# Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette partie $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (disons $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Soit finalement $A \subset E$ une partie de $E$ et $\mu$ une mesure positive sur $I$ (restriction d'une mesure sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).

**Définition 1.** Soient $f : A \times I \to \mathbb{C}$ et $\mu$ une mesure sur $I$. On suppose que pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable, autrement dit $f \in L^1(I, \mu)$. Dans ce cas, on peut poser :

$$F(x) := \int_I f(x,t)\mu(dt)\,.$$

On définit ainsi une *intégrale dépendant d'un paramètre* $x$ la fonction $F : A \to \mathbb{C}$.

*Exemple* 0.1. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$
Dans ce cas on peut calculer en changeant de variable pour $x \neq 0$ ($F(0) = 1$ est clair) :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{d(xt)}{1+x^2t^2} = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}.$$

L'étude des intégrales dépendant d'un paramètre est surtout utile quand on ne peut pas calculer l'intégrale (cas de la convolution, des transformées de Fourier ou de Laplace plus tard). En fait, On peut voir Arctan comme une fonction définie en utilisant une intégrale dépendant d'un paramètre (si on ne connaît pas la fonction tangente pour la définir comme son inverse).

**Théorème 0.1** (Théorème de continuité avec hypothèse de domination)**.** *Soit $f : A \times I \to \mathbb{C}$.*
*On suppose :*

1. *Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$, est mesurable (par exemple continue par morceaux) sur $I$.*
2. *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in A$.*
3. *(Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall t \in I, \forall x \in A, \quad |f(x,t)| \leqslant g(t).$$

*Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue en $x_0$.*

On remarquera que **dans l'hypothèse de domination, la fonction $g$ ne dépend pas du paramètre** $x$, mais seulement de la variable d'intégration $t$. On remplace souvent 1 et 2 par "$f$ continue sur $A \times I$".

*Exemple* 0.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa *transformée de Fourier* est définie par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx}dx.$$

Par le théorème ci-dessus, elle est continue sur $\mathbb{R}$, utilisant notamment la domination

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall p \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x)e^{-ipx}| = |f(x)||e^{-ipx}| \leqslant |f(x)|\,,$$

puis que $f$ est intégrable (plus de détails aux chapitres suivants).

*Exercice* 1. On verra plus tard le cas où $f$ n'est pas intégrable donné par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on peut alors calculer (comme intégrale impropre pour $p \neq \pm 1$)

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx}dx = \pi 1_{[-1,1]}(p),$$

qui n'est clairement pas continue. L'hypothèse de domination est donc nécessaire dans l'exemple précédent, et donc aussi dans le théorème 0.1.

**Théorème 0.2** (Théorème de dérivations successives)**.** *Soit $f : ]a,b[\times I \to \mathbb{R}$ avec $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est à dire $f$ est $k$ fois dérivable avec toutes ses dérivées continues).*
*On suppose qu'il existe $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ intégrables sur $I$ telles que pour $p = 0, ..., k$ :*

$$\forall x \in ]a,b[, \forall t \in I \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \phi_p(t).$$

*Alors la fonction $x \mapsto F(x) := \int_I f(x,t)d\mu(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a,b[$ et on a pour $p \leqslant k$*

$$\frac{d^p F}{dx^p}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)d\mu(t).$$

*(« la dérivée p-ème de l'intégrale par rapport au paramètre est l'intégrale de la dérivée (partielle) p-ème par rapport au paramètre »)*

*Exercice* 2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. Montrer que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   Correction : en effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$

   $$|e^{-t^2}\cos(tx)| \leqslant e^{-t^2/2} \leqslant g(t) = e^{1/2-t}\,,$$

   car

   $$(t-1)^2 \geqslant 0 \iff t^2 - 2t + 1 \geqslant 0 \iff \frac{t^2}{2} \geqslant t - 1/2$$

   pour $t \geqslant 0$; comme g est intégrable $\int_0^{+\infty} g(t)dt = e^{1/2}$, on déduit du théorème de comparaison I que $f(t,x) = e^{-t^2}\cos(tx)$ est intégrable en $t$ sur $[0, +\infty[$ pour tout $x$ fixé. La fonction $F$ est donc bien définie.
2. Montrer que $F$ est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
   Correction : $f$ est $\mathcal{C}^1$ et dominée par $g$ indépendante de $x$; il faut aussi dominer sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) = -te^{-t^2}\sin(tx)$. Or $te^{-t^2/2}$ est bornée par $C$ (continue et tend vers 0 en $\pm\infty$ ou max atteint pour $e^{-t^2/2}(1-t^2) = 0$ en $t = 1$, minimum atteint en $t = -1$, donc bornée par $C := e^{-1/2}$) donc on a la domination $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right| = |te^{-t^2}\sin(tx)| \leqslant Ce^{-t^2/2} \leqslant Cg(t)$. Par le théorème de dérivation $F$ est $\mathcal{C}^1$ et

