

Utilisation de la Transformée de Fourier

1 Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ÉDP) linéaires sur \mathbb{R}

1.1 L'équation de la chaleur : résultats d'existence et d'unicité d'une solution

Étant donnée une condition initiale $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on veut maintenant résoudre l'équation de la chaleur homogène sur tout \mathbb{R} , d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{EC})$$

La modélisation associée a déjà été brièvement discutée dans le cadre périodique.

On raisonne d'abord formellement et on pose $u_t(x) = u(t, x)$. Supposons qu'une solution admette une transformée de Fourier en la variable d'espace x pour tout temps $t \geq 0$ (par exemple u_t est intégrable, i.e. est dans $L^1(\mathbb{R})$). Alors, pour p fixé, $\widehat{u}_t(p)$ va vérifier une équation différentielle de variable t . En effet, on écrit pour $t \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_t(p) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ipx} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-ipx} dx \\ &= \frac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(t, p) = \frac{\widehat{\partial^2 u}}{\partial x^2}(t, p) = (ip)^2 \widehat{u}_t(p) = -p^2 \widehat{u}_t(p). \end{aligned} \quad (\text{ED})$$

L'égalité 2 est la dérivation de l'intégrale à paramètre t (p fixé), l'égalité 4 suit de (EC) et l'égalité 5 de la double application de la formule pour la transformée de Fourier d'une dérivée en la variable spatiale x (Théorème 0.7, Point 3 du Cours 7).

Donc ajoutant la condition initiale $\widehat{u}_0(p) = \widehat{v}(p)$ à l'équation différentielle (ED) de variable t (toujours pour p fixé), on obtient $\widehat{u}_t(p) = e^{-p^2 t} \widehat{v}(p)$.

Indépendamment, on a vu à l'Exemple 0.2 du Cours 7 que si $g_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, alors $\widehat{g_{\sqrt{2t}}}(p) = e^{-p^2 t}$ donc $\widehat{u}_t(p) = \widehat{g_{\sqrt{2t}}}(p) \widehat{v}(p)$.

Maintenant, par la formule liant transformée de Fourier et convolution (Théorème 0.2, Point 5 du Cours 7), on voit que la fonction

$$u_t(x) = (g_{\sqrt{2t}} * v)(x) \quad (\text{CV})$$

à la bonne transformée de Fourier. Par le calcul précédent, on déduit que $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(p) = \frac{\widehat{\partial^2 u}}{\partial x^2}(p)$. Donc par le théorème d'inversion, u satisfait donc l'équation. Faisant la synthèse et appliquant les théorèmes des chapitres précédents pour avoir un argument rigoureux, on obtient le résultat suivant :

Théorème 0.1 (Équation de la chaleur (EC) : existence et unicité d'une solution).

Soit v une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} . Alors il existe une unique solution u de (EC) vérifiant

1. pour tout $t \in]0, +\infty[$, u est continue et intégrable en x (i.e. $x \mapsto u(t, x)$ est intégrable sur \mathbb{R}),
2. les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont bien définies, continues sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et intégrables en x pour tout $t \in]0, +\infty[^1$,
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u(0, x) = v(x)$ et même

$$\|u_t - v\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - v(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

De plus, cette solution u est C^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Remarquons tout d'abord que l'équation différentielle (ED) ci-dessus n'est vérifiée que pour $t \in]0, +\infty[$. On a donc besoin d'une propriété de continuité en $t = 0$ pour pouvoir y adjoindre la condition initiale $\widehat{u}_0(p) = \widehat{v}(p)$ dans l'argument ci-dessus. C'est le rôle de la condition 3 du théorème ; on peut en effet vérifier pour tout p fixé que

$$|\widehat{u}_t(p) - \widehat{u}_0(p)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (u_t(x) - u_0(x)) e^{-ipx} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |(u(t, x) - v(x))| \underbrace{|e^{-ipx}|}_{=1} dx \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

