ALGÈBRE MULTILINÉAIRE II

Exercice 1 (*Trace*) — Soient A un anneau et M, N deux A-modules libres de rang fini. On pose $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ et on note $\langle \varphi, x\rangle$ l'évaluation d'une forme linéaire $\varphi \in M^\vee$ sur un élément x de M.

1) Démontrer que l'application

$$M^\vee \times N \to \mathrm{Hom}_A(M,N),\ (\varphi,\ y) \mapsto (x \mapsto \langle \varphi, x\rangle y)$$

induit un isomorphisme du A-module $M^\vee \otimes_A N$ sur le A-module $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

2) Soit u un élément de $\mathrm{Hom}_A(M,M)$ et soit $u = \sum_{i\in I} \varphi_i \otimes x_i$ une représentation de u comme somme de tenseurs élémentaires dans $M^\vee \otimes_A M$. Démontrer que l'élément $\sum_{i\in I} \langle \varphi_i, x_i\rangle$ de A ne dépend pas de la représentation de u que l'on considère ; c'est par définition la *trace* de l'endomorphisme u.

3) Soit $u \in \mathrm{Hom}_A(M,M)$ un endomorphisme de M. Démontrer l'identité suivante :

$$\det(T\mathrm{id}_M - u) = T^n + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \mathrm{tr}(\Lambda^p u) T^{n-p},$$

où $n = \mathrm{rg}(M)$ et, pour tout i, Λ^p est l'endomorphisme du A-module libre $\Lambda^p M$ induit par u. (*Indication* : on pourra développer

$$\Lambda^n(T\mathrm{id}_M - u) = \det(T\mathrm{id}_M - u)\mathrm{id}_{\Lambda^n M}$$

et observer que, si $(e_i)_{1\le i\le n}$ est une base de M et

$$\Lambda^p u = \sum_{I,J} u_{J,I} e_I^* \otimes e_J$$

est la décomposition de $\Lambda^p u$ relativement à la base (e_I) de $\Lambda^p E$ et à sa base duale ($I \subset \{1,\dots,n\}$, $\mathrm{Card}(I) = p$, et, si $I = \{i_1, \dots i_p\}$ avec $i_1 < \dots < i_p$, $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$), l'endomorphisme $\Lambda^p u \wedge \Lambda^{n-p}\mathrm{id}_M$ de $\Lambda^n M$ est l'homothétie de rapport $u_{\{1,\dots,p\},\{1,\dots,p\}}$.)

Exercice 2 (*Algèbre symétrique*) — Soient A un anneau et M, N deux A-modules.

1) Si $N \subset M$, démontrer que le noyau de l'homomorphisme canonique $S^\bullet(M) \to S^\bullet(M/N)$ est l'idéal de $S^\bullet(M)$ engendré par N vu comme sous-ensemble de $S^1(M) = M$.

2) Démontrer qu'il existe un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$S^\bullet(M) \otimes_A S^\bullet(N) \tilde{\to} S^\bullet(M \oplus N).$$

Exercice 3 (*Relations de Graßmann*) — Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie n. On désigne par $E^\vee$ l'espace vectoriel dual $\mathrm{Hom}_k(E,k)$ et par $\Lambda^\bullet E$ l'algèbre extérieure de E. Il sera commode de convenir que $\Lambda^q E = 0$ pour tout entier $q < 0$.

1) Démontrer qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\Lambda^\bullet(E^\vee) \tilde{\to} \left(\Lambda^\bullet E\right)^\vee$$

appliquant $\Lambda^p(E^\vee)$ sur $(\Lambda^p E)^\vee$. On identifie dans ce qui suit les espaces vectoriels $\Lambda^\bullet(E^\vee)$ et $\left(\Lambda^\bullet E\right)^\vee$.

