ALGÈBRE COMMUTATIVE I

Exercice 1 — Soit A un anneau (non nécessairement commutatif). Un *idéal bilatère* de A est un sous-groupe additif $\mathfrak{a}$ de A stable par multiplication à gauche et à droite. Étant donnés un entier naturel $n \geq 1$ et un corps k, déterminer les idéaux bilatères de l'anneau $\mathrm{M}_n(k)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans k.

Exercice 2 (*Anneaux booléiens*) — Un anneau est dit *booléien* si tout élément a satisfait à la condition $a^2 = a$.

1. Soit A un anneau booléien.
   (i) Démontrer que A est commutatif et qu'il est de caractéristique 2, c'est-à-dire que $2a = 0$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.
   (ii) Caractériser les anneaux booléiens intègres et en déduire que tout idéal premier de A est maximal.
   (iii) Démontrer que tout idéal de type fini de A est principal.

2. Soit E un ensemble. Démontrer que, muni des deux lois de composition $a + b = (a \cup b) - (a \cap b)$ (différence symétrique) et $ab = a \cap b$, l'ensemble $\mathrm{A} = \mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties de E est un anneau booléien.
3. Soit A un anneau booléien et soit $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.
   (i) Démontrer que, pour tout élément f de A, $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathrm{X} \mid f \notin x\}$ est une partie ouverte et fermée de X.
   (ii) Établir que toute partie ouverte et fermée Y de X est de la forme $\mathrm{D}(f)$, $f \in \mathrm{A}$. (*Indication* : on pourra vérifier que toute réunion finie d'ouverts principaux est encore un ouvert principal, puis considérer un recouvrement de Y par des ouverts principaux.)
   (iii) Démontrer que l'espace topologique X est compact.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dorénavant sont commutatifs.

Exercice 3 (*Théorème de Hamilton-Cayley*) — Soient A un anneau, $n \geq 1$ un entier et $\mathrm{M} = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n sur A. Le *déterminant* de M est l'élément $\det(\mathrm{M})$ de A défini par la formule :

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \dots m_{n,\sigma(n)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Soient A un anneau, M une matrice carrée d'ordre n sur A et T une indéterminée. Le *polynôme caractéristique* de M est le polynôme unitaire $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \det(\mathrm{TI}_n - \mathrm{M}) \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$, où I_n est la matrice identité de rang n.

1. Démontrer la généralisation suivante du théorème de Hamilton-Cayley : quels que soient l'anneau A et la matrice carrée M d'ordre n sur A, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0$ dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{A})$. (*Indication* : on pourra commencer par introduire des indéterminées T_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, et considérer l'anneau $\mathbb{Z}[(\mathrm{T}_{ij})]_{1 \leq i,j \leq n}$.)
2. Soit N une matrice carrée d'ordre n sur un anneau A. Démontrer que N est nilpotente si et seulement si chaque coefficient non dominant du polynôme caractéristique de N est nilpotent.

Exercice 4 — Soit A un anneau.

1. Soit $\mathrm{A}[\mathrm{X}]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée X, à coefficients dans A.
   (i) Déterminer le groupe $\mathrm{A}[\mathrm{X}]^\times$ des unités de $\mathrm{A}[\mathrm{X}]$.
   (ii) Déterminer le nilradical et le radical (de Jacobson) de $\mathrm{A}[\mathrm{X}]$.
   (iii) Démontrer qu'un élément f de $\mathrm{A}[\mathrm{X}]$ est diviseur de zéro si et seulement s'il existe un élément non nul a de A tel que $af = 0$.

2. Soit I un ensemble. Étendre les résultats précédents à l'anneau $A[X_i]_{i\in I}$ des polynômes en la famille d'indéterminées $(X_i)_{i\in I}$, à coefficients dans A.

Exercice 5 — Soit A un anneau et soit $A[[X]]$ l'anneau des séries formelles en l'indéterminée X, à coefficients dans A.

