

Transformée de Laplace (suite et fin)

1 Application à la résolution d'EDO

On traite 2 exemples. On peut se reporter à <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/~kellendonk/Arbeiten/Math4-2018-cours-resume.pdf> pour une solution générale.

Exemple 0.1. On cherche à résoudre

$$af'(t) + bf(t) = g(t), \quad t > 0, \quad f(0) = c.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. On a vu que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Donc utilisant l'équation, on veut que

$$\mathcal{L}[g](s) = a\mathcal{L}[f'](s) + b\mathcal{L}[f](s) = (as + b)\mathcal{L}[f](s) - af(0).$$

Donc on trouve

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + af(0)}{as + b}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f .

Exercice 1. Résoudre l'équation :

$$f'(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = H(t), \quad t > 0, \quad f(0) = 0,$$

avec $H = 1_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside.

L'exemple donne

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\tau\mathcal{L}[H](s) + \tau f_0}{\tau s + 1}.$$

On rappelle que $\mathcal{L}[H](s) = s^{-1}$ donc $\mathcal{L}[f](s) = \frac{\tau}{\tau s^2 + s} = \tau \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau} \right)$. Donc $f(t) = \tau(1 - e^{-t/\tau})$, $t \geq 0$, comme cela est bien connu.

Exemple 0.2. On cherche à résoudre

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t), \quad t > 0, \quad f(0) = d, \quad f'(0) = e.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. On a vu que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$ et en itérant

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - f'(0) - sf(0)$$

Donc en utilisant l'équation, on veut que

$$\mathcal{L}[g](s) = a\mathcal{L}[f''](s) + b\mathcal{L}[f'](s) + c\mathcal{L}[f](s) = (as^2 + bs + c)\mathcal{L}[f](s) - af'(0) - asf(0) - bf(0).$$

Donc on trouve avec les conditions initiales de l'énoncé que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + (as + b)f(0) + af'(0)}{as^2 + bs + c}.$$

L'inversion de la transformée de Laplace donne f .

2 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Il n'est pas facile en général de lire des propriétés qualitatives de f à partir de celles de sa transformée de Laplace ou inversement. On a cependant le résultat suivant.

Théorème 0.1. *Soit f une fonction de type exponentiel 0 et si les limites existent :*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad (\text{valeur initiale})$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (\text{valeur finale})$$

Convolution et Transformée de Fourier

3 Motivation et définitions

Nous avons vu la notion de série de Fourier. Par exemple pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 et 2π -périodique, on a obtenu une décomposition en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

où les coefficients de Fourier (complexes) $c_n(f)$ sont obtenus par les intégrales

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx.$$

Cela nous a permis de résoudre des équations aux dérivées partielles (comme l'équation de la chaleur, l'équation de Laplace, l'équation des ondes) dans le cas périodique ou sur des intervalles $[0, L]$ avec conditions de bords en étendant par périodicité.

Si l'on veut résoudre ce type d'équations sans périodicité, on a besoin de fonctions de base de périodes différentes : les ondes planes, pas seulement e^{inx} de fréquence n , mais aussi e^{ipx} pour p réel (onde plane d'impulsion ou fréquence p). Dans ce cas, on va analyser la fonction en fréquence (variable p), mais au lieu d'obtenir une suite, on va obtenir une fonction de p : la transformée de Fourier. C'est finalement une fonction définie par une intégrale à paramètre p , la fréquence. La reconstruction de la fonction de départ sera donnée par la formule d'inversion de Fourier, qui fera intervenir une intégrale au lieu d'une somme.

Pour comprendre la transformée de Fourier d'un produit, il est aussi naturel d'introduire dans ce chapitre une notion de produit de convolution.

3.1 Définitions dans le cas intégrable

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ est l'espace des fonctions intégrables, c'est à dire $f \in L^1(\mathbb{R})$ si f est mesurable et si

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a déjà expliqué qu'on peut définir sa transformée de Fourier \hat{f} via

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

On la note aussi parfois $\mathcal{F}(f)$ au lieu de \hat{f} . On veut définir également l'intégrale suivante à paramètre x :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy,$$

pourvu que l'intégrale existe. C'est bien le cas si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, d'après le théorème suivant, qui rassemble les deux situations les plus simples.

Théorème 0.2 (Définition de la convolution).