Remarque 0.1. Plus précisément, pour pouvoir justifier l'égalité 2 ci-dessus, on demande non seulement que $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, mais encore que $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ soit continue de $]0, +\infty[$ dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\forall t_0 > 0, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right| dx \rightarrow 0$$

quand $t \rightarrow t_0$. En effet on peut alors écrire pour tout $p \in \mathbb{R}$ fixé

$$\widehat{u_{t_0+h}}(p) - \widehat{u_{t_0}}(p) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dt \right) e^{-ipx} dx \stackrel{t=t_0+sh}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, x) (h ds) \right) e^{-ipx} dx,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\widehat{u_{t_0+h}}(p) - \widehat{u_{t_0}}(p)}{h} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) e^{-ipx} dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right] ds e^{-ipx} dx \right| \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right] e^{-ipx} dx ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right] \right| \underbrace{|e^{-ipx}|}_{=1} dx ds \\ &\leq \sup_{s \in [0,1]} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + sh, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) \right\|_1 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $h \rightarrow 0$, $h \neq 0$, utilisant notre hypothèse.

1. Voir Remarque 0.1

Laissant maintenant un instant de côté la question de l'unicité, on peut se demander si la formule donnée par la convolution (CV) ne permet pas d'envisager l'existence de solutions de (EC) pour des conditions initiales v plus générales que dans le Théorème 0.1. C'est l'objet du théorème suivant qui, contrairement au Théorème 0.1, s'applique aussi pour des conditions initiales continues périodiques comme dans le Cours 4.

Théorème 0.2 (Équation de la chaleur (EC) : existence pour des données initiales plus générales).

Soit v une fonction continue ne croissant pas trop vite en $\pm\infty$ au sens où il existe $C > 0$ et $\tau < 2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |v(x)| \leq C e^{|x|^\tau}. \quad (\text{H})$$

Alors, la fonction $u : (t, x) \mapsto u_t(x)$ donnée sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par (CV) vérifie (EC) au sens où

1. les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ existent et sont continues sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,
2. si on pose également $u(0, x) = v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, u est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Idée de preuve du Théorème 0.2. On donne ici quelques détails esquissés lors de la description du Théorème 0.1. Précisément, on montre successivement que sous les hypothèses du Théorème 0.2

A la fonction u obtenue à partir de (CV) est bien définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

B le Point 1 du théorème est vrai et la première ligne de (EC) est vraie,

C le Point 2 est également vrai.

Point A. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$

$$|g_{\sqrt{2t}}(x-y)v(y)| = \left| \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} v(y) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t} + |y|^\tau + \frac{2|xy| + x^2}{4t}\right), \quad (\star)$$

puis pour t, x fixés, on a pour $|y| \rightarrow +\infty$

$$-\frac{y^2}{4t} + |y|^\tau + \frac{2|xy| + x^2}{4t} = -\frac{y^2}{8t} + \left(-\frac{y^2}{8t} + |y|^\tau + \frac{2|xy| + x^2}{4t}\right) = -\frac{y^2}{8t} + \underbrace{\left(-\frac{y^2}{8t}(1 + o(1))\right)}_{\rightarrow -\infty},$$

d'où

$$|g_{\sqrt{2t}}(x-y)v(y)| \leq \frac{C}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{8t}} \times o(1) = o\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Comme on a de plus que $y \mapsto g_{\sqrt{2t}}(x-y)v(y)$ est continue sur \mathbb{R} , on en déduit que l'intégrale

$$u_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{2t}}(x-y)v(y)dy$$

est absolument convergente par théorème de comparaison I (TCI) et la fonction u est bien définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Point B. On va appliquer le théorème de dérivations successives du Cours 6. La fonction

$$f : (t, x, y) \mapsto g_{\sqrt{2t}}(x-y)v(y)$$

est bien de classe \mathcal{C}^∞ en $(t, x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y)}{\sqrt{4\pi}} \left(-\frac{t^{-3/2}}{2} + \frac{t^{-1/2}(y-x)^2}{4t^2}\right) = \frac{f(t, x, y)}{2t} \left(-1 + \frac{(y-x)^2}{2t}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) = \frac{f(t, x, y)(y - x)}{2t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y) = \frac{1}{2t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)(y - x) - f(t, x, y) \right) = \frac{f(t, x, y)}{2t} \left(\frac{(y - x)^2}{2t} - 1 \right),$$

