est le cas suivant (car on va disposer de théorèmes de comparaison avec des fonctions *positives* de références) :

Définition 3. Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I (comme dans la définition précédente) est dite **intégrable** sur I si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et on dit même alors qu'elle est **absolument convergente**.

Exercice 2. Convergence et valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

La limite de la fonction intégrée est infinie est en 0^+. Pour $t > 0$, on calcule donc

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}.$$

La limite quand $t \to 0^+$ est finie donc l'intégrale converge (i.e. est convergente) et vaut 2.

2.1 Exemples de référence (à *très bien* connaître)

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut 1. En effet, $\int_0^A e^{-x}dx = 1 - e^{-A} \to 1$ quand $A \to +\infty$.
   Plus généralement, $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ **converge ssi** $a > 0$**, et vaut alors** $1/a$.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$ **et vaut alors**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1}, \ \textbf{pour}\ \alpha > 1.$$

   La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = +\infty \text{ pour } \alpha \leqslant 1,$$

   pour dire que cette intégrale diverge.
   Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^A t^{-\alpha}dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A = \frac{A^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ et $A^{-\alpha+1} \to 0$ quand $A \to +\infty$ pour

$$-\alpha + 1 < 0 \iff \alpha > 1\,,$$

   tandis que $A^{-\alpha+1} \to +\infty$ quand $A \to +\infty$ pour $\alpha < 1$.
   Si $\alpha = 1$, $\int_1^A \frac{1}{t}dt = \ln(A) \to +\infty$ quand $A \to +\infty$.
3. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ **converge si et seulement si** $\alpha < 1$ **et vaut alors**

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1 - \alpha}, \ \textbf{pour}\ \alpha < 1\,.$$

   La fonction intégrée étant positive, on écrit parfois

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = +\infty \text{ pour } \alpha \geqslant 1,$$

   pour dire que cette intégrale diverge.
   En effet si $\alpha \neq 0$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ et $a^{-\alpha+1} \to +\infty$ quand $a \to 0^+$ pour $\alpha > 1$, tandis que $a^{-\alpha+1} \to 0$ quand $a \to 0^+$ pour $\alpha < 1$.
   Si $\alpha = 1$, on a $\int_a^1 \frac{1}{t}dx = |\ln(a)| \to +\infty$ quand $a \to 0^+$.

4. Attention toutefois : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = +\infty$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en combinant les 2 points précédents).
5. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ **diverge**.
   En effet, on a $\int_e^{A} \frac{1}{t\ln(t)}dt = [\ln(\ln(t))]_e^A = \ln(\ln(A)) - \ln(1) \to +\infty$ quand $A \to +\infty$.
6. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt$ **converge si et seulement si** $\beta > 1$ **et vaut alors** $\frac{1}{\beta-1}$ (voir TD).

2.2 Théorèmes de comparaison

Le contexte est le suivant : on se donne une fonction continue par morceaux $f : I = [a, b[\to \mathbb{R}$ et on étudie la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$.
Une méthode consiste à chercher une fonction continue par morceaux *positive* $g : I = [a, b[\to [0, +\infty[$ appropriée et à comparer f à g. On rappelle du Cours 1 que $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to b^-$ s'il existe $M \in [a, b[$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in [M, b[, \qquad |f(x)| \leqslant Cg(x)\,.$$

Les deux résultats de base à utiliser sont les suivants.

Théorème 0.2. *Théorème de comparaison (I).*

1. *Si $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to b^-$ et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge (absolument).*
2. *Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [M, b[$ et si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ (i.e. diverge), alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.*

En particulier, le Point 1 du théorème précédent est évidemment vrai en remplaçant $f(x) = O(g(x))$ par l'hypothèse plus forte $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to b^-$.

Théorème 0.3. *Théorème de comparaison (II).*
Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$. Alors,

1. *si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ;*
2. *si $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ diverge alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.*

Exercice 3. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1/\int_1^{+\infty} \frac{1-\sin x}{x^2}dx, \quad 2/\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x}dx, \quad 3/\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}dx\,.$$

2.3 Une méthode pour le cas non intégrable : l'intégration par parties

Quand une intégrale fait intervenir $f(x) = \sin(x), \cos(x), e^{ix}$ ou bien d'autres fonctions "oscilantes" bornées ayant une primitive bornée, il peut être utile d'utiliser une intégration par parties (ou plusieurs) pour se ramener à une intégrale absolument convergente. Donnons un quelques cas typiques.

Exercice 4. (voir TD) Montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\,.$$

Exercice 5. Montrer que l'intégrale suivante est divergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \,.$$

La combinaison des deux exercices précédents montre bien qu'une intégrale convergente n'est pas nécessairement absolument convergente.