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. La convolution de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

En particulier, le théorème de Fubini assure alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g (mesurable) bornée par $C > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. La convolution $f * g$ de f et g est la fonction donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

On a alors $f * g$ est bornée avec $|f * g(x)| \leq C \|f\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 0.3 (Propriétés de base de la convolution). Si f, g, h sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

1. (Commutativité) $(f * g) = (g * f)$.
2. (Associativité) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. (Linéarité) $f * (g + h) = f * g + f * h$, $f * (cg) = c(f * g)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
4. Si f est \mathcal{C}^1 (avec f, f' bornées, par exemple c'est le cas si f est nulle en dehors d'un borné). alors $f * g$ est \mathcal{C}^1 et $(f * g)' = f' * g$.
5. $\widehat{f * g}(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$.
6. $\widehat{f'g}(p) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}' * \hat{g})(p)$.

Les points 4 et 5 sont les calculs clefs motivant la définition de la convolution.

Démonstration.

1. Cela s'obtient par changement de variable $z = x - y$ (x fixé).
2. Une possibilité économique en calculs est d'utiliser 4 et 5 pour écrire

$$\widehat{(f * g) * h}(p) = \widehat{f * g}(p) \times \hat{h}(p) = \hat{f}(p) \times \hat{g}(p) \times \hat{h}(p) = \hat{f}(p) \times \widehat{h * g}(p) = \widehat{f * (g * h)}(p),$$

et de conclure par inversion de Fourier que cette égalité des transformées de Fourier impose l'égalité des fonctions.

3. Cela vient de la linéarité de l'intégrale.
4. Cela vient de l'étude de l'intégrale à paramètre

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dy.$$

On a domination en utilisant C borne pour $f, f', |h(x,y)| \leq Cg(y)$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) \right| = |f'(x-y)g(y)| \leq Cg(y).$$

Ces majorants étant indépendants de x et intégrables en y , on peut bien intervertir intégrale et dérivée.

5. On calcule en intervertissant les intégrales par une version du théorème de Fubini, puis en posant $z = x - y$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-ipx} dx &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ipx} \int_{\mathbb{R}} dy f(x-y) g(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy e^{-ip(x-y)} f(x-y) g(y) e^{-ipy} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ip(x-y)} f(x-y) g(y) e^{-ipy} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy g(y) e^{-ipy} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-ipz} f(z) = \hat{f}(p) \hat{g}(p) \end{aligned}$$

6. Ce point se déduira du précédent et du théorème d'inversion de Fourier. □

Exemple 0.3. Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ (fonction gaussienne) alors on a calculé sa transformée de Fourier à l'exercice 2 du Cours 6. En effet, par la parité et grâce au changement de variable $y = -x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} e^{ipy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cos(px) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cos(px) dx. \end{aligned}$$

À la troisième égalité, on fait la demi-somme des deux précédentes puisque $\cos(px) = \frac{e^{-ipx} + e^{ipx}}{2}$. Donc, en utilisant l'exercice 2 du Cours 6, on obtient

$$\hat{f}(p) = e^{-p^2/4}.$$

C'est un fait remarquable qu'on obtienne encore une exponentielle similaire. On verra plus loin par changement de variable que si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ alors $\hat{g}(x) = e^{-x^2/2}$ de sorte que la fonction gaussienne est un vecteur propre de la transformée de Fourier.

3.2 Définition dans le cas mesure

Si μ est une mesure de masse finie, alors les fonctions bornées sont intégrables et on peut définir

$$\hat{\mu}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} d\mu(x).$$

On veut aussi définir (pourvu que l'intégrale existe, par exemple si f est mesurable bornée) :

$$(f * \mu)(x) \equiv (\mu * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\mu(y).$$

On peut en particulier traiter le cas des mesures de Dirac.

Exercice 2. Calculer $\hat{\delta}_a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Comme par définition $\delta_a(f) = f(a)$, on obtient directement de la définition $\hat{\delta}_a(p) = e^{-ipa}$. En particulier $\hat{\delta}_0 = 1$ est une fonction constante. Ceci peut être vu comme une première manifestation qualitative du principe d'incertitude : la transformée de Fourier d'un signal très localisé en espace doit être très délocalisée en fréquence (quoi de plus localisé qu'une mesure de Dirac, ou de plus délocalisé qu'une fonction constante...).

Exercice 3. Calculons également

$$(f * \delta_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\delta_a(y) = f(x-a).$$

En particulier $f * \delta_0 = f$.

4 Exemples de régularisations par convolution

Soit $\rho(x)$ une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux, positive et nulle en dehors d'un ensemble borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On considère pour $\varepsilon > 0$ assez petit le changement d'échelle

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Noter que si ρ est nulle en dehors de $[a, b]$, alors ρ_ε est nulle en dehors de $[a\varepsilon, b\varepsilon]$. On a déjà vu au Cours 5 que $\rho_{1/n}$ (ou plus précisément la mesure associée $T_{\rho_{1/n}}$) converge au sens des mesures vers la mesure de Dirac δ_0 en 0 quand $n \rightarrow +\infty$. De façon tout à fait analogue, on a que ρ_ε approche δ_0 quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. L'idée est de partir de l'identité $f = f * \delta_0$ encadrée ci-dessus, qui suggère qu'on va pouvoir approcher f par des convolutions de la forme $f * \rho_\varepsilon$.