1. Démontrer qu'un élément f de $A[[X]]$ est inversible si et seulement si $f(0)$ est un élément inversible de A. En déduire le radical (de Jacobson) de $A[[X]]$.
2. Démontrer que le nilradical $\mathfrak{N}(A[[X]])$ de l'anneau $A[[X]]$ est contenu dans l'idéal $\mathfrak{N}(A)[[X]]$. Donner un exemple d'anneau pour lequel cette inclusion est une égalité, puis un exemple pour lequel elle est stricte.
3. Démontrer que l'application $\mathfrak{m} \mapsto (\mathfrak{m},X)A[[X]] = \mathfrak{m}A[[X]] + XA[[X]]$ réalise une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de A sur l'ensemble des idéaux maximaux de $A[[X]]$.

Exercice 6 (*Localisation*) —

1. Donner un exemple d'anneau intègre A qui ne soit pas un corps mais dans lequel il existe un élément f tel que l'anneau $A[f^{-1}]$ soit un corps.
2. Soit A un anneau.
   (i) Démontrer que l'application canonique $A \to \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}}$ est injective.
   (ii) Démontrer que l'anneau A est réduit (c'est-à-dire ne possède pas d'élément nilpotent non nul) si et seulement si chacun de ses localisés $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, est réduit.
3. Soit A un anneau intègre. Étant donné un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, justifier que l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau du corps des fractions K de A. Ces identifications étant faites, démontrer l'égalité $A = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}$.
4. Soit A un anneau. Un élément de A est dit *régulier* s'il n'est pas diviseur de zéro.
   (i) Démontrer que l'ensemble S_0 des éléments réguliers de A est une partie multiplicative et qu'elle est *saturée*, c'est-à-dire qu'elle satisfait à la condition
   $$ss' \in S_0 \Longleftrightarrow s \in S_0 \text{ et } s' \in S_0.$$
   (ii) Démontrer que l'application canonique $A \to S_0^{-1}A$ est injective.
   (iii) Démontrer que S_0 est la plus grande partie multiplicative S de A telle que l'application canonique $A \to S^{-1}A$ soit injective.

L'anneau $S_0^{-1}A$ est l'*anneau total des fractions* de A.

Exercice 7 (*Spectre*) — Soit A un anneau et soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ son spectre, que l'on munit de la topologie de Zariski.

1. Soient I un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A indexée par I. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Les ouverts principaux $D(f_i)$, $i \in I$, recouvrent X.
   (ii) Il existe un sous-ensemble fini J de I et une famille $(g_j)_{j\in J}$ d'éléments de A tels que $\sum_{j\in J} f_j g_j = 1$.
   En déduire que l'espace topologique X est quasi-compact (c'est-à-dire : on peut extraire de tout recouvrement ouvert un sous-recouvrement fini).
2. Démontrer que l'espace topologique X est séparé (donc compact) si et seulement si tous les idéaux premiers de A sont maximaux. (*Indication* : on pourra se ramener au cas d'un anneau réduit, puis observer que la seconde condition implique alors que tous les localisés $A_{\mathfrak{m}}$ de A sont des corps.)
3. Un élément e de A est *idempotent* s'il vérifie $e^2 = e$. Démontrer que l'application $e \mapsto D(e)$ réalise une bijection de l'ensemble des éléments idempotents de A sur l'ensemble des parties ouvertes et fermées de l'espace topologique X. (*Indication* : remarquer que, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A tels que $V(\mathfrak{a})$ et $V(\mathfrak{b})$ soient des fermés disjoints dans X, alors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.)
4. On rappelle qu'un espace topologique X est dit *irréductible* s'il est non vide et s'il ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux sous-espaces fermés stricts.
   (i) À quelle condition un espace topologique séparé est-il irréductible ?

(ii) Démontrer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est irréductible si et seulement si le nilradical de l'anneau A est un idéal premier. En déduire que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, le fermé $V(\mathfrak{a})$ de X est irréductible si et seulement sa racine $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$, est un idéal premier.
(iii) Soit $A = \mathbb{Q}[T_1, T_2, T_3]/(T_1^2 - T_2T_3, T_1T_3 - T_1)$. Vérifier que $X = \mathrm{Spec}(A)$ n'est pas irréductible puis montrer que l'on peut écrire cet espace comme réunion de trois fermés irréductibles distincts.

