Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2023-2024 Séquence 2
Lundi 19 février 2024

Correction Contrôle Continu

Exercice 1 [4 points]

1. Donner le développement limité de la fonction tan à l'ordre 2 en 0.
2. Est-ce que les propositions suivantes sont correctes ? **Justifiez** toutes vos réponses.
   (a) $x \sim xe^x$ quand $x \to +\infty$?
   (b) $e^x \sim e^x + x$ quand $x \to +\infty$?
   (c) $e^x = o(xe^x)$ quand $x \to +\infty$?

Correction Exercice 1 1. $\tan(x) = x + o(x^2)$ quand $x \to 0$.

2.(a) NON : On a $xe^x/x \to_{+\infty} +\infty$.
(b) OUI : $(e^x + x)/e^x \to_{+\infty} 1$.
(c) OUI : $e^x/xe^x \to_{+\infty} 0$.

Exercice 2 [5 points] Considérons la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec le terme général défini pour $x \in]0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2 + 1}.$$

1. Montrer que la **série** converge simplement sur $]0,1]$.
   On note alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sa somme, pour $x \in]0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la **série** converge normalement sur $[a,1]$. En déduire que f est continue sur $]0,1]$.
3. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la **série des dérivées** $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur $[a,1]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$,

$$f'(x) = -2\sum_{n\geq 0} \frac{n^2x}{(n^2x^2+1)^2}.$$

Correction Exercice 2 1. A x fixé, on écrit :

$$\frac{1}{n^2x^2+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2},$$

légitime car $x \neq 0$.

2. La convergence normale vient du fait que comme les f_n sont décroissantes sur $[a,1]$, on a :

$$\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{a^2n^2+1},$$

puis on remarque que le terme général de cette dernière série est équivalent à

$$\frac{1}{a^2n^2},$$

donc la série converge par le critère de Riemann $(2 > 1)$.
Les fonctions f_n sont continues et $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément : par conséquent, la somme f est continue sur chaque intervalle $[a,1]$ pour $a > 0$, donc aussi sur leur réunion $]0,1]$.

3. On calcule :
$$f_n'(x) = \frac{-2n^2x}{(n^2x^2+1)^2}.$$
En maximisant sur $[a,1]$ le numérateur et en minimisant le dénominateur de $|f_n'(x)| = \frac{2n^2x}{(n^2x^2+1)^2}$ (qui sont tous les deux strictement positifs), on obtient que :
$$\|f_n'\|_\infty \leq \frac{2n^2}{(n^2a^2+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{2}{a^4n^2},$$
et donc on a bien convergence normale de $\sum f_n'$ par le critère de Riemann.
4. Pour la même raison qu'à l'exercice 2, il suffit de montrer que la formule est valable sur chaque intervalle $[a,1]$ pour $a>0$, dont la réunion est $]0,1]$.
Pour cela, il suffit de voir que les f_n sont C^1 (et leurs dérivées valent bien ce qu'il faut) et de plus on a par le 1) convergence simple de $\sum f_n$ au point $x=1$ et par le 3) convergence normale donc uniforme des $\sum f_n'$.

Exercice 3 [7 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction **paire** et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Que pouvez-vous dire de ses coefficients de Fourier b_n ?
3. Montrer que $a_0 = \frac{4}{\pi}$.
4. Montrer que si n est pair, $n \geq 2$, alors
$$a_n = \frac{4}{\pi(1-n^2)}.$$
et, si n est impair, alors $a_n = 0$.
Indication. On pourra utiliser la formule de trigonométrie suivante :
$$\cos(nx)\sin(x) = \frac{1}{2}\big(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\big).$$
5. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
6. A l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4p^2)^2}.$$

Correction Exercice 3 1. Il suffit de dessiner sin sur $[0,\pi]$, puis on réfléchit et on périodise. A posteriori, la fonction est en fait π-périodique.
2. Ils sont tous nuls car f est paire.
3. On a (en utilisant que f paire) :
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{4}{\pi}.$$
4. On suit l'indication (en utilisant toujours que f impaire) :
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)]dx.$$

Ensuite, il faut traiter à part le cas $n = 1$, le cas $n \geq 3$ et impair et le cas où n est pair. Seulement dans ce dernier cas on a une réponse qui est non nulle et vaut :

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{-\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1}\right] = \frac{4}{\pi(1-n^2)}$$

5. Comme f est C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge simplement et on a :

$$Sf(x) := \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 2 \text{ pairs}} \frac{4}{\pi(1-n^2)}\cos(nx) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p\geq 1} \frac{4}{\pi(1-4p^2)}\cos(2px).$$

Comme f est de plus continue, on a $f(x) = Sf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Par la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{4}{\pi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{p\geq 1}\Big(\frac{4}{\pi(1-4p^2)}\Big)^2,$$

et du coup car f^2 est paire et vaut $\sin^2$ sur $[0, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(1-4p^2)^2}.$$

En passant par la formule $\sin^2(x) = (1-\cos(2x))/2$ et en calculant l'intégrale, on obtient que la quantité à gauche est égale à $1/2$. On conclut que :

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(1-4p^2)^2} = \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\Big) = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Exercice 4 [4 points] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x+1)}{1 + n\ln(x+1)}.$$

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa limite f.
2. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite f sur $[1, +\infty[$.

Correction Exercice 4 1. Si $x = 0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle donc converge vers 0. Si $x > 0$, la suite converge vers 1 car lorsque $n \to +\infty$, comme $\ln(x+1)$ est une constante strictement positive à x fixé, le numérateur et le dénominateur sont équivalents entre eux.

2. La fonction $1 - f_n$ (1 étant la limite simple des f_n sur $[1, +\infty[$) est décroissante (car inverse de fonction croissante et strictement positive) donc on a sur $[1, +\infty[$:

$$\|1 - f_n\|_\infty = \frac{1}{1 + n\ln(2)} \to_{+\infty} 0.$$

On a donc bien convergence uniforme des f_n vers leur limite 1 sur $[1, +\infty[$.