

## FICHE TD 7 - Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace  $\mathcal{L}[f]$  d'une fonction  $f$  est donnée sur son domaine de définition par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

**Exercice 1** Par un calcul explicite, trouver la transformée de Laplace de  $f$  où

$$(a) f(t) = te^{6t}, \quad (b) f(t) = e^{-t} \sin 2t.$$

En se ramenant à des résultats connus, trouver la transformée de Laplace de  $f$  où

$$f(t) = e^{\gamma t} \sin(\alpha t) \cos(\beta t),$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels.

**Exercice 2** (*Valeur initiale et finale*) Soit  $f(t) := e^{\gamma t} \cos(t)$ . Déterminer, pour  $\gamma < 0$ , puis pour  $\gamma \geq 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f](s), \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s),$$

lorsque cela est possible.

**Exercice 3** (*Inversion de la transformation de Laplace*) Trouver la fonction  $f$  telle que  $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$ , où

$$(a) Y(s) = \frac{7s - 25}{s^2 - 7s + 12}, \quad (b) Y(s) = \frac{2s - 5}{s^2 + 4s + 8}, \quad (c) Y(s) = \frac{s + 4}{(s - 2)^3}, \quad (d) Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^3 - 3s^2 + 4s - 2}.$$

**Exercice 4** (*Équations différentielles linéaires avec conditions initiales*)

En utilisant la transformation de Laplace, trouver la solution  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de chacun des problèmes suivants :

$$(a) f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \\ (b) f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$