   $$F'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(tx)dt.$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2}F(x) = 0$
   Correction : on intègre par parties $u(t) = e^{-t^2}$, $u'(t) = -2te^{-t^2}$, $v(t) = \sin(tx)$, $v'(t) = x\cos(tx)$, ce qui donne
$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \frac{1}{2}[e^{-t^2}\sin(tx)]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = 0 - \frac{x}{2}F(x).$$
4. En déduire que la fonction $G$ donnée par $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   Correction : c'est le cas car
$$G'(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\left(F'(x) + \frac{x}{2}F(x)\right) = 0\,.$$
5. Conclure que $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Correction : en effet, on évalue en passant en polaire puis on pose $u = r^2$
$$G(0)^2 = F(0)^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^2-s^2}dtds = \int_0^{+\infty} dr\int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2}r = \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} due^{-u} = \frac{\pi}{4}.$$

# 1 Compléments et idées de preuve des théorèmes précédents

## 1.1 Théorème de Fubini

Au lieu d'intervertir intégrale et dérivée, on intervertit intégrale et intégrale. Ici $I, J$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mu, \nu$ des mesures positives sur $I, J$ respectivement.

**Théorème 0.3** (Théorème de Fubini)**.** *Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable*

1. *(Fubini-Tonelli) si $f \geqslant 0$ alors on a égalité des nombres dans $[0, +\infty]$ :*
$$\int_J d\nu(y)\int_I d\mu(x)f(x,y) = \int_I d\mu(x)\int_J d\nu(y)f(x,y)$$
2. *(Fubini) Si $\int_J d\nu(y)\int_I d\mu(x)|f(x,y)| < +\infty$ alors*
$$\int_J d\nu(y)\int_I d\mu(x)f(x,y) = \int_I d\mu(x)\int_J d\nu(y)f(x,y).$$

## 1.2 Théorème de convergence dominée

Le résultat suivant est le fondement de l'étude des intégrales à paramètres. On se restreint au cas de $\mathbb{R}$ mais le cas $\mathbb{R}^n$ est similaire. Soit $\mu$ une **mesure positive** sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 0.4** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue TCD)**.** *Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ pour (presque) tout $x$. On suppose qu'il existe une fonction $g$ intégrable sur $I$ telle que*
$$\forall t \in I\,, \qquad |f_n(t)| \leqslant g(t) \quad \textit{(condition de domination)},$$
*alors $f$ est intégrable et*
$$\int_I fd\mu = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \quad \textit{vaut} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n d\mu.$$

L'hypothèse de domination est importante comme le montre l'exemple élémentaire suivant.

*Exemple* 0.1. Soit $f_n = 1_{[n,n+1]}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$. On a $f_n(x) \to 0 = f(x)$ quand $n \to +\infty$, mais

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0 < \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1.$$

La plus petite domination $g$ des $f_n$ indépendante de $n$ est donnée par $g(x) = \sup_n f_n(x) = 1_{[0,+\infty[}$ et n'est pas une domination intégrable, i.e. $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = +\infty$. Le théorème ne s'applique **pas**.

C'est le théorème précédent qui permet de donner la preuve du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

*Preuve du théorème 0.1.* L'hypothèse de domination garantit que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable. Soit $x_n \in A$ tel que $x_n \to x_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x,t)$, pour chaque $t$, $f(x_n,t) \to f(x_0,t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure $\lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)dt = \int_I f(x_0,t)dt$. $\square$

## 1.3 Un meilleur résultat de dérivabilité des intégrales à paramètres

**Théorème 0.5.** *(Théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination) Soient $f : U \times I \to \mathbb{C}$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $i \in \{1, ..., n\}$. On suppose :*

1. *Pour tout $x \in U$, $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur $I$.*
2. *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur $U$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est mesurable.*
3. *(Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}_+$ (i.e. $\int_I g(t)\mu(dt) < +\infty$) telle que*
$$\forall t \in I, \forall x \in U, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| \leqslant g(t).$$

*Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)\mu(dt)$ admet une i-ème dérivée partielle sur $U$ et :*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mu(dt).$$

