Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2023-2024
Printemps 2024

FICHE TD 9 - Transformation de Fourier, principe d'incertitude

Normalisation : la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction absolument intégrable f est ici donnée par

$$\widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx\,.$$

Exercice 1 La fonction sinc donnée par $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est appelée *sinus cardinal.* Soit $1_{[-a,a]}$ la fonction indicatrice de $[-a, a]$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2a}1_{[-a,a]}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(x)dx$.
3. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(x)dx$.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| > 1\,. \end{cases}$
5. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^4(x)dx$.

Exercice 2 Soient $k_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (absolument intégrable).

1. Quelle est la transformée de Fourier de g avec $g(x) = f(x)\cos(k_0 x)$ (en terme de la transformée de f) ?
2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de g avec $g(x) = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\cos(2\pi x)$.

Exercice 3 Soit $H = 1_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside.

1. Calculer la transformée de Fourier de f avec $f(x) = xe^{-x}H(x)$.
2. Calculer la transformée de Fourier de f avec $f(x) = x^n e^{-x}H(x)$.
3. Calculer la transformée de Fourier de f avec $f(x) = xe^{-|x|}$.

Exercice 4 Calculer la transformée de Fourier de f avec $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x-\frac{1}{2})}$.
Indication : on pourrait utiliser $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Exercice 5 On cherche une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}. \tag{E}$$

1. Montrer que, si f est solution, alors $\widehat{f}$ satisfait
$$\widehat{f}(k) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+k^2} - \frac{1}{4+k^2}\right)\,.$$
2. En déduire f.
Révision TD1 (indépendant du reste de l'exercice) : retrouver directement à partir de la formule que vous venez d'obtenir pour f qu'elle est deux fois dérivable au voisinage de 0.
3. Donner toutes les solutions de (E). Pourquoi f est-elle la seule solution de (E) à laquelle aboutit naturellement la procédure précédente (formelle en général) ?