Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2023-2024
Lundi 19 février 2024

PCSI L2 UE Mathématiques 4
Séquence 2

Contrôle Continu

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses.*
Rédigez dans l'ordre SVP quitte à laisser des blancs et revenir sur un exercice plus tard, cela facilite grandement le travail des correcteurs.

Exercice 1 [4 points]

1. Donner le développement limité de la fonction tan à l'ordre 2 en 0.
2. Est-ce que les propositions suivantes sont correctes ? **Justifiez** toutes vos réponses.
   (a) $x \sim xe^x$ quand $x \to +\infty$?
   (b) $e^x \sim e^x + x$ quand $x \to +\infty$?
   (c) $e^x = o(xe^x)$ quand $x \to +\infty$?

Exercice 2 [5 points] Considérons la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec le terme général défini pour $x \in]0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2 + 1}.$$

1. Montrer que la **série** converge simplement sur $]0, 1]$.
   On note alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sa somme, pour $x \in]0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1]$. Montrer que la **série** converge normalement sur $[a, 1]$. En déduire que f est continue sur $]0, 1]$.
3. Soit $a \in]0, 1]$. Montrer que la **série des dérivées** $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur $[a, 1]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$f'(x) = -2 \sum_{n\geq 0} \frac{n^2x}{(n^2x^2 + 1)^2}.$$

Exercice 3 [7 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction **paire** et 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Que pouvez-vous dire de ses coefficients de Fourier b_n ?
3. Montrer que $a_0 = \frac{4}{\pi}$.
4. Montrer que si n est pair, $n \geq 2$, alors

$$a_n = \frac{4}{\pi(1 - n^2)}.$$

   et, si n est impair, alors $a_n = 0$.
   Indication. On pourra utiliser la formule de trigonométrie suivante :

$$\cos(nx)\sin(x) = \frac{1}{2}\big(\sin((n + 1)x) - \sin((n - 1)x)\big).$$

   Retourner la page SVP.

5. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
6. A l'aide de la formule de Parseval, évaluer

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4p^2)^2}.$$

Exercice 4 [4 points] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{n \ln(x+1)}{1 + n \ln(x+1)} .$$

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa limite f.
2. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite f sur $[1, +\infty)$.

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$