*Si de plus, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ est continue pour tout $t$ et tout $i$, $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U$*

*Démonstration dans le cas $\mathcal{C}^1$.* On fixe $x_0$ et montre la dérivabilité en $x_0$ de $F$ dans le cas où $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ est continue pour tout $t$. On pose

$$h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}, \quad \text{si} \quad x \neq x_0 \qquad \text{et} \qquad h(x_0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_I h(x,t)dt.$$

Il suffit donc de prouver que $x \mapsto \int_I h(x,t)dt$ est continue en $x_0$. Le cas $x < x_0$ étant similaire, on se restreint au cas $x > x_0$. Par hypothèse, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et $x \mapsto h(x,t)$ est continue. Enfin l'inégalité

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| = \int_{x_0}^{x} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)dy\right| \underbrace{=}_{y=x_0+s(x-x_0)} \left|(x - x_0)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + s(x - x_0), t)ds\right|$$

$$\leqslant (x-x_0)\int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+s(x-x_0),t)\right| ds$$

donne, pour $x > x_0$ : $|h(x,t)| \leqslant \sup_{u\in[x_0,x]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(u,t)\right| \leqslant g(t)$. La même inégalité étant évidente en $x_0$, on a la condition de domination et le théorème de continuité conclut. $\square$

# Transformée de Laplace

Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est dite de type exponentiel de paramètre $a \in \mathbb{R}$, s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$.

**Définition 2.** Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (ou bien une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$) mesurable, on pose

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

pour $s \in \mathbb{R}$ (pourvu que l'intégrale existe). En particulier, si $f$ est de type exponentiel de paramètre $a$, alors $\mathcal{L}[f](s)$ existe pour $s > a$.

## 2 Formules calculatoires

**Théorème 0.6** (Propriétés de bases de la transformée de Laplace)**.** *Les formules suivantes sont vraies dès que tous les termes ont un sens :*

1. *(Linéarité)* $\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ *et* $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$ *pour* $c \in \mathbb{C}$.
2. *(Retard fréquentiel) Si* $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[e^{at}f](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$.
3. *(Produit par t) Si f est de type exponentiel a, alors pour* $s > a$ *:*

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -(\mathcal{L}[f])'(s).$$

4. *(Dérivée) Si* $f, f'$ *sont de type exponentiel a alors pour* $s > a$,

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

5. *(Convolution) Si* $f, g$ *positives ou de type exponentiel, en posant* $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$, *on a :* $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

Dans le dernier point, on considère $f, g$ comme nulle pour $x < 0$ de sorte qu'avec la définition du chapitre suivant de la convolution :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

On verra au chapitre suivant la convolution de fonctions plus générales.

*Démonstration.*

1. Évident par linéarité de l'intégrale.

2. On écrit
$$\mathcal{L}[e^{at}f](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t} = \mathcal{L}[f](s-a)\,.$$
3. On écrit
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)te^{-st}dt\,.$$
Or $\frac{\partial}{\partial s}(f(t)e^{-st}) = -f(t)te^{-st}$. Si $f$ est de type exponentiel $a$, on a $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$, puis
$$|tf(t)| \leqslant Ce^{(a+\varepsilon)t}te^{-\varepsilon t}$$
et $te^{-\varepsilon t} \leqslant D$ vu sa limite nulle en $+\infty$ donc $tf$ est de type exponentiel $a+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc la domination pour $s > a + \varepsilon$ : $\left|\frac{\partial}{\partial s}(f(t)e^{-st})\right| \leqslant CDe^{(a+\varepsilon-s)t}$ par une fonction intégrable (vu le choix de $s$), donc par théorème de dérivation avec condition de domination, on a bien
$$(\mathcal{L}[f])'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$
pour $s > a+\varepsilon$. Mais comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a cela pour $s > a$.
4. On fait une intégration par partie $u = f, u' = f', v'(t) = se^{-st}, v(t) = -e^{-st}$ :
$$s\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)se^{-st}dt = [-f(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$
Or pour $s > a$, vu $|f(t)e^{-st}| \leqslant Ce^{(a-s)t} \to 0$ quand $t \to +\infty$, on trouve
$$s\mathcal{L}[f](s) = f(0)e^{-s0} + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(0) + \mathcal{L}[f'](s).$$
5. On calcule (en intervertissant les intégrales par le théorème de Fubini 0.3)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](s) &= \int_0^{+\infty}\int_0^t f(t-u)g(u)due^{-s(t-u)}e^{-su}dt\\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dt 1_{\{u\leqslant t\}} f(t-u)e^{-s(t-u)}g(u)e^{-su}\\ &= \int_0^{+\infty} du \int_u^{+\infty} dt f(t-u)e^{-s(t-u)}g(u)e^{-su} = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s).\end{aligned}$$

