

FICHE TD 1 – Relations de comparaison.

Exercice 1 1. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Dire si $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ pour

$$g(x) = x^4, \quad g(x) = 2x^4, \quad g(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x^4 + \frac{1}{x}.$$

2. Calculer un équivalent et les limites des fonctions suivantes quand $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}, \quad g(x) = \frac{(\sin(2x))^2}{\sin(x)}, \quad h(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)}, \quad i(x) = \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1 - \cos(x)}\right)}.$$

3. Donner un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x}, \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad h(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{100}}{x^{101}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-2} + \ln(x) + \sqrt{x}}{\pi\sqrt{x} + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Exercice 3 Donner un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de

$$i(x) = \frac{x^6 + 1}{x^4 + x} - x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercices supplémentaires

Exercice 4 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow +\infty$:

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $f_1(x) = x + \cos x,$ | 3. $f_3(x) = \sqrt{x} + \ln x,$ | 5. $f_5(x) = x^4 + e^x,$ |
| 2. $f_2(x) = x^2 + \sin x,$ | 4. $f_4(x) = xe^x,$ | 6. $f_6(x) = e^{2x} - \sqrt{x}.$ |

Exercice 5 Étudier la limite de f quand $x \rightarrow a$ lorsque

- | | |
|--|--|
| 1. $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty,$ | 4. $f(x) = \frac{x^2 + 3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty,$ |
| 2. $f(x) = (\pi - 2x) \tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2},$ | |
| 3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} - \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^4 + x^3}}$ et $a = +\infty,$ | 5. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ et $a = e.$ |

Exercice 6 Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x},$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right),$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4},$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad a \in \mathbb{R}^*,$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2},$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right),$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))},$ | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}.$ |

Exercice 7 Déterminer un développement limité ou asymptotique de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{2+x}$ quand $x \rightarrow 0$, à l'ordre 3,
2. $f(x) = \ln(\sin x)$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, à l'ordre 3,
3. $f(x) = x^2 \ln x$ quand $x \rightarrow 1$ et à l'ordre 5,
4. $f(x) = \ln(2+x)$ quand $x \rightarrow 0$, à l'ordre 2,
5. $f(x) = \sin x$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, à l'ordre 3,
6. $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ quand $x \rightarrow +\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 8 Déterminer pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement quand $x \rightarrow 0$ à la précision demandée :

1. $f(x) = e^{-x}$ avec une précision $O(x^3)$,
2. $f(x) = \frac{1}{2+x}$ avec une précision $O(x^3)$,
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ avec une précision $O(x^2)$,
4. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ avec une précision $O(x^3)$,
5. $f(x) = \ln(1+x^2)$ avec une précision $O(x^6)$,
6. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ avec une précision $O(x^3)$,
7. $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ avec une précision $O(x^3)$,
8. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ avec une précision $O(x^3)$,
9. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ avec une précision $O(x^3)$.