Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2023-2024 Séquence 2
Lundi 19 février 2024

Contrôle Continu

Remarques générales : Il y a un manque de soin général. Du coup, 0 tolérance si confusion car vous avez lu le sujet trop vite ou a fortiori si vous vous auto-arnaquez en faisant comme si le souci n'existait pas, par exemple si vous intégrez $\sin^2(x)$ et vous obtenez $-\cos(x)$).
Par ailleurs, on vous a bien demandé de répondre dans l'ordre, et souvent ça n'a pas été le cas. Si c'est une ou deux copies ça va...mais plein de monde a fait comme si la consigne n'existait pas ! Non seulement on perd du temps, mais en plus il y a un risque d'erreur qui peut vous coûter cher !

Exercice 1 [4 points]

1. Donner le développement limité de la fonction tan à l'ordre 2 en 0.
2. Est-ce que les propositions suivantes sont correctes ? **Justifiez** toutes vos réponses.
   (a) $x \sim xe^x$ quand $x \to +\infty$?
   (b) $e^x \sim e^x + x$ quand $x \to +\infty$?
   (c) $e^x = o(xe^x)$ quand $x \to +\infty$?

Barème :

1. 1 pt : OK si ordre 3 donné. 0.5 pt si ordre 1 correct.
2. 3 pts
   (a) 1 pt.
   (b) 1 pt.
   (c) 1 pt.

Erreurs fréquemment commises :

1. La réponse doit en tout cas donner 1 pour $x = 0$, sinon c'est inquiétant.
2. (a) Le fait que e^x domine x à l'infini ne prouve rien ici !
   (b) Le fait que e^x domine x à l'infini prouve tout ici !
   (c) Le fait que e^x domine x à l'infini ne prouve rien ici !

Exercice 2 [5 points] Considérons la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec le terme général défini pour $x \in]0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}.$$

1. Montrer que la **série** converge simplement sur $]0,1]$.
   On note alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sa somme, pour $x \in]0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la **série** converge normalement sur $[a,1]$. En déduire que f est continue sur $]0,1]$.
3. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la **série des dérivées** $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur $[a,1]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$,

$$f'(x) = -2\sum_{n\geq 0} \frac{n^2x}{(n^2x^2+1)^2}.$$

Barême : Souvent les arguments ne sont pas dans l'ordre de la correction, grande tolérance pour cela. Parfois il est même impossible de noter les sous-exercices séparément.
Mais 0 tolérance pour la confusion suite-série (on a tout mis en gras dans l'énoncé, vous n'avez pas d'excuses) et la confusion entre la convergence de la série et le fait que le terme général tend vers 0.

1. 0.5 pt : tolérance 0 notamment sur les équivalences fausses.
2. 2 pt : 0.5 pour calcul, 1 pour théorème, 0.5 pour argument union des intervalles.
3. 1 pt : 0.5 pour calcul dérivée.
4. 1.5 pt : 0.5 pour argument réunion des intervalles, 1 pour théorème.

Erreurs fréquemment commises :

1. $1/xn$ n'est pas équivalent à $1/n$ dauf si $x = 1$.
2. Ne pas faire comme si a n'existait pas.
3. Idem.

Exercice 3 [7 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction **paire** et 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Que pouvez-vous dire de ses coefficients de Fourier b_n ?
3. Montrer que $a_0 = \frac{4}{\pi}$.
4. Montrer que si n est pair, $n \geq 2$, alors
$$a_n = \frac{4}{\pi(1-n^2)}.$$
et, si n est impair, alors $a_n = 0$.
Indication. On pourra utiliser la formule de trigonométrie suivante :
$$\cos(nx)\sin(x) = \frac{1}{2}\big(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\big).$$
5. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
6. A l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4p^2)^2}.$$

Barème :

1. 1 pt : OK si que sur $[-2\pi, 2\pi]$, 0 si dessin sin.
2. 0.5 pt : question simple.
3. 1 pt : 0.5 si erreur de facteur 2.
4. 2 pt : OK si cas $n = 1$ pas étudié à part. 0.5 si au lieu de suivre la consigne, vous tentez une IPP non aboutie. 0.5 si aucune distinction parité de n. 2 si tous les éléments pour le calcul si n impair est là mais vous l'avez oublié.
5. 1.5 pt : -0.5 pour oubli continue, -0.5 pour oubli C^1 par morceaux. 0 si aucune justification.
6. 1 pt : 0.5 si bonne méthode et erreurs minimales. 0 si vous intégrez $\sin^2(x)$ comme si c'était $\sin(x)$.

Erreurs fréquemment commises :

1. Enormément de confusions possibles...mais avant tout la fonction f n'est pas égale à sin partout !
2. Pas de soucis.
3. Pas de soucis.
4. Erreurs d'oubli/étourderie trop nombreuses, et avant tout des bouts de calcul où je ne peux pas donner de points car pas de puissances de -1.
5. Enoncer le théorème !
6. Primitives qui n'ont aucune chance de marcher pour l'intégrale.

Exercice 4 [4 points] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{n \ln(x+1)}{1 + n \ln(x+1)} .$$

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa limite f.
2. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite f sur $[1, +\infty)$.

Barème :

1. 2 pts : 1 si erreur bête par exemple $x = 0$ oublié. 0.5 si seulement cas $x = 0$ fait.
2. 2 pts : tolérance si norme correcte mais calcul trop rapide. Pas de points si vous dérivez $f_n - f$ sans justifier ce qui se passe, en mode automatique. 1 si vous remarquez de façon intelligente que pas de convergence uniforme possible en 0 (même si ce n'est pas demandé).

Erreurs fréquemment commises :

1. Confusion suite-série. Confusion $x - n$.
2. Ne pas mentionner d'uniformité.