Idee d'approximation de f par des fonctions plus régulières obtenues par convolution : typiquement, on suppose $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$ et f intégrable. Alors dans un sens à préciser, on a $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ et $(f * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. De plus, ces fonctions sont des approximations de plus en plus lisses au sens où

1. $f * \rho_\varepsilon$ est continue, et si f est continue alors $f * \rho_\varepsilon$ est \mathcal{C}^1 etc.
2. $(f * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon$ est \mathcal{C}^1 , et si f est continue alors $(f * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon$ est \mathcal{C}^2 etc.

Pour préciser, un peu, on a la

Proposition 0.4 (Approximation uniforme de f par $f * \rho_\varepsilon$). *Si f est continue et ρ continue par morceaux, positive et nulle en dehors d'un ensemble borné avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$, $f * \rho_\varepsilon$ converge vers f uniformément sur tout sous-ensemble bornée $I \subset \mathbb{R}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.*

Proposition 0.5 (Approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ de f par $f * \rho_\varepsilon$). *Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ et ρ continue par morceaux, positive et nulle en dehors d'un ensemble borné avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$, alors on a*

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Proposition 0.6 (Régularité de $f * \rho_\varepsilon$ pour f seulement $L^1_{loc}(\mathbb{R})$). *Si f est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et ρ continue par morceaux, positive et nulle en dehors d'un ensemble borné avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$, alors $f * \rho_\varepsilon$ est continue.*

Idée de preuve. On utilise le Théorème de convergence dominée (TCD). Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Si $x_n \rightarrow x$, on a

$$f * \rho_\varepsilon(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho_\varepsilon(x_n - y) dy.$$

Si ρ est 0 en dehors de $[-C, C]$, ρ_ε est 0 en dehors de $[-C\varepsilon, C\varepsilon]$, donc $\rho_\varepsilon(x_n - y)$ est bornée par D et 0 en dehors de $[x_n - C\varepsilon, x_n + C\varepsilon] \subset [-A, A]$ vu que (x_n) est convergente donc bornée.

Pour tout y (sauf un nombre fini donné par les sauts éventuels de ρ_ε), on a la convergence simple $f(y)\rho_\varepsilon(x_n - y) \rightarrow f(y)\rho_\varepsilon(x - y)$ quand $n \rightarrow +\infty$, et on a la domination :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)\rho_\varepsilon(x_n - y)| \leq D|f(y)1_{[-A, A]}(y)|,$$

ce qui bien donne une domination intégrable indépendante de n , comme f est localement intégrable. Donc par TCD, on conclut bien que

$$f * \rho_\varepsilon(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_\varepsilon(x_n - y)dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_\varepsilon(x - y)dy = f * \rho_\varepsilon(x) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

i.e. la continuité de $f * \rho_\varepsilon$.

□

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne également le résultat suivant :

Proposition 0.7 (Régularité de $f * \rho_\varepsilon$ pour f seulement $L^1(\mathbb{R})$). *Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ et que ρ est \mathcal{C}^1 , positive et nulle en dehors d'un ensemble borné avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$, alors $f * \rho_\varepsilon$ est \mathcal{C}^1 .*

4.1 Exemples détaillés

Exercice 4. Soit $f(t) = |t|$ (typiquement non dérivable en 0) et

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ 1/2, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Calculer $f * \rho_\varepsilon$, constater que cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 et examiner (au moins graphiquement) ce qui se passe quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Correction. On a

$$f * \rho_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - y)\rho_\varepsilon(y)dy = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t - y|dy$$

Le calcul nous pousse à distinguer plusieurs cas.

