# FICHE TD 2 – Suites et séries de fonctions

**Exercice 1.** Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n2^{-x}+x}{n+x}\,.$$

**Exercice 2.** Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}\,, & \text{sur } [0,1]\,,\\
(2) & f_n(x) = \sin\left(\dfrac{nx}{1+nx}\right)\,, & \text{sur } [0,+\infty[\,,\\
(3) & f_n(x) = nx^2e^{-nx}\,, & \text{sur } [0,\pi]\,,\\
(4) & f_n(x) = x\sqrt{n}\;\; e^{-nx}\,, & \text{sur } [0,+\infty[\,.
\end{array}$$

**Exercice 3.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}\,.$$

1. Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Le série converge-t-elle simplement ? Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ ? On notera $f$ sa somme, c'est à dire la fonction donnée par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
3. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $f'$ est donnée par

$$f'(x) = -2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2}\,.$$

**Exercice 4.** Étudier la convergence simple et normale des séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , de terme général donné par :

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}\,, & \text{sur } \mathbb{R}\,,\\
(2) & f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}\,, & \text{sur } [0,+\infty[\,.
\end{array}$$

**Exercice 5.** Étudier la nature des séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , de terme général donné par :

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}\,, & \text{sur } [0,+\infty[\\
(2) & f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}\,, & \text{sur } \mathbb{R}\,,\\
(3)^{1} & f_n(x) = (-1)^n\ln\left(1+\dfrac{x}{n(1+x)}\right)\,, & \text{sur } [0,+\infty[\,.
\end{array}$$

**Exercice 6.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n$ par

$$f_n(x) = ne^{-nx}\,.$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On notera $f$ sa somme.
3. Calculer une primitive de $f$.
4. En déduire une formule simple pour la valeur de $f(x)$.

**Exercice 7.** [1] Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + n + |x|}\,.$$

Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

**Exercice 8.** Calculer

$$\forall x \in ]0, \pi[\,, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sin(x)\cos^n(x)$$

et

$$\forall x > 0\,, \quad G(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}\,.$$

**Exercice 9.** On définit pour tout $x \in ]1, +\infty[\,$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que $\zeta$ est bien définie et de classe $C^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

**Exercice 10.** Soit $I = ]1, +\infty[\,$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n}\,.$$

1. Montrer qu'on définit bien ainsi une fonction $f$ sur $I$.
2. Montrer que $f$ est continue sur $I$.
3. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $I$.

**Exercice 11.** Étudier la convergence éventuelle de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , où

$$u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}.$$

Donner un équivalent de la somme quand $x \to 0, x \neq 0$.
(Indication : On pourra montrer et utiliser les inégalités de comparaison à une intégrale :

$$u_n(x) \geq \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \geq u_{n+1}(x).)$$

**Exercice 12.** Pour tout $x \in ]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,.$$

1. Montrer que $f$ est correctement définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ (Indication : on pourra comparer à une intégrale comme à l'exercice précédent) et quand $x \to +\infty$.

1. Exercice plus délicat, à faire en approfondissement