5. Étant donné un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$, on désigne par ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ l'application associée.
(i) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $i : A \to A_\mathfrak{p}$ l'homomorphisme canonique. Établir que l'application ${}^a i$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})$ sur l'intersection des voisinages de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(A)$.
(ii) Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $j : B \to B/\mathfrak{p}B$ l'épimorphisme canonique. Démontrer que l'application ${}^a j$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}((B/\mathfrak{p}B)_\mathfrak{p})$ sur la fibre de l'application ${}^a\varphi$ au-dessus du point $\mathfrak{p}$.
(iii) Soient f un élément de A et T une indéterminée. Démontrer que l'application $\mathrm{Spec}(A[T]) \to \mathrm{Spec}(A)$ associée à l'homomorphisme canonique $A \to A[T]$ induit un homéomorphisme du fermé $V(fT - 1)$ de $\mathrm{Spec}(A[T])$ sur son image dans $\mathrm{Spec}(A)$ et déterminer celle-ci. Qu'observe-t-on ?

Exercice 8 (*Anneaux de Jacobson*) — Soit A un anneau. On pose $X = \mathrm{Spec}(A)$ et on désigne par X_0 le sous-ensemble de X constitué des idéaux *maximaux* de A (ou, de manière équivalente, des points *fermés* de X).

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) Toute partie localement fermée non vide de X rencontre X_0. [1]
(ii) Tout idéal premier de A est l'intersection des idéaux maximaux le contenant.
(iii) Dans tout quotient de A, le radical est égal au nilradical.
On dit que A est un *anneau de Jacobson* s'il satisfait aux trois conditions équivalentes qui précèdent.
2. À quelle condition un anneau local est-il un anneau de Jacobson ?
3. Vérifier qu'un corps (resp. $\mathbb{Z}$; resp. l'anneau $k[T]$ des polynômes en une indéterminée T à coefficients dans un corps k) sont des anneaux de Jacobson.
4. Supposons que A soit un anneau de Jacobson et munissons le sous-ensemble X_0 de X de la topologie induite. Démontrer que X est irréductible si et seulement si X_0 est irréductible.

On démontrera dans l'exercice suivant que, si A est un anneau de Jacobson, toute A-algèbre de type fini est encore un anneau de Jacobson. En particulier : toute $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson.

Exercice 9 (*Nullstellensatz de Hilbert*) — Le but de cet exercice est de décrire explicitement les idéaux maximaux d'un anneau de polynômes à coefficients dans un corps algébriquement clos et d'en tirer quelques conséquences.

1. Soit k un corps et soit A une k-algèbre de type fini que l'on suppose également être un corps. Nous allons démontrer que tous les éléments de A sont *algébriques* sur k, c'est-à-dire sont racine d'un polynôme non nul à coefficients dans k.
(i) Soient $t_1, \ldots, t_n$ des générateurs de A sur k. Conclure lorsque $n = 1$.
(ii) En raisonnant par récurrence sur n, montrer que l'on peut faire l'hypothèse que t_1 est *transcendant* sur k — c'est-à-dire n'est annulé par aucun polynôme non nul à coefficients dans k [2] — et se ramener au cas où $t_2, \ldots, t_n$ sont algébriques sur le corps $k(t_1)$.
(ii) Démontrer qu'il existe un polynôme $f \in k[T]$ satisfaisant à la condition suivante : quel que soit l'élément a de A, il existe un entier naturel N (dépendant de a) tel que $f(t_1)^N a$ annule un polynôme

[1] On dit que X_0 est une partie « très dense » de X.
[2] On admettra le résultat suivant, qui sera démontré au chapitre IV du cours : étant donné un homomorphisme d'anneaux $A \to B$, l'ensemble des éléments de B qui sont racine d'un polynôme *unitaire* de l'anneau de polynômes A[T] constituent un sous-anneau de B.

unitaire à coefficients dans $k[t_1]$ [(3)].
(iii) Montrer que l'observation précédente conduit à une contradiction si on l'applique aux éléments a de $k(t_1)$ puis conclure.