— si $t < -\varepsilon$, on a $t < y$ dans l'intégrale donc $|t - y| = y - t$ et :

$$f * \rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (y - t)dy = \left[\frac{(y - t)^2}{4\varepsilon} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - t)^2 - (\varepsilon + t)^2}{4\varepsilon} = -t$$

— si $t > \varepsilon$, on a $t > y$ dans l'intégrale donc $|t - y| = t - y$ et :

$$f * \rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (t - y)dy = \left[\frac{-(t - y)^2}{4\varepsilon} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{-(\varepsilon - t)^2 + (\varepsilon + t)^2}{4\varepsilon} = t$$

— si $\varepsilon \geq t \geq -\varepsilon$, on doit couper l'intégrale en 2 selon $t < y$ et $y > t$ donc :

$$\begin{aligned} f * \rho_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^t (t-y)dy + \frac{1}{2\varepsilon} \int_t^\varepsilon (y-t)dy \\ &= \left[\frac{-(t-y)^2}{4\varepsilon} \right]_{-\varepsilon}^t + \left[\frac{(y-t)^2}{4\varepsilon} \right]_t^\varepsilon = \frac{(\varepsilon-t)^2 + (\varepsilon+t)^2}{4\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2 + t^2}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

On constate que la fonction est \mathcal{C}^1 . On voit que $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ simplement et même uniformément sur \mathbb{R} (au moins graphiquement).

Exercice 5. (pour la maison) Soit $H(t) = 1_{[0,+\infty[}(t)$ la fonction de Heaviside et la même fonction ρ que dans l'exercice précédent.

1. Calculer $H * \rho_\varepsilon$ et $(H * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon$ et examiner graphiquement ce qui se passe quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
2. Vérifier que $H * \rho_\varepsilon$ est continue et $(H * \rho_\varepsilon) * \rho_\varepsilon$ a une dérivée continue.

5 Propriétés et Inversion de la transformée de Fourier

Avant de voir les relations entre transformée de Fourier et dérivée, voyons un calcul explicite pour une fonction nulle en dehors d'un intervalle borné $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ pour voir que dans ce cas, la transformée de Fourier est très régulière même si ρ n'est pas continue, mais bien localisée. Posons

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ 1/2, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\hat{\rho}(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-ipx} dx = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2ip} = \frac{\sin(p)}{p} =: \text{sinc}(p)$$

si $p \neq 0$; on obtient séparément $\hat{\rho}(0) = 1$ pour $p = 0$. En utilisant le développement en série entière du sinus vu en Math 3, on constate que cette fonction est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$\text{sinc}(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} p^{2k}.$$

5.1 Rappels sur les nombres complexes

On rappelle qu'un nombre complexe s'écrit

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a les formules pour le conjugué et l'inverse

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy = re^{-i\theta}, \\ z^{-1} &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

On rappelle le produit (caractérisé par $i^2 = -1$)

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx'),$$

$$r e^{i\theta} r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}.$$

On a également parfois besoin des formules d'Euler (à réviser cf. TMB) :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta), \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

5.2 Formules calculatoires

Théorème 0.8 (Propriétés de bases de la transformée de Fourier). *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes.*

1. (Linéarité) La transformée de Fourier $\widehat{\cdot}$ est linéaire : $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$, $\widehat{cf} = c\widehat{f}$ pour $c \in \mathbb{C}$.
2. (Conjugaison) On a $\widehat{\overline{f}}(p) = \overline{\widehat{f}(-p)}$.
3. (Dérivée) Si f est \mathcal{C}^1 et que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{f'}(p) = ip\widehat{f}(p).$$

4. (Produit par x) Si $f, xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors \widehat{f} est dérivable et

$$\widehat{xf}(p) = i(\widehat{f})'(p).$$

5. (Translation) Si $g(x) = f(x+a)$ alors $\widehat{g}(p) = e^{ipa}\widehat{f}(p)$.
6. (Changement d'échelle) Si $g(x) = f(sx)$ pour $s \neq 0$, alors $\widehat{g}(p) = \frac{1}{s}\widehat{f}(\frac{p}{s})$. En particulier, on a $\widehat{\rho_\varepsilon}(p) = \widehat{\rho}(\varepsilon p)$.
7. (Produit) $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$

Idées de preuve.

1. Par linéarité de l'intégrale
2. On écrit

$$\widehat{\overline{f}}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \overline{f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{ipx} f(x) dx} = \overline{\widehat{f}(-p)}.$$

3. Cela vient du point suivant et de l'inversion de Fourier. Alternativement, en intégrant par partie $v' = f'$, $u(x) = e^{ipx}$, $u'(x) = -ipu(x)$, on écrit directement

$$\widehat{f'}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f'(x) dx = [e^{-ipx} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (-ip)e^{-ipx} f(x) dx = ip\widehat{f}(p).$$

On a utilisé $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ vu que f, f' intégrable. En effet si $x_n \rightarrow +\infty$ une suite croissante $(f(x_n) - f(x_0)) = \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$ et cette série converge car elle converge absolument

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(t)| dt = \int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)| dt < +\infty.$$

Donc, $f(x_n)$ converge vers un nombre disons λ . Ceci force $f(x) \rightarrow \lambda$ mais si $\lambda \neq 0$ on aurait $|f(t)| > |\lambda|/2$ pour t grand. Donc $\int_a^b |f(t)| dt \geq |\lambda|(b-a) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$, contredisant l'intégrabilité de f .