Un p-vecteur $x \in \Lambda^p E$ est dit *décomposable* s'il est de la forme $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ avec $x_1, \dots, x_p \in E$ linéairement indépendants. Tout p-vecteur est évidemment une somme de p-vecteurs décomposables et l'objet de cet exercice est d'obtenir une caractérisation des p-vecteurs décomposables dans $\Lambda^p E$; ce seront ceux satisfaisant aux *relations de Graßmann*.

2) Étant donné un p-vecteur $x \in \Lambda^p \mathrm{E}$, vérifier qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel E_x de E tel que $x \in \Lambda^p \mathrm{E}_x$ et justifier que x est décomposable si et seulement si $\dim(\mathrm{E}_x) = p$. En déduire que x est décomposable si et seulement si

$$\forall y \in \mathrm{E}_x, \ \ x \wedge y = 0.$$

3) Soit $\omega \in \Lambda^p(\mathrm{E}^\vee)$. Le produit extérieur par ω est l'endomorphisme de $\Lambda^\bullet(\mathrm{E}^\vee)$ défini par $\varphi \mapsto \varphi \wedge \omega$; il applique $\Lambda^q(\mathrm{E}^\vee)$ dans $\Lambda^{p+q}(\mathrm{E}^\vee)$. Ayant identifié l'espace vectoriel E avec son bidual, on appelle *produit intérieur* par ω, et on note $x \mapsto \omega \lrcorner x$, l'endomorphisme de $\Lambda^\bullet \mathrm{E}$ transposé du produit extérieur par ω. Notant $\langle .,\rangle$ le crochet de dualité, on a donc

$$\langle \varphi, \omega \lrcorner x\rangle = \langle \varphi \wedge \omega, x\rangle$$

pour tous $x \in \Lambda^\bullet \mathrm{E}$, $\varphi \in \Lambda^\bullet(\mathrm{E}^\vee)$.

(i) Vérifier que $\omega \lrcorner \cdot$ applique $\Lambda^{p+q}\mathrm{E}$ dans $\Lambda^q \mathrm{E}$.

(ii) Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et soit $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ la base duale. Calculer $e_\mathrm{I}^* \lrcorner e_\mathrm{J}$ pour toutes parties I, J de $\{1,\dots,n\}$.

4) Étant donné un p-vecteur x dans $\Lambda^p \mathrm{E}$, démontrer que le sous-espace vectoriel E_x de E est l'image de l'application linéaire

$$\Lambda^{p-1}(\mathrm{E}^\vee) \to \Lambda^1 \mathrm{E} = \mathrm{E}, \ \ \omega \mapsto \omega \lrcorner x.$$

(*Indication* : introduire une base de E contenant une base de E_x et utiliser la question précédente.)

5) Déduire de ce qui précède qu'un p-vecteur x est décomposable si et seulement si

$$x \wedge (\omega \lrcorner x) = 0$$

pour tout $\omega \in \Lambda^{p-1}(\mathrm{E}^\vee)$. Ayant introduit une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de E, les $\dim \Lambda^p(\mathrm{E}^\vee) = \binom{n}{p-1}$ équations

$$x \wedge (e_\mathrm{I}^* \lrcorner x) = 0, \ \ \mathrm{I} \subset \{1,\dots,n\} \ \text{ et } \ \mathrm{Card}(\mathrm{I}) = p-1$$

caractérisant les p-vecteurs décomposables sont les *relations de Graßmann*.

6) Expliciter les relations de Graßmann pour $n = 4, p = 2$ et vérifier qu'elles se ramènent à l'unique équation quadratique

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}0,$$

où $(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$ sont les coordonnées d'un 2-vecteur x dans la base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ de $\Lambda^2 \mathrm{E}$.