□

# 3 Exemples de référence

*Exemple* 0.2. On a
$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$
En effet, pour $n = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ (cf. Cours 5). Puis par le théorème 0.6, point 3, et par récurrence :
$$\mathcal{L}[t^n](s) = -\mathcal{L}[t^{n-1}]'(s) = -\left(\frac{(n-1)!}{s^n}\right)' = +\frac{n!}{s^{n+1}}$$

*Exemple* 0.3. En général, la plupart des exemples sont des sommes de séries entières de type $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et la transformée de Laplace (pourvu qu'elle fasse sens, par exemple si $f$ est de type exponentiel) est $\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$ au moins pour $s$ grand.

*Exercice* 3.

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

*Exercice* 4.

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)](s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Avec le retard fréquentiel, il suffit de traiter le cas $a = 0$. On écrit $\cos(\omega t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}$ donc la formule des séries s'applique avec $a_{2n} = \omega^{2n}(-1)^n, a_{2n+1} = 0$ d'où

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\omega^{2k}}{s^{2k}} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}[-\omega^2 s^{-2}]^{n+1} = \frac{1}{s}\times\frac{1}{1+\omega^2 s^{-2}} = \frac{s}{\omega^2+s^2}$$

par identification d'une série géométrique si $|\omega^2 s^{-2}| < 1$, soit en particulier pour $s > |\omega|$.
On peut traiter de façon similaire le cas du sinus ci-après.

*Exercice* 5.

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Pour varier les méthodes, obtenons maintenant ce résultat par calcul direct :

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}[e^{(a+i\omega)t}](s) - \mathcal{L}[e^{(a-i\omega)t}](s))$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{(s-a+i\omega)-(s-a-i\omega)}{(s-a-i\omega)(s-a+i\omega)}\right) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

# 4 Inversion de la transformation de Laplace pour les fractions rationnelles

La formule d'inversion de la transformation de Laplace est en général trop compliquée pour ce cours. En pratique, cette inversion se fait a l'aide des tables d'exemples : on connaît les transformées de Laplace de certaines fonctions et on essaie de se ramener à ces cas à l'aide des propriétés algébriques.

*Exercice* 6. Soit $Y(s) = \frac{b}{(s-a)^n}$, trouver $f$ telle que $\mathcal{L}[f] = Y$.
On identifie dans l'exemple 3 $f(t) = \frac{bt^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ (pour $t \geqslant 0$).

De plus, si $Y(s)$ est une fonction rationnelle, $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ pour deux polynômes $p$ et $q$, avec le degré de $q$ qui est strictement plus grand que le degré de $p$, on peut décomposer $Y(s)$ en éléments simples : le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe (des racines *complexes* de $q$) $s_1, \cdots s_k$ tels que $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$. Il s'en suit qu'on peut décomposer $Y(s)$ ainsi

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j}.$$

On peut trouver $a_{ij}$ par une formule. En effet, on a

$$Y(s)(s-s_i)^{m_i} = \sum_{j=1}^{m_i} a_{i,j}(s-s_i)^{m_i-j} + P(s)$$

avec $P(s_i)=0$ ainsi que les $m_i-1$ premières dérivées $P^{(k)}(s_i)=0$ pour $k<m_i$. Donc pour $1<j\leqslant m_i$

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

On trouve $f$ telle que $\mathcal{L}[f]=Y$ par linéarité. On prend $f=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} a_{i,j}f_{i,j}$ avec $\mathcal{L}[f_{i,j}](s)=\frac{1}{(s-s_i)^j}$.

**Méthode dans $\mathbb{R}$ pour trouver $f$ avec $\mathcal{L}[f]=Y$ pour $Y$ fraction rationnelle**

Si $Y(s)$ est une fonction rationnelle, $Y(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ avec $p,q$ des polynômes à coefficients réels (toujours avec le degré de $q$ qui est strictement plus grand que le degré de $p$). Si $s_0=a+ib$ est racine complexe de $q$ alors c'est aussi le cas du conjugué $\overline{s_0}=a-ib$ (et $(s-(a+ib))(s-(a-ib))=(s-a)^2+b^2$). Donc si $s_1,\cdots s_l$ sont les racines réelles de $q$, on a des nombres $a_1,b_1,\cdots a_\lambda,b_\lambda$ réels tels que

$$q(s)=a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}.$$

On peut montrer qu'on peut décomposer $Y(s)$ ainsi

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j}+\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{b_{i,j}+sc_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$

Les coefficients $a_{i,j},b_{i,j},c_{i,j}$ sont uniquement déterminés. Mais il n'y a pas de formule générale pour trouver $b_{i,j},c_{i,j}$, mais on peut utiliser la parité, des limites pour trouver ces coefficients.