Exercice 6. Montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \,.$$

L'exercice précédent montre que le fait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente n'implique pas nécessairement que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

3 Mesures et intégrale de Lebesgue

3.1 Mesures : motivation, définition, exemples

Motivation. En physique, on modélise à la fois des répartitions de masses continues (ayant une densité de masse donnée par une fonction par exemple continue) et des distributions discrètes : les points matériels. On voudrait pouvoir voir les points matériels comme des généralisations des fonctions de densité de masse, où la masse se concentre en un point.

L'idée est de généraliser la notion d'intégrale. Étant donné une fonction continue (qui représente une grandeur observable), l'intégrale donne un nombre (une observation), qui représente une moyenne de la fonction (du moins une fois l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle d'intégration). Elle a différentes propriétés importantes : elle est linéaire, elle préserve les inégalités. De plus, elle permet certains passages à la limite comme celui donné par le lemme suivant vu au Cours 2 :

Lemme 0.4. *Soient f_k, f des fonctions continues sur $[a,b]$ telles que la suite de fonctions (f_k) converge uniformément vers f alors $\int_a^b f_k(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$ quand $k \to +\infty$.*

On rappelle que la suite de fonctions (f_k) converge uniformément vers f si, gardant la notation standard $||f_k - f||_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)|$, on a

$$||f_k - f||_\infty \to 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

On appelle $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues dites *à support compact* (c'est-à-dire nulles en dehors d'une partie bornée du type $[-M,M]^n \subset \mathbb{R}^n$ pour $M > 0$ fixé assez grand).

Définition 4. Une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire $\mu : C_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ continue au sens suivant : si $(f_m)_{m\geqslant 0}, f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ sont nulles en dehors du même $[-M,M]^n$ et $||f_m - f||_\infty \to 0$ alors $\mu(f_m) \to \mu(f)$ quand $m \to +\infty$.

On note alors

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu(dx) = \int f d\mu.$$

Une mesure est dite *positive* si $\mu(f) \geqslant 0$ dès que $f \geqslant 0$. Une mesure est dite *de masse finie* si

$$|\mu|(\mathbb{R}^n) := \sup\{\mu(f) : -1 \leqslant f \leqslant 1\} < +\infty.$$

Si μ est positive et de masse finie, on note "la masse totale" $|\mu|(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n) = \sup\{\mu(f) : 0 \leqslant f \leqslant 1\}$ (on aura $|\mu|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 d\mu$).

Dans la suite, on se restreint surtout au cas $n = 1$ (parfois $n = 2$). Notre notion de mesure est parfois appelée "mesure signée de Radon" sur $\mathbb{R}^n$.

Exemples

Exemple 0.1. (Mesure de Lebesgue) Si f est continue à support $[a, b]$ (i.e. nulle en dehors de $[a, b]$), on pose $\lambda(f) = \int_a^b f(x)dx$. Le lemme 0.4 implique que c'est une mesure, appelée *mesure de Lebesgue*. Elle est positive car l'intégrale d'une fonction positive est positive. Elle n'est **pas** de masse finie.

Exemple 0.2. (Mesure à densité continue) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si f est continue à support $[a, b]$, on pose $T_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Le lemme 0.4 implique que c'est une mesure appelée mesure de densité g (par rapport à la mesure de Lebesgue). Elle est positive si g est une fonction positive. Elle permet de représenter une distribution de masse de densité $g(x)$ en x.

Exemple 0.3. (Masse de Dirac en a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue, on pose $\delta_a(f) = f(a)$. Il est simple de voir que c'est une mesure positive, appelée *mesure de Dirac*.

Exemple 0.4. (Distribution surfacique sur le cercle) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, on pose

$$S_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))dt.$$

Il est simple de voir que c'est une mesure positive, appelée *mesure uniforme sur le cercle de rayon r*.

Linéarité. Si μ, ν sont des mesures : $c\ \mu + d\ \nu$ est encore une mesure, donc l'intégrale est linéaire en la mesure (par définition) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(c\mu + d\nu)(dx) = c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mu(dx) + d \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\nu(dx).$$

Mesures de Dirac comme limites

Définition 5. (convergence des mesures) Une suite de mesures (μ_n) converge (vaguement) vers une mesure μ si pour toute fonction continue à support compact f, on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

Remarque 0.2. Par exemple, $\delta_n(f) = f(n) \to 0$ pour tout n à support compact donc $\delta_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui autorise donc une perte de masse à l'infini. On utilise parfois (mais pas dans ce cours) pour les mesures finies une convergence plus forte (dite étroite) qui implique $\mu_m(\mathbb{R}^n) \to \mu(\mathbb{R}^n)$ (convergence/conservation de la masse).

