ALGÈBRE COMMUTATIVE II

Exercice 1 (*Localisation des modules*) — Soient A un anneau, M un A-module et S une partie multiplicative de A.

1. On voit tout $S^{-1}A$-module comme un A-module grâce à l'homomorphisme canonique $A \to S^{-1}A$.
   (i) Supposons qu'il existe deux $S^{-1}A$-modules M' et M'' ainsi que des applications A-linéaires $\lambda' : M \to M'$ et $\lambda'' : M \to M''$ tels que, pour tout $S^{-1}A$-module N, les applications
   $$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda'$$
   et
   $$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda''$$
   soient des bijections. Démontrer qu'il existe un et un seul isomorphisme de $S^{-1}A$-modules $\varphi : M' \to M''$ tel que $\lambda'' = \varphi \circ \lambda'$.
   (ii) Démontrer qu'il existe un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ et une application A-linéaire $\lambda : M \to S^{-1}M$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout $S^{-1}A$-module N, l'application
   $$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda$$
   est une bijection. En vertu de la question précédente, le couple $(S^{-1}M, \lambda)$ est unique à un isomorphisme unique près.
2. Soit N un sous-module de M. Vérifier que $S^{-1}N$ est un sous-$S^{-1}A$-module de $S^{-1}M$ et démontrer que les $S^{-1}A$-modules $S^{-1}M/S^{-1}N$ et $S^{-1}(M/N)$ sont canoniquement isomorphes.
3. Supposons que M soit de type fini. Démontrer que $S^{-1}M = 0$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.
4. Étant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on pose $M_{\mathfrak{p}} = (A - \mathfrak{p})^{-1}M$. Démontrer que l'application canonique $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} M_{\mathfrak{m}}$ est injective.

Exercice 2 — Soient A un anneau, I un ensemble et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A engendrant l'idéal unité. Soit également M un A-module.

1. Étant donnés $i, j \in I$, justifier que l'homomorphisme canonique $M \to M[(f_i f_j)^{-1}]$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique $M \to M[f_i^{-1}]$ (resp. $M \to M[f_j^{-1}]$) et induit un isomorphisme entre $M[(f_i f_j)^{-1}]$ et $M[f_i^{-1}][f_j^{-1}]$ (resp. entre $M[(f_i f_j)^{-1}]$ et $M[f_j^{-1}][f_i^{-1}]$).
2. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément $(m_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} M[f_i^{-1}]$:
   (i) il existe un élément m de M, uniquement déterminé, tel que $m_i = m/1$ dans $M[f_i^{-1}]$ pour tout $i \in I$;
   (ii) quels que soient $i, j \in I$, $m_i/1 = m_j/1$ dans $M[(f_i f_j)^{-1}]$.
3. (*Interprétation géométrique.*) Supposons que A soit une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k. On désigne par Max(A) l'ensemble des idéaux maximaux de A et on rappelle que $A/\mathfrak{m} = k$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ (cf. Fiche I, exercice 9) ; pour tout élément a de A, on note $\tilde{a}$ l'application
   $$\mathrm{Max}(A) \to k, \quad \mathfrak{m} \mapsto \tilde{a}(\mathfrak{m}) = a \bmod \mathfrak{m}.$$

   Une fonction $f : \mathrm{Max}(A) \to k$ est dite *régulière* si elle satisfait à la condition suivante : quel que soit le point x de Max(A), il existe un voisinage ouvert U de x et des éléments a, b de A tels que la fonction $\tilde{b}$ ne s'annule pas sur U et $f_{|U} = \tilde{a}/\tilde{b}$. Les fonctions régulières sur Max(A) constituent manifestement un sous-anneau $\mathscr{R}(A)$ de l'anneau $k^{\mathrm{Max}(A)}$ de toutes les fonctions sur Max(A) à valeurs dans k.

Soit $\mathfrak{N}$ le nilradical de A. Démontrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{A}/\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}(\mathrm{A})$. (*Indication* : on rappelle que toute k-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson, cf. exercices 8 et 9 de la feuille I.)