de sorte qu'on vérifie en particulier $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y)$. Soient $a, b > 0$ tels que $a \leq b$ fixés. Pour tout $t \in [a, b]$ et $x \in [-b, b]$, on déduit alors les dominations suivantes, utilisant (\star) , pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t, x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{y^2}{4b} + |y|^\tau + \frac{2b|y| + b^2}{4a}\right) := \phi_0(y),$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) \right| = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y) \right| \leq \frac{\phi_0(y)}{2a} \left(1 + \frac{(|y| + b)^2}{2a}\right) := \phi_1(y),$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) \right| \leq \frac{\phi_0(y)(|y| + b)}{2a} := \phi_2(y).$$

Toutes ces majorations étant intégrables en y (voir argument du Point A) et indépendantes de t, x , le théorème de dérivations successives assure bien que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ existent pour tout $(t, x) \in [a, b] \times [-b, b]$ et sont continues sur cet ensemble : $a > 0$ pouvant être arbitrairement petit et $b > 0$ arbitrairement grand, on a finalement la propriété pour tout $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, ce qui conclut la preuve du Point 1 du Théorème 0.1.

Point C. La continuité de u sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est une conséquence immédiate du point précédent. Pour avoir la propriété jusqu'en $t = 0$, c'est à dire la continuité de u sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, il suffit de voir que

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0), t>0} u(t, x) = v(x_0)$$

pour tout x_0 fixé dans \mathbb{R} . Soit donc $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On commence donc par écrire pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, suivant la définition (CV) et utilisant $g_{\sqrt{2t}} * v = v * g_{\sqrt{2t}}$ que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v(x - y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v(x - z\sqrt{2t}) e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2t} dz = \int_{\mathbb{R}} v(x - z\sqrt{2t}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \quad (C)$$

via le changement de variable $y = z\sqrt{2t}$. Cette dernière formule étant cette fois bien définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on peut maintenant appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre pour conclure. En effet, on a tout d'abord, que $F : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(t, x, z) = v(x - z\sqrt{2t}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = v(x - z\sqrt{2t}) \times g_1(z)$$

est bien continue. Reste à obtenir une domination appropriée. Soient $a, b > 0$ fixés. Pour tout $t \in [0, a]$ et tout $x \in [-b, b]$, on écrit

$$|F(t, x, z)| \leq C e^{|x - z\sqrt{2t}|^\tau} \times \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq C e^{(|x| + |z\sqrt{2t}|)^\tau} \times \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\leq C e^{2^{\tau-1}(|x|^\tau + |z\sqrt{2t}|^\tau)} \times \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq C \exp\left(2^{\tau-1}b^\tau + 2^{\frac{3\tau}{2}-1}a^{\tau/2}|z|^\tau\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

utilisant notre hypothèse de majoration de v dans le Théorème 0.1 (sans perte de généralité, on peut supposer $\tau \geq 1$), utilisant $|x - z\sqrt{2t}| \leq |x| + |z|\sqrt{2t}$ par inégalité triangulaire, puis

$$\forall \alpha, \beta \geq 0, \quad (\alpha + \beta)^\tau \leq 2^{\tau-1} (\alpha^\tau + \beta^\tau), \quad \text{car } \forall t \geq 0, \quad (1+t)^\tau \leq 2^{\tau-1}(1+t^\tau)$$

pour $\tau \geq 1$. En particulier, notre majoration de $|F(t, x, z)|$ ne dépend que de la variable d'intégration z , mais pas des paramètres $(t, x) \in [0, a] \times [-b, b]$. Vérifions maintenant que cette majoration est bien intégrable en z :

$$C \exp\left(2^{\tau-1}b^\tau + 2^{\frac{3\tau}{2}-1}a^{\tau/2}|z|^\tau\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \exp\left(\underbrace{-\frac{z^2}{4} + 2^{\tau-1}b^\tau + 2^{\frac{3\tau}{2}-1}a^{\tau/2}|z|^\tau}_{\rightarrow -\infty \text{ quand } |z| \rightarrow +\infty}\right) = o\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

