Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2023-2024
Printemps 2024

FICHE TD 4 - ÉDP et Séries de Fourier

Exercice 1. On considère l'équation de la chaleur

$$(EC)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in]0, L[,\ \forall t > 0 & (1) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L], & (2) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \forall t \geq 0 & (3) \end{cases}$$

qui modélise le problème suivant : une barre métallique de longueur L, représentée par le segment $[0, L]$, dont la température à l'instant t au point $x \in [0, L]$ est donnée par $u(x, t)$. On cherche à déterminer u en connaissant la condition initiale (2) et les conditions aux bords (3).

On pose $D =]0, L[\times]0, +\infty[$ et on suppose que u_0 est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, L]$ et vérifie les conditions aux bords $u_0(0) = u_0(L) = 0$. On va montrer que (EC) admet une solution u, en particulier assez régulière pour satisfaire (1) au sens classique, qui est de plus continue sur $\overline{D} := [0, L] \times [0, +\infty[$.

1. Montrer que si une fonction u régulière et solution de (1) s'écrit sous la forme $u(x, t) = F(x)G(t)$, où F et G ne s'annulent pas sur $]0, L[$ ou $]0, +\infty[$ (dans cette question), alors F et G vérifient chacune une équation différentielle linéaire qu'on déterminera.
2. Supposant u non identiquement nulle sur D, résoudre ces équations différentielles en tenant compte des conditions aux bords (3).

Soit $\bar{u}_0$ la fonction impaire et $2L$-périodique qui coïncide avec u_0 sur $[0, L]$.

3. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $\bar{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que toute fonction de la forme

   $$(4)\qquad u(x, t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

   est une solution de (1) et (3).
5. Montrer pour conclure que la fonction u ainsi définie satisfait (2) et est bien continue sur $\bar{D}$.
6. On montre dans cette question que la répartition de température tend vers l'état d'équilibre que constitue ici la fonction nulle sur $[0, L]$. Plus précisément, si $f_t : x \mapsto u(x, t)$ avec u toujours définie en (4), montrer que la famille de fonctions $(f_t)_{t\geq 0}$ tend vers 0 uniformément sur $[0, L]$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$.
Montrer que F satisfait l'équation de transport $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est solution de l'équation des ondes (appelée encore équation des cordes vibrantes)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

si et seulement s'il existe des fonctions A et B de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = A\left(\frac{x - y}{2}\right) + B\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ *et* $v = \frac{x-y}{2}$ *et calculer* $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(u+v, u-v)$.

Exercice 4. En effectuant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation de transport

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5. On considère l'équation de Laplace pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{EL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions $u_n(x, y) = e^{-nx}\cos(ny)$ et $v_n = e^{-nx}\sin(ny)$ sont solutions de (EL) de période 2π en y.
2. Soit
$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\big(a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)\big).$$
Trouver les coefficients a_n et b_n pour que $u(x, y)$ vérifie la condition de bord $u(0, y) = y$, $\forall y \in] - \pi, \pi[$.
3. Montrer que u est solution 2π-périodique en y de (EL) sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Soient $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1 + x^2)\right)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 7. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. On considère $\varphi : D \to D$ définie par

$$\varphi(x, y) = (u, v), \quad \text{avec } u = x,\ v = \frac{y}{x}.$$

1. Montrer que la fonction φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de D sur D ainsi que sa fonction réciproque.
2. A l'aide du changement de variables φ, résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y.$$
3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie
$$f(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, y) = \sin(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}?$$

Exercice 8. Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'Équation aux Dérivées Partielles (ÉDP) suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur le demi-plan $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}$.

Exercice 9. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4y$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x + y,\ v = x - y$, trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et solutions de l'équation (E).
2. Parmi les solutions trouvées en 1) quelle est celle qui vérifie les conditions supplémentaires
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, x) = x^2 \text{ et } f(x, -x) = x^3.$$

Exercice 10. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + 2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v - u^2)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 12. On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall x \in]0, L[\text{ et } t > 0, \tag{EC}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $L > 0$. On impose les conditions aux limites

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geqslant 0. \tag{CL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $y(x,t) = e^{-n^2a^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ est une solution de (EC) qui satisfait les conditions aux limites (CL).
2. Soit
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2a^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$
   Comment choisir les coefficients b_n pour que $y(x,t)$ vérifie la condition initiale $y(x,0) = \varphi(x)$, où φ est une fonction donnée sur $]0, L[$?
3. Déterminer les coefficients b_n dans le cas $\varphi(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$.