## ALGÈBRE MULTILINÉAIRE I : CORRIGÉ

**Exercice 1** — 1) Soit $d$ le pgcd des entiers $n$ et $m$. Le produit induit une application bilinéaire

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \ \ (x \bmod n, y \bmod m) \mapsto xy \bmod d$$

se factorisant à travers la projection canonique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en une application linéaire $\alpha : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ qui est manifestement un homomorphisme d'anneaux.

Quel que soit $\mathbb{Z}$-module M, l'application

$$\{m \in \mathrm{M} \mid dm = 0\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathrm{M}) = \mathrm{Bil}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathrm{M})$$

induite par $\alpha$ associe à un élément $m$ de M tel que $dm = 0$ l'application bilinéaire $\Phi$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à valeurs dans M définie par $\Phi(a\overline{1}, b\overline{1}) = abm$. Cette application est bijective car, pour toute forme bilinéaire $\Phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{M}$,

- $d\Phi(\overline{1}, \overline{1}) = (un + vm)\Phi(\overline{1}, \overline{1}) = u\Phi(n\overline{1}, \overline{1}) + v\Phi(\overline{1}, m\overline{1}) = 0$ en écrivant $d$ sous la forme $un + vm$ ;
- $\Phi(0, \overline{1}) = n\Phi(\overline{1}, \overline{1})$ et $\Phi(\overline{1}, 0) = m\Phi(\overline{1}, \overline{1})$.

L'application $\iota$ est ainsi un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et donc un isomorphisme d'anneaux.

2) L'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \ n \mapsto n(1 \otimes 1)$ se prolonge à $\mathbb{Q}$ car, pour tout entier $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, l'élément $n(1 \otimes 1)$ de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est inversible en vertu de l'identité

$$n(1 \otimes 1)(\frac{1}{n} \otimes 1) = n(\frac{1}{n} \otimes 1) = 1 \otimes 1.$$

L'application obtenue envoie $r$ sur $r \otimes 1$ et est injective puisque $\mathbb{Q}$ est un corps.

Pour établir sa surjectivité, il suffit d'observer le fait suivant : comme $n(1 \otimes 1)(1 \otimes \frac{1}{n}) = n(1 \otimes \frac{1}{n}) = 1 \otimes 1$, $1 \otimes \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \otimes 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Les éléments de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ peuvent *a priori* s'écrire comme des combinaisons linéaires à coefficients entiers de tenseurs élémentaires de la forme $\frac{1}{n} \otimes \frac{1}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ; vu ce que nous venons d'observer, $\frac{1}{n} \otimes \frac{1}{m} = \frac{1}{nm} \otimes 1$ appartient à l'image de $\mathbb{Q}$ et l'application considérée est donc bijective.

3) Ayant fixé $i \in \mathbb{C}$ une racine carrée de $-1$, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i) \\ &= \mathbb{R}1 \otimes 1 \oplus \mathbb{R}1 \otimes i \oplus \mathbb{R}i \otimes 1 \oplus \mathbb{R}i \otimes i \end{aligned}$$

s'identifie à $\mathbb{R}^4$ muni de la structure de $\mathbb{R}$-algèbre définie par

$$1 = (1, 0, 0, 0),$$

$$(a, b, c, d)(a', b', c', d') = (aa' + dd' - bb' - cc', ab' + a'b - cd' - c'd, ac' + a'c - bd' - b'd, ad' + a'd + bc' + b'c).$$

Variante : en écrivant $\mathbb{C}$ sous la forme $\mathbb{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2 + 1)$ (ce qui revient de nouveau à choisir une racine carrée de $-1$ dans $\mathbb{C}$), l'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2 + 1)$ via l'application envoyant $z \otimes z'$ sur $z'(\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)\mathrm{T})$.

4) Quelle que soit la A-algèbre B, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}] \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j \in \mathrm{J}}], \mathrm{B})$ est l'ensemble des formes A-bilinéaires $\Phi$ sur $\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}] \times \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j \in \mathrm{J}}]$ à valeurs dans B telles que $\Phi(1, .)$ et $\Phi(., 1)$ soient des homomorphismes d'anneaux. Une telle forme bilinéaire est complètement déterminée par la donnée des éléments $\Phi(1, \mathrm{T}_j)$ et $\Phi(\mathrm{T}_i, 1)$ de B, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{J}$ et l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}] \otimes_A \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j \in \mathrm{J}}], \mathrm{B}) \to \mathrm{B}^{\mathrm{I} \cup \mathrm{J}}, \ \ u \mapsto (i \mapsto u(\mathrm{T}_i \otimes 1), \ j \mapsto u(1 \otimes \mathrm{T}_j)$$

est donc bijective. Notant $\iota$ l'unique A-homomorphisme de $\mathrm{A}[(\mathrm{T}_k)_{k \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}}]$ dans $\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}] \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j \in \mathrm{J}}]$ tel que $\iota(\mathrm{T}_i) = \mathrm{T}_i \otimes 1$ si $i \in \mathrm{I}$ et $\iota(\mathrm{T}_j) = 1 \otimes \mathrm{T}_j$ si $j \in \mathrm{J}$, il est équivalent de dire que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}] \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[(\mathrm{T}_j)_{j \in \mathrm{J}}], \mathrm{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}[(\mathrm{T}_k)_{k \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}}, \mathrm{B}) = \mathrm{B}^{\mathrm{I} \cup \mathrm{J}}$$

induite par $\iota$ est bijective et $\iota$ est donc un isomorphisme.

