

FICHE TD 8 - Produit de convolution

EXERCICE 1 - *Fonctions indicatrices (ou fonctions caractéristiques)*. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I, \end{cases}$$

la fonction indicatrice (ou caractéristique) sur I .

1. On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Établir par calcul direct que $1_I \star 1_I$ est une fonction continue, qui est linéaire par morceaux. Tracer son graphe.
2. On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Établir par calcul direct que $1_I \star 1_I \star 1_I$ est une fonction dérivable, qui est quadratique par morceaux. Tracer son graphe.
3. Soit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$. Établir par calcul direct que $1_{[-1,1]} \star h$ est continue.

EXERCICE 2 Soient a et b deux nombres réels fixés. Soit f_a donnée par $f_a(x) = e^{ax}$. Justifier l'existence des produits de convolution suivants, puis les calculer :

- (a) $(f_a 1_{[0,+\infty[}) \star (f_b 1_{[0,+\infty[})$,
- (b) $1_{[-a,a]} \star (f_b 1_{[0,+\infty[})$,
- (c) $(1_{[-a,a]} \star f_b) 1_{[0,+\infty[}$

EXERCICE 3 - *Convolution de Gaussiennes*.

Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On admet que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{m,\sigma}(x) dx$.
2. Montrer que $g_{p,\sigma} \star g_{q,\tau} = g_{p+q, \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$.