Exemple 0.5. (Masse de Dirac approchée par une fonction en forme de bosse et intuition physique) Soit ρ une fonction supportée sur $[-1, 1]$ positive avec $\int_{-1}^1 \rho(x)dx = 1$ (par exemple $\rho(x) = 1 + x$ si $x < 0$, $\rho(x) = 1 - x$ si $x > 0$). Soit $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ est à support $[-1/n, 1/n]$. Sur un dessin (cf cours d'amphi), on voit que ce changement d'échelle revient à regarder une bosse de même masse 1 mais "vue de loin". A la limite $n \to +\infty$, on va regarder de si loin que l'on ne verra plus qu'une "masse ponctuelle".
Formellement, on a la limite de mesures

$$\lim_{n\to+\infty} T_{\rho_n} = \delta_0.$$

En effet, on a $T_{\rho_n}(f) = \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\rho_n(x)dx$ est proche de $\int_{-1/n}^{1/n} f(0)\rho_n(x)dx = f(0)$ par continuité de f et vu le choix $\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(x)dx = \int_{-1}^1 \rho(x)dx = 1$ par changement de variable.

Remarque 0.3. On remarque que $\rho_n(x) \to 0$ si $x \neq 0$ et $\rho_n(0) = n \to +\infty$. Mais la limite simple $g = +\infty 1_{\{0\}}$ a une intégrale nulle $\int g(x)f(x)dx$ (au sens de la section suivante). La limite simple ne suffit pas à comprendre la “fonction généralisée" qu'est la mesure de Dirac. L'intégrale $\int f(x)\delta(dx) = f(0)$ est pourtant souvent notée $\int f(x)\delta(x)dx$ en physique (**pas** dans ce cours de mathématiques).

3.2 Intégrale de Lebesgue (facultatif)

Dans cette section on suppose que μ est **une mesure positive**. Pour avoir des théorèmes limites plus simples, on étend l'intégrale $\int f(x)\mu(dx)$ à des f non continues. C'est une extension compliquée au delà du niveau de ce cours. Deux conditions sont nécessaires sur f. On dit que f est *mesurable* (ou borélienne) si elle est limite simple de fonctions continues : c'est à dire il existe (f_n) suite de fonctions continues telle que pour tout x, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Dans ce cas, on peut donner sens à $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mu(dx)$ (en utilisant des théorèmes limites de la section suivante).

Définition 6. Une fonction mesurable f est dite *intégrable* si $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mu(dx) < +\infty$. On note $L^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$ l'espace des fonctions intégrables par rapport à μ. On peut alors définir

$$\int f(x)\mu(dx).$$

Dans le cas $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, on note $\int f(x)\lambda(dx) = \int f(x)dx$ car la valeur étend le cas où f est continue par morceaux intégrable (au sens de la section 1).
On peut alors énoncer un certain nombre de propriétés collectées dans la proposition suivante.

Proposition 0.5. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, avec μ mesure* ***positive***

1. *pour $c, d \in \mathbb{R}$, $cf + dg \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ et l'intégrale est linéaire :*

$$\int (cf + dg)(x)d\mu(x) = c\int f(x)d\mu(x) + d\int g(x)d\mu(x).$$

2. *$f \leqslant g \Rightarrow \int f d\mu \leqslant \int g d\mu$. En particulier, $f \geqslant 0 \Rightarrow \int f d\mu \geqslant 0$.*
3. *$|h| \leqslant |f|$ et h mesurable implique $h \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$.*
4. *En particulier si h mesurable bornée alors $hf \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$.*
5. *$|\int h d\mu| \leqslant \int |h| d\mu$.*

Dans la suite de ce cours, on considère que **toutes les fonctions rencontrées sont mesurables** sans justification.
L'**indicatrice** d'un sous-ensemble $I \subset J$ est la fonction $1_I : J \to \mathbb{R}$ donnée par $1_I(x) = 1$ si $x \in I$ et $1_I(x) = 0$ si $x \notin I$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par définition, on note

$$\int_I f d\mu = \int_{\mathbb{R}} 1_I f d\mu.$$

Définition 7. Une fonction mesurable g sur $\mathbb{R}$ est dite localement intégrable par rapport à μ si $g1_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables localement intégrables par rapport à μ.
Si $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, on dit sans plus de précision que g est localement intégrable et on note $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) := L^1_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$.

Exemple 0.6. (produit d'une mesure par une fonction) Soit $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$. Si f est continue sur $[a, b]$ (donc bornée), alors fg est intégrable sur $[a, b]$, et on pose pour f nulle en dehors de $[a, b]$: $(g\mu)(f) = \int_a^b f(x)g(x)\mu(dx)$. Il est facile de voir que c'est une mesure $g\mu$ produit de g avec μ.
Si g, μ sont positives, $g\mu$ est positive et si $g \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$, $g\mu$ est de masse finie.