quand $|z| \rightarrow \pm +\infty$, d'où cette majorante est bien intégrable en $\pm\infty$. Au bilan, le théorème de continuité sous l'intégrale s'applique bien et on a

$$\begin{aligned} \lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0), t>0} u(t, x) &= \lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0), t>0} \int_{\mathbb{R}} F(t, x, z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0), t>0} F(t, x, z)}_{F(0,x_0,z)=v(x_0)g_1(z)} dz = v(x_0) \int_{\mathbb{R}} g_1(z) dz = v(x_0) = u(0, x_0), \end{aligned}$$

car g_1 est une densité de probabilité gaussienne d'intégrale 1 (déjà vu dans le cours). Ceci conclut la preuve du Point 2 du Théorème 0.2 : u est bien continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. \square

Théorème 0.3 (Équation de la chaleur (EC) : résultats de comportement en temps long).

Soit v une fonction continue. Dans les deux cas suivants, on se donne u la solution de (EC) donnée par la convolution (CV) et on pose $u_t : x \mapsto u(t, x)$.

1. On suppose que $v \in L^1(\mathbb{R})$ est intégrable. Alors $u_t \sqrt{4\pi t} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} v(z) dz$ simplement sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow +\infty$. En particulier, $u_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
2. On suppose que v tend vers des limites finies en $\pm\infty$: il existe $l_+, l_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l_+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = l_-.$$

Alors $u_t \rightarrow \frac{l_+ + l_-}{2}$ simplement sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow +\infty$.

Preuve du Théorème 0.3.

Point 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On utilise directement la formule (CV) pour écrire

$$u_t(x) \sqrt{4\pi t} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y) dy.$$

On a alors la majoration intégrable et indépendante de t :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y) \right| \leq |v(y)|$$

car v supposée intégrable. De plus, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y) \rightarrow v(y)$$

quand $t \rightarrow +\infty$. Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y) dy = \int_{\mathbb{R}} v(y) dy,$$

ce qui conclut la preuve du Point 1.

Point 2. On va utiliser la formule (C) obtenue par changement de variable ci-dessus. Posant F comme juste en dessous de (C) et fixant $x \in \mathbb{R}$, on vérifie que

$$F(t, x, z) \stackrel{(C)}{=} v\left(x - z\sqrt{2t}\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow F_{\infty}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \times \begin{cases} l_- & \text{si } z > 0, \\ v(x) & \text{si } z = 0, \\ l_+ & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

quand $t \rightarrow +\infty$. La fonction v étant continue sur \mathbb{R} et tendant vers des limites finies en $\pm\infty$, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $|v(y)| \leq M$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On a donc la domination intégrable en z et indépendante de t :

$$|F(t, x, z)| \leq M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Le théorème de convergence dominée assure donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} F(t, x, z) dz}_{=u(t,x)} = \int_{\mathbb{R}} F_{\infty}(z) dz = \frac{l_+ + l_-}{2}$$

utilisant que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dy = \frac{1}{2}$, ce qui conclut. \square

1.2 Nécessité d'hypothèses pour avoir l'existence et l'unicité des solutions de (EC)

On donne maintenant quelques exemples montrant qu'on ne peut espérer avoir existence et unicité d'une solution de (EC) sans hypothèses, d'où les précautions dans celles des théorèmes précédents. Ce premier exemple montre que la solution peut "exploser" en temps fini.

Exemple 0.1. On peut vérifier que la fonction u donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{\frac{x^2}{4(1-t)}}$$

satisfait bien l'équation de la chaleur pour $(t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$ avec la condition initiale $u(0, x) = e^{x^2/4}$. Cependant, cette solution tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$ (uniformément en x). On dit parfois qu'elle "explose" quand $t \rightarrow 1^-$.

Remarquez que cette croissance en $x \rightarrow \pm\infty$ comme $e^{|x|^\tau/4}$ pour $\tau = 2$ est le cas limite mais n'est pas couvert par l'hypothèse (H) sur la condition initiale du résultat d'existence globale (i.e. pour tout $t \geq 0$) du Théorème 0.2.

