Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

(4) La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx.$$

(5) Formule d'inversion s'écrit $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx}dp$.

(6) Le produit de convolution est donné par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(7) La formule de Plancherel s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

(8) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(9)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(10)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\lvert p\rvert}$
(11)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(12)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(13)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(14)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(15)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(16)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(17)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(18)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j}+sd_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$