*Exercice* 7. Soit $Y(s)=\frac{s^5+3s^3-s^2+s-1}{s^2(s^2+1)^2}$, trouver $f$ telle que $\mathcal{L}[f]=Y$.[1]

Posant $Y(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ avec $P(s)=s^5+3s^3-s^2+s-1$ et $Q(s)=s^2(s^2+1)^2=s^2(s+i)^2(s-i)^2$, on a bien $\deg(P)<\deg(Q)$ de sorte que le théorème de décomposition en éléments simples s'applique. Comme on dispose de plus de formules dans ce cas, on commence ici par travailler dans $\mathbb{C}$. Ce théorème affirme donc qu'il existe des nombres $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{C}^6$ (toujours autant que le degré du dénominateur de la fraction) uniques tels que :

$$Y(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}+\frac{c}{(s+i)^2}+\frac{d}{s+i}+\frac{e}{(s-i)^2}+\frac{f}{(s-i)}.$$

Calculons d'abord les coefficients associés à la partie polaire de pôle 0. On multiplie l'identité précédente par $s^2=(s-0)^2$ pour écrire

$$\frac{P(s)}{(s^2+1)^2}=a+bs+s^2\Bigg(\underbrace{\frac{c}{(s+i)^2}+\frac{d}{s+i}+\frac{e}{(s-i)^2}+\frac{f}{(s-i)}}_{:=R(s)}\Bigg).$$

*Comme aucune de ces fractions n'a pour pôle* 0 (en particulier pas $R$), on peut évaluer cette nouvelle identité en 0 contrairement à la précédente pour obtenir $P(0)/1^2=a$, soit $a=-1$. Dérivant maintenant cette dernière identité, on obtient

$$\frac{P'(s)(s^2+1)^2-P(s)\times 2s(s^2+1)}{(s^2+1)^4}=b+\big(s^2R'(s)+2sR(s)\big)\ ;$$

1. Indication : on pourra commencer par établir $Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{(s^2+1)^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}$.

évaluant à nouveau en 0 en utilisant que $R$ n'a pas de pôle en 0, on obtient $P'(0) = b$, soit $b = 1$. On peut alors faire le même travail pour trouver $c$ et $d$ : on multiplie l'identité initiale par $(s+i)^2$ pour écrire

$$\frac{P(s)}{s^2(s-i)^2} = c + d(s+i) + (s+i)^2 \Bigg( \underbrace{\frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{e}{(s-i)^2} + \frac{f}{(s-i)}}_{:=S(s)} \Bigg) ;$$

évaluant en $s = -i$ (plus de pôle maintenant en $s = -i$), on obtient $P(-i)/((-i)^2(-2i)^2) = c$, soit $c = i/4$. Remarquez bien qu'on n'a pas besoin d'évaluer $S(-i)$. Dérivant alors cette dernière identité, on a

$$\frac{P'(s)s^2(s-i)^2 - P(s)(s^2(s-i)^2)'}{\left(s^2(s-i)^2\right)^2} = d + \left((s+i)^2 S'(s) + 2(s+i)S(s)\right) ,$$

évaluant en $s = -i$ en remarquant *directement* que toute la dernière parenthèse est nulle (ce qui se produit toujours avec cette procédure), le membre de droite donne immédiatement $d$ et calculant dans la membre de gauche, on obtient $i/2$. On conclut alors

$$Y(s) = \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{i/4}{(s+i)^2} + \frac{i/2}{s+i} + \frac{-i/4}{(s-i)^2} + \frac{-i/2}{(s-i)} ,$$

en utilisant la propriété suivante, conséquence directe de l'unicité de la décomposition avec $\overline{Y}(s) = Y(s)$, qui pourra être utilisée librement.

**Propriété :** si $Y$ est une fraction rationnelle à coefficients réels, alors les coefficients associés à des pôles conjugués sont conjugués.

Cela donne bien ici $e = \bar{c}$ et $f = \bar{d}$. On obtient la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ en groupant par deux et mettant au même dénominateur les parties polaires conjuguées.