ALGÈBRE MULTILINÉAIRE I

Exercice 1 — 1) Démontrer que l'homomorphisme d'anneaux canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(m,n)\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

2) Démontrer que l'homomorphisme d'anneaux canonique $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.

3) Déterminer la structure de $\mathbb{C}$-algèbre de l'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

4) Soient A un anneau et I, J deux ensembles. Démontrer que l'on dispose d'un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i\in \mathrm{I}}] \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j\in \mathrm{J}}] \tilde{\to} \mathrm{A}[(\mathrm{T}_{ij})_{(i,j)\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}}].$$

(*Indication* : utiliser la propriété universelle caractérisant un anneau de polyômes.)

Exercice 2 — Soient A un anneau et M un A-module.

1) Étant donné un idéal $\mathfrak{I}$ de A, démontrer que l'homomorphisme canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{I}$ induit un isomorphisme $\mathrm{M}/\mathfrak{I}M \tilde{\to} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{I}$.

2) Étant donnée une partie multiplicative S dans A, démontrer que l'homomorphisme canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ induit un isomorphisme $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \tilde{\to} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ (voir le premier exercice de la fiche 2 pour la définition de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$).

3) Supposons que l'anneau A soit intègre, de corps des fractions K. En guise d'application du résultat précédent, démontrer que le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ est le sous-module de torsion $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ de M :

$$\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \{x \in \mathrm{M} \mid \exists\, a \in \mathrm{A} - \{0\},\ ax = 0\}.$$

Exercice 3 — 1) Soient k un corps et M, N deux k-modules. Démontrer l'équivalence

$$(\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N} = 0) \iff (\mathrm{M} = 0 \text{ ou } \mathrm{N} = 0).$$

2) Soient A un anneau local et M, N deux A-modules de type fini. Démontrer l'équivalence

$$(\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N} = 0) \iff (\mathrm{M} = 0 \text{ ou } \mathrm{N} = 0).$$

(*Indication* : se ramener à la situation de la question précédente et conclure en appliquant le lemme de Nakayama.)

3) Soit A un anneau.

(i) Étant donnés des corps K', K'' et des homomorphismes $\varphi' : \mathrm{A} \to \mathrm{K}'$, $\varphi'' : \mathrm{A} \to \mathrm{K}''$ tels que $\mathrm{Ker}(\varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi'')$, démontrer qu'il existe un corps K et des homomorphismes $\mathrm{K}' \to \mathrm{K}$, $\mathrm{K}'' \to \mathrm{K}$ donnant naissance à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{K}' \arrow[dr] & \\
\mathrm{A} \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & & \mathrm{K} \\
 & \mathrm{K}'' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(*Indication* : considérer l'anneau $\mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}''$ et utiliser la question 1).

Soit $\Sigma(\mathrm{A})$ l'ensemble des homomorphismes de l'anneau A dans un corps (variable). Vérifier que l'on définit une relation d'équivalence sur $\Sigma(\mathrm{A})$ en convenant que deux homomorphismes φ', $\varphi'' \in$

$\Sigma(\mathrm{A})$ sont équivalents s'il existe $\varphi \in \Sigma(\mathrm{A})$ se factorisant à travers φ' et φ'' puis prouver que l'application $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$ induit une bijection de l'ensemble quotient $\Sigma(\mathrm{A})/\sim$ sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

Exercice 4 (*Platitude*) — Soit A un anneau. Un A-module M est dit *plat* si le foncteur $. \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est exact, c'est-à-dire si pour toute suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}' \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}'' \longrightarrow 0,$$

la suite de A-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}'' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

est exacte.

1) Démontrer qu'un A-module M est plat si et seulement si, pour tous A-modules N, N′ et tout homomorphisme injectif $\alpha : \mathrm{N}' \to \mathrm{N}$, l'homomorphisme $\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{M}} : \mathrm{N}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est injectif.

2) Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes pour tout A-module M :
– M est plat ;
– quel que soit l'idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{a} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est injectif ;
– quels que soient le A-module N de type fini et l'élément x de N, l'injection canonique $i : \mathrm{A}x \to \mathrm{N}$ induit un homomorphisme injectif $i \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{M}} : (\mathrm{A}x) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$.
(*Indication* : pour établir que la deuxième assertion implique la troisième, raisonner par récurrence sur le nombre de générateurs de N et observer que le cas d'un A-module monogène, c'est-à-dire engendré par un élément, découle directement de la deuxième assertion.)

2) Vérifier qu'un A-module libre est plat et démontrer que, si l'anneau A est principal, un A-module de type fini est plat si et seulement s'il est libre. (*Indication* : si A est principal et M est sans torsion, démontrer que l'homomorphisme canonique $\mathfrak{a} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est injectif pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A puis en déduire que M est plat.)

3) Si l'anneau A est local et noethérien, un A-module M est plat si et seulement s'il est libre. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et k le corps $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$.

(i) Démontrer qu'il existe une suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

avec L libre de rang $\dim_k(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} k)$ et R de type fini. (*Indication* : utiliser le lemme de Nakayama.)

(ii) Nous supposons maintenant que M est un A-module plat. En considérant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R} \otimes_{\mathrm{A}} k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes en vertu de la platitude de M et L, démontrer que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{R} \otimes_{\mathrm{A}} k \longrightarrow \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} k \longrightarrow \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} k \longrightarrow 0$$

est exacte.

(iii) Conclure que l'homomorphisme $\mathrm{L} \to \mathrm{M}$ est un isomorphisme.

(iv) On suppose en outre que l'anneau local A est intègre, de corps des fractions K. Démontrer qu'un A-module de type fini M est plat si et seulement si

$$\dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K}) = \dim_k(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}} k).$$

Exercice 5 (*Platitude, suite*) — 1) Soient $(\mathrm{A},\mathfrak{m})$, $(\mathrm{B},\mathfrak{n})$ deux anneaux locaux et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un homomorphisme tel que $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ (on dit que φ est *local*). On suppose que φ fait de B une A-algèbre plate et on va prouver que l'application ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est surjective.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.

(i) Justifier que l'anneau $\mathrm{B}/\mathfrak{p}\mathrm{B}$ est non nul.

(ii) En déduire que l'anneau $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\kappa(\mathfrak{p})$ est non nul, puis qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que ${}^a\varphi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

2) Soient A un anneau et B une A-algèbre plate. Démontrer que l'application $f = {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ associée à l'homomorphisme structural $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ satisfait à la condition suivante : étant donnés un point $x \in \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ et un point $z \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ tel que $f(y) \in \overline{\{z\}}$, il existe un point $z' \in \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ tel que $x \in \overline{\{z'\}}$ et $f(z') = z$.

Remarque : *le point z (resp. z′) est une* générisation *du point y dans* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *(resp. du point x dans* $\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$*) et le résultat que l'on vient d'établir peut donc s'énoncer sous la forme suivante : si un homomorphisme d'anneaux* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *fait de* B *une* A*-algèbre plate, l'image de l'application associée* ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est stable par générisation. Les parties ouvertes de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *sont bien évidemment stables par générisation et on pourrait démontrer avec un peu plus de travail le théorème important suivant* [1] *:* si A est un anneau noethérien et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme d'anneaux faisant de B une A-algèbre de type fini et plate, l'application associée ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est *ouverte. C'est là une illustration du rôle fondamental que joue le concept de platitude en Géométrie algébrique.*

[1] Voir par exemple M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Chapitre 7, exercice 25