Exercice 3 (*Autour du lemme de Nakayama*) — Soient A un anneau et M un A-module de type fini.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A :
   (i) $\mathrm{M} = \mathfrak{a}\mathrm{M}$;
   (ii) il existe un élément a de A tel que $a\mathrm{M} = 0$ et $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$.
2. Quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on désigne par $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps résiduel $\mathrm{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ de l'anneau local $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire le corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$) et on note $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ le $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel $\mathrm{M}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathrm{M}_\mathfrak{p}$.
   (i) Justifier que $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ est de dimension finie sur $\kappa(\mathfrak{p})$.
   (ii) Une fonction réelle f sur un espace topologique X est dite *semi-continue supérieurement* si $f^{-1}(]-\infty, \lambda\ [\ )$ est ouvert pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application

   $$\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathbb{Z},\ \mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}\mathrm{M}(\mathfrak{p})$$

   est semi-continue supérieurement. (*Indication* : utiliser le lemme de Nakayama ainsi que le point 3 de l'exercice précédent.)
3. Démontrer que toute application A-linéaire surjective $u : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est automatiquement un isomorphisme. (*Indication* :voir M comme un A[T]-module et utiliser le point 1.)

Exercice 4 — Soit A un anneau.

1. Étant donné un A-module L et deux sous-A-modules M, N de L, démontrer que M et N sont de type fini si $\mathrm{M}+\mathrm{N}$ et $\mathrm{M}\cap\mathrm{N}$ le sont.
2. Un A-module M est dit de *présentation finie* s'il est isomorphe au conoyau d'une application A-linéaire $\mathrm{A}^m \to \mathrm{A}^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$.
   (i) Quel que soit l'idéal $\mathfrak{a}$ de A, démontrer que le A-module $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ est de présentation finie si et seulement si $\mathfrak{a}$ est de type fini.
   (ii) Soit $0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Si M' et M'' sont de présentation finie, démontrer que M est de présentation finie.

Exercice 5 (*Module des différentielles*) — Soit $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un homomorphisme d'anneaux. Étant donné un B-module M, une A-*dérivation* de B dans M est une application A-linéaire $\mathrm{D} : \mathrm{B} \to \mathrm{M}$ satisfaisant à la condition de Leibniz : pour tous $b, b' \in \mathrm{B}$, $\mathrm{D}(bb') = b\mathrm{D}(b') + b'\mathrm{D}(b)$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathrm{Der}_\mathrm{A}(\mathrm{B}, \mathrm{M})$ des A-dérivations de B dans M est un sous-module du B-module des applications A-linéaires de B dans M.
2. Soient M, M' deux B-modules et soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application B-linéaire. Vérifier que l'application $\mathrm{D} \to f \circ \mathrm{D}$ induit une application B-linéaire de $\mathrm{Der}_\mathrm{A}(\mathrm{B}, \mathrm{M})$ dans $\mathrm{Der}_\mathrm{A}(\mathrm{B}, \mathrm{M}')$.
3. Démontrer qu'il existe un B-module $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ et une A-dérivation $d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} : \mathrm{B} \to \Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout B-module M, l'application

   $$\mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Der}_\mathrm{A}(\mathrm{B}, \mathrm{M}),\ u \mapsto u \circ d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$$

   est une bijection. Vérifier que le couple $(\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}, d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}})$ est unique à un isomorphisme unique près. (*Indication* : définir $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ comme le B-module quotient du B-module libre de base B

   $$\bigoplus_{b \in \mathrm{B}} \mathrm{B}e_b$$

   par le sous-module engendré par les éléments $e_{b+b'} - e_b - e_{b'}$, $e_{bb'} - be_{b'} - b'e_b$ et $e_{ab} - ae_b$ $(a \in \mathrm{A}, b, b' \in \mathrm{B})$.)
   Le B-module $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ est appelé le *module des différentielles* de la A-algèbre B.