Ce second exemple montre qu'il n'y a pas forcément unicité de la solution de (EC). Plus précisément, pour v identiquement nulle sur \mathbb{R} , on a toujours la solution nulle u sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On construit dans l'exemple suivant une autre solution de (EC) pour la même condition initiale. Par principe de superposition, ceci donne la non-unicité pour toute condition initiale telle que (EC) admet une solution classique.

Exemple 0.2. Soit $\alpha > 1$ donné. Considérons la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^\alpha}\right) & \text{pour } t > 0, \\ 0 & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

Alors on peut vérifier que F est \mathcal{C}^∞ avec les dérivées $F^k(0)$ nulles pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'ailleurs, il est immédiat par croissance comparée exponentielle/polynôme que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F(t) = o(t^k) \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

On peut alors définir u par

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n)}(t).$$

Montrons que u satisfait bien (EC) pour la condition initiale v identiquement nulle, i.e. $v(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord, il suit clairement de ce qui précède que $u(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Admettant que cette série et ses dérivées convergent², on vérifie formellement pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n+1)}(t) = F'(t) + \frac{x^2}{2!} F^{(2)}(t) + \frac{x^4}{4!} F^{(3)}(t) + \dots$$

et que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} F^{(n)}(t) = F'(t) + \frac{x^2}{2!} F^{(2)}(t) + \frac{x^4}{4!} F^{(3)}(t) + \dots,$$

si bien que $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ et (EC) est vérifiée.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 1$, on peut vérifier que cet exemple donne une infinité de solutions régulières classique de (EC) avec condition initiale v identiquement nulle (solutions de Tychonoff).

Une dernière remarque culturelle : Tychonoff montre dans son travail que la procédure de l'Exemple 0.2 permet même de construire une telle solution u_τ globale (i.e. définie pour tout $t \geq 0$) de (EC) avec donnée initiale $v \equiv 0$ identiquement nulle et satisfaisant de plus $\sup_{t \geq 0} |u_\tau(t, x)| \leq C e^{|x|^\tau}$ pour tout $\tau > 2$, alors que $\tau < 2$ dans le Théorème 0.2 et que $\tau = 2$ dans l'Exemple 0.1.

1.3 L'équation des ondes II

Nous avons déjà proposé une solution de l'équation des ondes homogène avec condition initiale dans le Cours 4 : la formule de d'Alembert. Une méthode pour obtenir cette formule utilise la transformée de Fourier. C'est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice 1. Utiliser la transformation de Fourier pour résoudre l'équation des ondes (ou de la corde vibrante) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. On peut pour cela montrer la majoration : il existe $\theta = \theta(\alpha) > 0$ tel que pour tout $t > 0$, on a

$$|F^{(n)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^\alpha}}.$$

Reprenons les arguments formels du début du chapitre. Soit $p \in \mathbb{R}$ une fréquence fixée. On a pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}_t(p) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ipx} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) e^{-ipx} dx = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}(t, p) = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t, p) = -p^2 \widehat{u}_t(p).$$

Les solutions de cette équation différentielle (p est toujours fixé) sont donc données par

$$\forall t \geq 0, \quad \widehat{u}_t(p) = A(p) \cos(pt) + B(p) \sin(pt).$$

En y adjoignant les conditions initiales

$$\widehat{u}_0(p) = \widehat{v}(p) \text{ et } \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(0, p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) e^{-ipx} dx = 0,$$

on obtient $B(p) \equiv 0$ et $A(p) = \widehat{v}(p)$. D'où

$$\widehat{u}_t(p) = \widehat{v}(p) \frac{e^{ipt} + e^{-ipt}}{2} \implies u_t(x) = \frac{1}{2} (u(x+t) + u(x-t)),$$

par le Point 5 du Théorème 0.8 du Cours 7. On retrouve la formule de d'Alembert dans ce cas particulier.

