FICHE TD 5 - Intégrales impropres

Exercice 1 Calculer par intégration par parties ou changement de variables les intégrales à bornes suivantes :

$$(a) \int_0^{2\pi} x\cos(x)dx\,, \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Exercice 2 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?
($n \in \mathbb{N}$, $a \in]0,+\infty[$, $b \in]0,+\infty[$).

$$(a) \int_0^{\infty} \ln(t)dt, \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-4t}dt, \quad (c) \int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt,$$

$$(d) \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt, \quad (e) \int_0^{\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt, \quad (f) \int_2^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt\,.$$

Exercice 3 Montrer en intégrant par partie que

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x}dx = \cos(1) - \frac{\cos(t)}{t} - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx\,.$$

En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.

Exercices supplémentaires

Exercice 4 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? ($n \in \mathbb{N}$, $a \in]0,+\infty[$, $b \in]0,+\infty[$)

$$(a) \textstyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt, \quad (b) \displaystyle\int_0^2 \ln(t)dt, \quad (c) \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

$$(d) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}, \quad (e) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad (f) \int_0^{\infty} e^{-bx}\sin(ax)dx\,.$$

Exercice 5 Soit $F : [1,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée, dérivable avec dérivée continue. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{F'(x)}{x}dx$$

est convergente. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$ et de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Exercice 6 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln t)^a t^b}dt, \quad (b) \int_{2022}^{\infty} \frac{1}{(\ln t)^a t^b}dt\,.$$

Exercice 7 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, on rappelle que f est **absolument intégrable** (ou sommable) sur $\mathbb{R}$ si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \,.$$

1. Soit f une fonction continue absolument intégrable. On *suppose* que la limite $l := \lim_{|x| \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ existe, montrer que $l = 0$.

2. On cherche maintenant à montrer qu'une fonction continue absolument intégrable n'a pas forcément une limite nulle quand $|x| \to +\infty$. On considère donc dorénavant f donnée par la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, où les g_n sont les fonctions à supports deux à deux disjoints données par $g_n(x) = g(2^n(x-n))$, avec g donnée par

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \,, \\ 2 - x \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \,, \\ 0 \text{ sinon} \,. \end{cases}$$

   (a) Esquisser le graphe de la fonction continue f.

   (b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 1.$$

   (c) Quelle est la limite $\lim_{n \to +\infty} f(n)$? Quelle est la limite $\lim_{n \to +\infty} f(n + \frac{1}{2^n})$?

   (d) En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.