7) Étant donné $p \in \{1,\dots,n\}$, on désigne par $\mathbb{P}(\Lambda^p \mathrm{E})$ l'ensemble des droites vectorielles dans $\Lambda^p \mathrm{E}$ et par $\mathbb{G}\mathrm{r}_p(\mathrm{E})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension p. Vérifier que l'application

$$\pi : \mathbb{G}\mathrm{r}_p(\mathrm{E}) \to \mathbb{P}(\Lambda^p \mathrm{E}),$$

définie en associant à $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$ la droite $k(x_1 \wedge \dots \wedge x_p)$ dans $\Lambda^p \mathrm{E}$, réalise une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\Lambda^p \mathrm{E})$ défini par des équations homogènes quadratiques en tout système de coordonnées déduit d'une base de E.

Remarque : *ce qui précède établit essentiellement que, si* E *est un espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble* $\mathbb{G}\mathrm{r}_p(\mathrm{E})$ *des sous-espaces vectoriels de* E *de dimension* $p \le \dim \mathrm{E}$ *possède une structure naturelle de variété algébrique, obtenue en réalisant* $\mathbb{G}\mathrm{r}_p(\mathrm{E})$ *comme une sous-variété algébrique de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\Lambda^p \mathrm{E})$. *L'ensemble* $\mathbb{G}\mathrm{r}_p(\mathrm{E})$ *est la* grassmannienne *des p-plans de* E *et l'application* π *est classiquement appelée* plongement de Plücker.

Exercice 4 (*Déterminant*) — Soit A un anneau noethérien. On rappelle que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\kappa(\mathfrak{p})$ désigne le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$.

1) Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour tout A-module M de type fini :

– pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathrm{M}_\mathfrak{p} = \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}_\mathfrak{p}$ est un $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module libre ;

– il existe des éléments $f_1, \dots, f_n$ de A engendrant l'idéal unité et tels que $\mathrm{M}[f_i]^{-1} = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[f_i^{-1}]$ soit un $\mathrm{A}[f_i^{-1}]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Un A-module M satisfaisant aux deux conditions précédentes est dit *localement libre*.

2) Soit M un A-module de type fini localement libre. Vérifier que $\mathrm{M}[\mathfrak{p}] = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \kappa(\mathfrak{p})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\kappa(\mathfrak{p})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et démontrer que la fonction $\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \mathrm{M}[\mathfrak{p}]$ est localement constante sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ (voir l'exercice 4 de la fiche 2). Lorsque $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est connexe, cette fonction est donc constante et sa valeur est par définition le *rang* de M, noté $\mathrm{rg}(\mathrm{M})$.

3) On suppose que l'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est connexe. Étant donné un A-module M de type fini et localement libre de rang r, démontrer que $\Lambda^p \mathrm{M} = 0$ si $p \geq r+1$ et que $\Lambda^r \mathrm{M}$ est un A-module localement libre de rang 1 ; on pose $\det(\mathrm{M}) = \Lambda^r \mathrm{M}$.

4) On suppose toujours que $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est connexe. Étant donnée une suite exacte de A-modules de type fini et localement libres

$$\mathscr{E} : \quad 0 \longrightarrow \mathrm{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathrm{M} \xrightarrow{\beta} \mathrm{M}'' \longrightarrow 0 ,$$

démontrer qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\varphi_{\mathscr{E}} : \det(\mathrm{M}') \otimes_{\mathrm{A}} \det(\mathrm{M}'') \xrightarrow{\sim} \det(\mathrm{M})$$

tel que $\varphi(m'_1 \wedge \dots \wedge m'_{r'} \wedge m''_1 \wedge m''_{r''}) = \alpha(m'_1) \wedge \dots \wedge \alpha(m'_{r'}) \wedge m_1 \wedge \dots \wedge m_{r''}$ pour tous $m'_1, \dots, m'_{r'} \in \mathrm{M}'$, $m''_1, \dots, m''_{r''} \in \mathrm{M}''$ et $m_1, \dots, m_{r''} \in \mathrm{M}$ avec $\beta(m_i) = m''_i$, où $r' = \mathrm{rg}(\mathrm{M}')$, $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$ et $r'' = \log(\mathrm{M}'')$.