4. Soit S une partie multiplicative de B. Étant donné un $S^{-1}B$-module M, démontrer que toute A-dérivation de B dans M se prolonge de manière unique en une A-dérivation de $S^{-1}B$ dans M et vérifier que l'application obtenue de $\mathrm{Der}_A(B,M)$ dans $\mathrm{Der}_A(S^{-1}B,M)$ est une bijection. En utilisant la question précédente et l'exercice 1, en déduire que les $S^{-1}B$-module $S^{-1}\Omega^1_{B/A}$ et $\Omega^1_{S^{-1}B/A}$ sont canoniquement isomorphes.
5. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de B, soit $C = B/\mathfrak{I}$ et soit $p : B \to C$ l'homomorphisme canonique.
(i) En utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe une et une seule application B-linéaire $\psi : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A}$ telle que $\psi \circ d_{B/A} = d_{C/A} \circ p$ puis vérifier que ψ induit une application C-linéaire
$$\psi : \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A}.$$
(ii) Vérifier que l'application $d_{B/A} : \mathfrak{I} \to \Omega^1_{B/A}$ induit une application C-linéaire
$$\delta : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A}.$$
(iii) Démontrer que la suite de C-modules
$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\psi} \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0$$
est exacte. (*Indication* : en utilisant le point 3, démontrer que la suite
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, M),$$
déduite de la précédente par application du foncteur $\mathrm{Hom}_C(.,M)$, est exacte.)
6. Soit I un ensemble et soit $B = A[T_i]_{i\in I}$. Démontrer que $\Omega^1_{B/A}$ est le B-module libre de base $d_{B/A}(T_i)$, $i \in I$. (*Indication* : vérifier que, pour tout B-module M, l'application $\mathrm{Der}_A(B,M) \to M^{(I)}$, $D \mapsto D(T_i)$ est une bijection et en déduire que l'homomorphisme canonique
$$\bigoplus_{i\in I} B d_{B/A}(T_i) \to \Omega^1_{B/A}$$
est un isomorphisme.)
7. Soit I un ensemble, soit $\mathfrak{I}$ un idéal de l'anneau $B = A[T_i]_{i\in I}$ et soit $C = B/\mathfrak{I}$. Démontrer que $\Omega^1_{C/A}$ est le quotient du C-module libre de base $(d_{C/A}(T_i))_{i\in I}$ par le sous-module engendré par les éléments $\sum_{i\in I} \partial f/\partial T_i d_{C/A}(T_i)$, $f \in \mathfrak{I}$. (*Indication* : utiliser les points 4 et 5.)
8. Calculer $\Omega^1_{B/A}$ dans chacun des cas suivants : (i) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}[T_1,T_2]/(T_2^2 - T_1^3 - T_1)$, (ii) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}[T_1,T_2]/(T_1^2 - T_2^3)$, (iii) $A = \mathbb{F}_2$ et $B = \mathbb{F}_2[T_1,T_2]/(T_1^2 + T_2^2 + 1)$.

Exercice 6 (*Modules projectifs, injectifs*) — Soit A un anneau.

1. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module M.
(i) Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,.)$ est exact.
(ii) Quelle que soit la suite exacte de A-modules $N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$, toute application A-linéaire $u : M \to N''$ se relève en une application A-linéaire de M dans N.
Un A-module est dit *projectif* s'il satisfait à ces deux conditions.
2. Démontrer qu'un A-module est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un A-module libre.
3. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout A-module M de type fini :
(i) M est projectif.
(ii) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ est libre.
(iii) Il existe des éléments $f_1, \dots, f_n$ de A engendrant l'idéal unité tels que $M[f_i^{-1}]$ soit un $A[f_i^{-1}]$-module libre pour tout i.

4. Démontrer que tout A-module M est quotient d'un A-module projectif. En déduire qu'il existe une *résolution projective* de M, c'est-à-dire une suite exacte de A-modules

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{P}_{n+1} \to \xrightarrow{d_n} \mathrm{P}_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{P}_1 \xrightarrow{d_0} \mathrm{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

dans laquelle chaque P_n est un A-module projectif.
5. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout A-module M :
(i) le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(.,\mathrm{M})$ est exact;
(ii) quelle que soit la suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow \mathrm{N}' \longrightarrow \mathrm{N}$, toute application A-linéaire $\mathrm{N}' \to \mathrm{M}$ se prolonge en une application A-linéaire de N dans M.
Un A-module est dit *injectif* s'il satisfait à ces deux conditions.
6. Supposons que l'anneau A soit intègre.
(i) Démontrer que tout A-module injectif est *divisible*, c'est-à-dire que la multiplication $\mathrm{M} \xrightarrow{a.} \mathrm{M}$ est surjective pour tout élément non nul a de A.
(ii) Si l'anneau A est principal, démontrer qu'un A-module est injectif si et seulement s'il est divisible.
(iii) Vérifier que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif et en déduire que tout $\mathbb{Z}$-module M admet une application linéaire non nulle dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Remarque : l'énoncé dual de la question 4 est vrai : tout A-module M s'injecte dans un A-module injectif et possède donc une résolution injective $0 \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathrm{I}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow \mathrm{I}^n \xrightarrow{d^n} \cdots$ mais la démonstration est plus compliquée... (1)

(1) Voir par exemple Serge Lang, *Algebra* (third edition), Addison Wesley Pub. (1999), XX.§4.