

FICHE TD 6 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 Soient $f(x) := (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$ et $g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f et g sont \mathcal{C}^1 et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; en déduire la valeur de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 Soit F donnée pour $p > 0$ par

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Let but est de calculer $F(p)$ en passant par $F'(p)$.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.
2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour $p \geq p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour tout $p > 0$.
3. Vérifier par dérivation que $\frac{p \sin x + \cos x}{1+p^2} e^{-px}$ est une primitive de $-e^{-px} \sin x$ et calculer $F'(p)$.
4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $|F(p)| \leq \int_0^\infty e^{-px} dx$ et en déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.
6. Montrer que

$$C = \lim_{p \rightarrow +\infty} (F(p) + \arctan p) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 3 Calcul d'une fonction définie par une intégrale.

Soit $f(p) := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{px} dx$.

1. Montrer que f est bien définie sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire que $f(p) = \sqrt{\pi} e^{p^2/4}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin(tx)}{1+t^4} dt$.

1. Montrer que l'intégrale pour définir $f(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la k -ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f^{(4)}(x) + f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(p) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-px} dx$.

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant la relation $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, montrer que $f''(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4}$
3. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$: $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f'(p) = 0$.
4. En déduire que

$$f(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{p}{4} \ln\left(\frac{p^2}{p^2+4}\right).$$

5. Trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$.