4. Dérivation avec condition de domination.

5. Changement variable $y = x + a$:

$$\hat{g}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x+a) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ip(y-a)} f(y) dy = e^{ipa} \hat{f}(p).$$

6. Changement de variable $y = sx$:

$$\hat{g}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(sx) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ip(y/s)} f(y) dy/s = \frac{1}{s} \hat{f}\left(\frac{p}{s}\right).$$

7. Déjà vu plus haut au Théorème 0.3. □

Exemple 0.4. (Retour sur les transformées de Fourier des gaussiennes) Si $g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors on a $g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} g_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ donc $\hat{g}_{\sigma}(p) = \hat{g}_1(\sigma p)$. Comme on a calculé à l'exemple 0.3 que $\widehat{g_1/\sqrt{2}}(p) = \hat{g}_1(p/\sqrt{2}) = e^{-p^2/4}$, on en déduit $\hat{g}_1(p) = e^{-p^2/2}$ puis

$$\hat{g}_{\sigma}(p) = \widehat{g_1/\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}p\right) = e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}.$$

5.3 Comportement asymptotique

Théorème 0.9. (Lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors \hat{f} est continue et

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(p) = 0.$$

Remarque : ce théorème est une autre façon de voir que la mesure de Dirac δ_0 ne peut être écrite comme T_g pour un $g \in L^1(\mathbb{R})$. On a en effet $\widehat{\delta_0}(p) = 1$ pour tout p de sorte que $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \widehat{\delta_0}(p) = 1 \neq 0$.

Idée de preuve du Théorème 0.9. On a déjà vu à l'exemple 0.2 du Cours 6 que \hat{f} est continue (comme application du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre).

Si f est \mathcal{C}^1 , avec f' intégrable bornée : $|\hat{f}(p)| = \frac{|\hat{f}'(p)|}{|p|} \leq \frac{\|f'\|_1}{|p|} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \pm\infty$. Sinon, on peut approcher f par convolution par g_n (avec $\|f - g_n\|_1 \rightarrow 0$) de ce type et remarquer

$$|\hat{f}(p)| \leq |(\widehat{f - g_n})(p)| + |\hat{g}_n(p)| \leq \|f - g_n\|_1 + |\hat{g}_n(p)|.$$

Pour obtenir $|\hat{f}(p)| \leq \varepsilon$, on fixe n tel que $\|f - g_n\|_1 \leq \varepsilon/2$, puis le n étant fixé, on utilise $|\hat{g}_n(p)| \rightarrow 0$. □

5.4 Théorème d'inversion

Si on ne sait pas seulement que \hat{f} converge vers 0 mais qu'on a aussi une propriété d'intégrabilité, on obtient :

Théorème 0.10 (Théorème d'injectivité et inversion de la TF). Deux fonctions continues intégrables f, g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \hat{g}(t),$$

satisfont $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si f, g sont seulement intégrables alors $f = g$ pour "presque tout $x \in \mathbb{R}$ ").

De plus, si f est intégrable avec $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$$

en tout point x de continuité de f .

Exercice 6. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. En déduire la transformée de Fourier de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

5.5 Théorème de Plancherel

On va maintenant expliquer l'analogie du théorème de Plancherel pour les séries de Fourier qui dit que si f est 2π -périodique, avec $|f|^2$ intégrable sur une période, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

On note l'ensemble des fonctions de carré sommable

$$L^2(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : |f|^2 \text{ intégrable}\}.$$

On rappelle que

$$L^1(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : |f| \text{ intégrable}\}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 0.11 (Théorème de Plancherel). *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors on peut donner un sens à $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a l'égalité*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp.$$

Nous n'avons défini \hat{f} que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ jusqu'au théorème précédent. Pour obtenir ce théorème, on montre d'abord l'identité pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on en déduit que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on choisit une suite de fonctions (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 dx \rightarrow 0$, alors il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ (indépendante de l'approximation (f_n)) telle que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n - g|^2 dp \rightarrow 0$. Il est alors cohérent de définir $\hat{f} := g$.

Exemple 0.5. Pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, on a vu que $\hat{f}(p) = e^{-p^2/2}$ de sorte que dans ce cas le théorème donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp.$$

On peut se souvenir du coefficient $1/2\pi$ à partir de cet exemple. Les constantes de normalisation sont imposées par $\hat{f}(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.