1.4 L'équation de Schrödinger

Étant donnée une condition initiale $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on veut maintenant résoudre l'équation de Schrödinger homogène sur tout \mathbb{R} , d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{ES})$$

On raisonne formellement comme au début de ce cours, posant $u_t(x) = u(t, x)$. Supposons qu'une solution admette une transformée de Fourier en la variable d'espace x pour tout temps $t \geq 0$ (par exemple u_t est intégrable, i.e. est dans $L^1(\mathbb{R})$). Alors, pour p fixé, $\widehat{u}_t(p)$ va vérifier une équation différentielle de variable t . En effet, on écrit pour $t \in]0, +\infty[$

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_t(p) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ipx} dx \stackrel{2}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-ipx} dx = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t, p) \stackrel{4}{=} -i \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t, p) \stackrel{5}{=} ip^2 \widehat{u}_t(p). \quad (\text{ED2})$$

L'égalité 2 est la dérivation de l'intégrale à paramètre t (p fixé), l'égalité 4 suit de $i \times (\text{ES})$ et l'égalité 5 de la double application de la formule pour la transformée de Fourier d'une dérivée en la variable spatiale x (Théorème 0.7, Point 3 du Cours 7).

Donc ajoutant la condition initiale $\widehat{u}_0(p) = \widehat{v}(p)$ à l'équation différentielle (ED2) de variable t (toujours pour p fixé), on obtient $\widehat{u}_t(p) = e^{ip^2 t} \widehat{v}(p)$. En particulier, comme $p^2 t$ est réel, $|\widehat{u}_t(p)| = |\widehat{v}(p)|$. Ainsi, utilisant aussi le théorème de Plancherel l'énergie $\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx$ est indépendante du temps car

$$\int_{\mathbb{R}} |u_t(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_t(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx.$$

Comme pour l'équation de la chaleur, cette formule multiplicative en Fourier suggère que la solution soit donnée pour $t > 0$ par une convolution. Il s'avère que c'est bien le cas

$$u(t, x) = \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v(x-y)e^{-i\frac{y^2}{4t}} dy.$$

Remarquons tout d'abord qu'on peut formellement écrire le noyau $\frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\pi t}}e^{-i\frac{y^2}{4t}}$ avec lequel on convole la condition initiale v comme $g_{\sqrt{-2it}}(y)$. Concernant le sens de cette intégrale, remarquez également qu'il s'agit d'une intégrale oscillante, dont on a essentiellement vérifié la convergence pour $v \equiv 1$ et $t = \frac{1}{4}$ à l'Exercice 6 du Cours 5.

2 Le principe d'incertitude

En physique, ce principe donne une limitation théorique à la précision à laquelle on peut connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule.

Étant donnée une particule dont la position suit une densité de probabilité f , alors la position moyenne de la particule est donnée par l'espérance $x_0 := \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \in \mathbb{R}$. Une façon de mesurer alors l'écart moyen de cette particule par rapport à cette position moyenne est donné par la variance ou incertitude donnée par $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} (x-x_0)^2 f(x)dx$. Essentiellement, $\sigma = 0$ dans la cas déterministe d'une particule en x_0 avec probabilité 1, i.e. $f = \delta_{x_0}$. En physique quantique, si cette distribution de position est donnée en général par $f(x) = |\psi(x)|^2$, alors la distribution du moment est donnée par $|\hat{\psi}(p)|^2/(2\pi)$ de sorte que la variance ou incertitude du moment est donnée par $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (p-p_0)^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp$ où $p_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} p |\hat{\psi}(p)|^2 dp$. Dans la suite, on prendra pour simplifier $x_0 = p_0 = 0$. Attention que les constantes explicites apparaissant dans cette section dépendent de la normalisation (souvent différente en physique) choisie pour définir la transformée de Fourier. D'autre part, dans ces applications en physique quantique, la constante de Planck \hbar joue un rôle dimensionnel, mais elle n'apparaît pas en général dans les énoncés mathématiques où l'on préfère travailler en variables adimensionnées.

