Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2023-2024
Printemps 2024

FICHE TD 3B – Séries de Fourier (suite)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\quad (b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y = f$$

1. Rappeler à partir de l'exercice 3 du TD3A la série de Fourier de f.
2. On suppose que y_0 est une solution particulière de (E) développable en série de Fourier : trouver sa série de Fourier.
3. On rappelle de l'exercice 7 du TD3A que la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par
$$g(x) = \text{ch }(x) - \frac{\text{sh }(\pi)}{\pi}$$
admet pour série de Fourier $g(x) = \dfrac{2\text{sh }(\pi)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx)$. Trouver un développement en série de Fourier de la primitive G vérifiant $G(0) = 0$.
4. En déduire une formule pour y_0. Vérifier que y_0 est C^2 sur $]-\pi, \pi[$ et solution de (E) sur cet intervalle.
5. En déduire la solution générale de (E) sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y = f(x)$$

où f est la fonction 2π-périodique et paire telle que

$$f(x) = 2x - \pi + \frac{8}{\pi}\cos(x) \qquad \text{sur } [0, \pi]\,.$$

1. Rappeler la série de Fourier de f à partir de l'exercice 2 du TD3A.
2. Calculer une solution particulière de (E) développable en série de Fourier.
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercices supplémentaires

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y = |\cos(x)|$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Quelle est la plus petite période de f ?
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$. A-t-on convergence uniforme ?
4. Calculer une solution particulière de (E) développable en série de Fourier.
5. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f. Expliciter l'écriture complexe.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$.
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)^2}$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on a $\displaystyle\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

En déduire les valeurs des sommes

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$? A-t-on convergence uniforme ?

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y = f(x)\,.$$

On suppose que (E) admet une solution particulière y_0 impaire, 2π-périodique et développable en série de Fourier : $y_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(nx)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n = \dfrac{1}{n(2 - n^2)}$.
6. En déduire la solution générale de (E).
7. Exprimer l'énergie totale du signal représenté par y_0 $E = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y_0(x)^2\, dx$ comme la somme d'une série numérique.