**Exercice 2** — 1) Soit $\iota : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{J}$ l'homomorphisme envoyant $m$ sur $m \otimes 1$ ; comme $\iota(am) = am \otimes 1 = m \otimes a$ pour tout $a \in \mathrm{A}$, $\iota$ s'annule identiquement sur le sous-module $\mathfrak{J}\mathrm{M}$ et induit donc une application $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$-linéaire de $\mathrm{M}/\mathfrak{J}\mathrm{M}$ dans $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{J}$. Quel que soit le $\mathrm{A}/\mathfrak{J}\mathrm{M}$ module N, l'application $\iota$ induit une identification

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/\mathfrak{J}}(\mathrm{M}/\mathfrak{J}\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/\mathfrak{J}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{J}, \mathrm{N})$$

(la dernière identification est la propriété universelle caractérisant l'*extension des scalaires*) et il s'agit donc d'un isomorphisme.

2) En vertu de la propriété universelle caractérisant l'extension des scalaires, l'application A-linéaire $\iota : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, $m \mapsto m \otimes 1$ induit pour tout $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module N une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}, \mathrm{N})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Le couple $(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}, \iota)$ vérifie ainsi la propriété universelle définissant le $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ (cf. exercice 1) et l'homomorphisme $\iota : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ s'étend donc en un isomorphisme $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \tilde{\to} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$.

3) En vertu de ce qui précède, le K-module $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ s'identifie au localisé de M par rapport à la partie multiplicative $\mathrm{S} = \mathrm{A} - \{0\}$ et l'application $\mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ correspond à l'application canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. Son noyau est donc constitué de l'ensemble des éléments $x$ de M tels qu'il existe $a \in \mathrm{A} - \{0\}$ avec $ax = 0$, c'est-à-dire les éléments de torsion dans M.

**Exercice 3** — 1) Si M et N sont deux $k$-espaces vectoriels non nuls, il existe des applications linéaires non nulles $\varphi : \mathrm{M} \to k$ et $\psi : \mathrm{N} \to k$ ; celles-ci donnent naturellement naissance à une forme $k$-bilinéaire non nulle $\mathrm{M} \times_k \mathrm{N} \to k$ envoyant $x \otimes y$ sur $\varphi(x)\psi(y$, donc à une forme linéaire non nulle sur le $k$-vectoriel $\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N}$, et par conséquent $\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N} \neq 0$.

2) Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Quels que soient les A-modules M et N, l'homomorphisme canonique $\iota : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{m}} \mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}$ induit par les projections canoniques $\mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}$ et $\mathrm{N} \to \mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}$ donne lieu à une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/\mathfrak{m}}(\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{m}} \mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}, \mathrm{R}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}, \mathrm{R})$$

pour tout $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$-module R car les applications A-bilinéaires $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ et les applications $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$-bilinéaires $\mathrm{M}/\mathfrak{m} \times \mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N} \to \mathrm{R}$ sont une seule et même chose. En vertu de la propriété universelle caractérisant l'extension des scalaires, il en découle que $\iota$ induit un isomorphisme

$$(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m} \tilde{\to} \mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{m}} \mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}.$$

Supposons que M et N soient de type fini. En vertu du lemme de Nakayama, $\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M} \neq 0$ et $\mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N} \neq 0$ si $\mathrm{M}, \mathrm{N} \neq 0$, donc $(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m} \neq 0$ en vertu de ce qui précède et de la question 1 et, *a fortiori*, $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \neq 0$.

3) (i) Soient $\varphi' : \mathrm{A} \to \mathrm{K}'$ et $\varphi'' : \mathrm{A} \to \mathrm{K}''$ deux homomorphismes de A dans des corps. S'il existe un corps K et des homomorphismes $\mathrm{K}' \to \mathrm{K}$, $\mathrm{K}'' \to \mathrm{K}$ s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}' \arrow[dr] & \\ \mathrm{A} \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & & \mathrm{K}, \\ & \mathrm{K}'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\ker(\varphi') = \ker(\varphi'')$ puisque tout homomorphisme entre corps est injectif.

Supposons que l'on ait réciproquement $\ker(\varphi') = \ker(\varphi'')$. L'idéal $\mathfrak{p} = \ker(\varphi') = \ker(\varphi'')$ de A est premier et les homomorphisme $\varphi', \varphi''$ se factorisent tous deux à travers l'homomorphisme canonique de A dans le corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$. Notant $\mathrm{K}_0$ ce dernier, on dispose d'un homomorphisme naturel $\mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}'' \to \mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{K}_0} \mathrm{K}''$ qui est un isomorphisme car, pour toute $\mathrm{K}_0$-algèbre B, toute forme A-bilinéaire $\mathrm{K}' \times \mathrm{K}'' \to \mathrm{B}$ est automatiquement $\mathrm{K}_0$-bilinéaire. Vu la question 1, l'anneau $\mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}''$ est par conséquent non nul et possède donc un idéal maximal

$\mathfrak{m}$, donnant naissance à un homorphisme de $\mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}''$ dans un corps K. Le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{K}' \arrow[dr] & \\
\mathrm{A} \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & & \mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}'' \\
 & \mathrm{K}'' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

étant commutatif par définition même du produit tensoriel, on obtient un diagramme commutatif de la forme voulue en composant les homomorphismes canoniques $\mathrm{K}',\ \mathrm{K}'' \to \mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}''$ par l'homomorphisme $\mathrm{K}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}'' \to \mathrm{K}$.

(ii) D'après ce que nous venons de dire, l'application $\Sigma(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A}),\ \varphi \mapsto \ker(\varphi)$ induit précisément sur $\Sigma(\mathrm{A})$ la relation d'équivalence $\sim$ ; elle se donne donc naissance à une injection de $\Sigma(\mathrm{A})/\sim$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, et il s'agit évidemment d'une bijection puisque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est précisément le noyau de l'homomorphisme canonique de A dans l'anneau des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$.

**Exercice 4** (*Platitude*) — [...]

**Exercice 5** (*Platitude, suite*) — [...]