2. Soit k un corps algébriquement clos. Étant donné un entier $n \geq 1$, déduire du résultat précédent que les idéaux maximaux de l'algèbre $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ sont précisément les idéaux de la forme $(T_1 - t_1, \ldots, T_1 - t_n)$, où $(t_1, \ldots, t_n)$ est un n-uplet d'éléments de k. Démontrer plus généralement que, pour toute k-algèbre de type fini A, l'application
$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}, k) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A}),\ u \mapsto \mathrm{Ker}(u)$$
réalise une bijection de l'ensemble des homomorphismes k-linéaires de A dans k sur l'ensemble des idéaux maximaux de A.
3. Donner un contre-exemple aux assertions précédentes si le corps k n'est pas algébriquement clos.
4. Soient k un corps, A, B deux k-algèbres de type fini et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un k-homomorphisme.
(i) Démontrer que l'application ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ associée à φ envoie un idéal maximal sur un idéal maximal.
(ii) Déduire de la question précédente que toute algèbre de type fini sur un corps est un anneau de Jacobson (cf. exercice 8).
5. Soit k un corps algébriquement clos. Démontrer le *théorème des zéros* (ou *Nullstellensatz*) de Hilbert :
   - Tout idéal strict $\mathfrak{a}$ de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ admet au moins un zéro dans k^n.
   - Pour qu'un polynôme f de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ s'annule sur l'ensemble $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cap k^n$ des zéros d'un idéal $\mathfrak{a}$ de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$, il faut et il suffit que l'une de ses puissances soit contenue dans $\mathfrak{a}$.
6. Le résultat de la question 4 (ii) peut se généraliser amplement : Étant donné un anneau de Jacobson A, toute A-algèbre de type fini B est également un anneau de Jacobson.
Notons $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ le morphisme structural et supposons $\mathrm{B} \neq 0$.
(i) Soient $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ son image dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ par l'application ${}^a\varphi$. En utilisant la question 4 (ii) [(3)], démontrer qu'il existe un élément f de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ tel que tout élément du corps $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ soit racine d'un polynôme unitaire appartenant à $\big((\mathrm{A}/\mathfrak{p})[f^{-1}]\big)[\mathrm{T}]$.
(ii) Déduire de ce qui précède que l'anneau $\big(\mathrm{A}/\mathfrak{p}\big)[f^{-1}]$ est un corps puis, en utilisant le fait que A est un anneau de Jacobson, conclure que $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A.
(ii) Démontrer finalement que B est un anneau de Jacobson. (*Indication* : utiliser la caractérisation 1 (i) de l'exercice 8.)
7. On sait que toute $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson (cf. exercice 8). Déduire de ce qui précède le fait suivant : étant donnés un entier naturel $n \geq 1$, un ensemble I et une famille $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de polynômes dans $\mathbb{Z}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   - les f_i engendrent un idéal strict de $\mathbb{Z}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$;
   - il existe un nombre premier p tel que les f_i aient un zéro commun dans un corps fini de caractéristique p.

Exercice 10 — Soit $(\mathrm{T}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de n^2 indéterminées et soit Δ le polynôme dans $\mathbb{Z}[(\mathrm{T}_{i,j})]_{1 \leq i,j \leq n}$ déterminant de la matrice $\mathrm{M} = (\mathrm{T}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (cf. exercice 3).

1. Soit k un corps algébriquement clos. On munit l'ensemble $\mathrm{M}_n(k)$ des matrices carrées d'ordre n sur k, naturellement identifié à k^{n^2}, de la topologie de Zariski. Démontrer que, pour tout entier naturel r, l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est un fermé irréductible de $\mathrm{M}_n(k)$.
2. Déduire de la question précédente que, pour tout corps algébriquement clos k, l'image de Δ dans l'anneau $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ est irréductible (c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes non constants.)

[(3)] On pourra aussi utiliser la note [(2)] de la page précédente