Nous avons déjà évoqué le principe (vague pour l'instant) suivant : plus une fonction est localisée, plus sa transformée de Fourier est "étalée". Par exemple, nous avons vu que la transformée de Fourier d'une indicatrice $\frac{1}{2}1_{[-1,1]}$ est la fonction sinc qui ne décroît pas très vite vers 0 au sens où elle n'est pas intégrable en $\pm\infty$ (cf. Cours 5). Une autre manifestation plus quantitative de ce principe est le Point 6 du Théorème 0.8 du Cours 7 concernant le changement d'échelle : pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ donnée, si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

pour $\varepsilon > 0$, alors $\hat{f}_\varepsilon(p) = \hat{f}(\varepsilon p)$. Dans le cas où $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, nous avons vu que $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon = 1$ également et que les f_ε se concentrent en 0 au sens où $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ au sens des mesures quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Le changement d'échelle donne alors que les \hat{f}_ε s'étalent au sens où $\hat{f}_\varepsilon \rightarrow \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = 1$ simplement sur \mathbb{R} . À la limite, on retrouve la propriété que la transformée de Fourier d'une mesure δ_0 de Dirac supportée en un seul point est la fonction constante égale à 1 partout.

Notation : on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, c'est à dire telles que toutes les fonctions $x \mapsto |\psi^{(k)}(x)|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}$ sont bornées sur \mathbb{R} pour tout $m, k \in \mathbb{N}$. Ces propriétés de décroissance/régularité et les formules calculatoires vues sur la transformée de Fourier assurent que

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On peut alors formaliser l'intuition ci-dessus dans le théorème suivant :

Théorème 0.4 (Principe d'incertitude d'Heisenberg). *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right)^2 \leq \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} p^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp \right).$$

De plus, on a égalité si et seulement si $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ pour des constantes $a \in \mathbb{C}$ et $b > 0$ données.

On peut tout d'abord observer que, pour $b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-bx^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $b > 0$.

Démonstration. On commence par intégrer par parties en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx = [x|\psi(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x (\psi'(x) \overline{\psi(x)} + \psi(x) \overline{\psi'(x)}) dx \\ &= 0 + 2 \int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re} (x\psi(x) \overline{\psi'(x)}) dx, \end{aligned} \quad (1)$$

en observant que

$$\left(\psi(x) \overline{\psi(x)} \right)' = (\psi'(x) \overline{\psi(x)} + \psi(x) \overline{\psi'(x)}) = 2\operatorname{Re} (\psi(x) \overline{\psi'(x)}),$$

que $x|\psi(x)|^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, car $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ implique que $x \mapsto x^2|\psi'(x)|^2$ est bornée sur \mathbb{R} , et remarquant enfin que x est réel. Indépendamment, on peut écrire

$$\left| \int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re} (x\psi(x) \overline{\psi'(x)}) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |-\operatorname{Re} (x\psi(x) \overline{\psi'(x)})| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x) \overline{\psi'(x)}| dx = \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| |\psi'(x)| dx, \quad (2)$$

utilisant d'abord $|\int f| \leq \int |f|$, puis que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Maintenant, utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz³, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)\psi'(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right). \quad (3)$$

Enfin, on utilise le Théorème de Plancherel, puis le Point 3 du Théorème 0.8 du Cours 7 sur la transformée de Fourier d'une dérivée $\hat{\psi}'(p) = ip\hat{\psi}$ pour écrire

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}'(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |ip\hat{\psi}(p)|^2 dp. \quad (4)$$

En mettant (1), (2), (3) et (4) bout à bout, on obtient bien l'inégalité souhaitée. \square

Exercice 2. En inspectant le cas d'égalité de toutes les inégalités de la preuve ci-dessus, montrer qu'on ne peut avoir égalité dans le Théorème 0.4 que s'il existe c réel et < 0 tel que $\psi'(x) = cx\psi(x)$, puis que $\psi(x) = ae^{-bx^2}$ avec $c = -2b$ et $a \in \mathbb{C}$ comme dans la conclusion du théorème.

3. Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables, la fonction polynômiale de degré 2

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} (|f(x)| + t|g(x)|)^2 dx = t^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx + 2t \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx,$$

est positive sur \mathbb{R} , d'où elle a au plus une racine et son discriminant Δ est ≤ 0 , i.e.

$$4 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \right)^2 - 4 \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \leq 0,$$

pour peu que toutes les intégrales convergent.