Université Claude Bernard – Lyon 1 et École Normale Supérieure de Lyon

Année 2007/2008

Unité d'enseignement : algèbre approfondie

Examen partiel du 16 novembre 2007

Enseignant responsable : Bertrand RÉMY

Durée : 3 heures.

Appareils électroniques autorisés : aucun.

Documents autorisés : aucun.

La clarté et la pertinence des explications sont un élément d'appréciation significatif de la copie.

Exercice A. On désigne par $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique de l'ensemble $\{1;2;...;n\}$.

1) Décrire les classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_4$.

2) En considérant les partitions de $\{1;2;3;4\}$ en paires d'entiers, démontrer qu'il existe un homomorphisme de groupes surjectif de $\mathcal{S}_4$ sur $\mathcal{S}_3$. Décrire le noyau de cet homomorphisme au moyen de groupe(s) cyclique(s).

3) En déduire 3 représentations (linéaires, complexes) irréductibles de $\mathcal{S}_4$. On pourra utiliser, entre autres arguments, la table des caractères de $\mathcal{S}_3$ du cours pour justifier l'irréductibilité de ces représentations.

4) Déterminer les dimensions de représentations irréductibles permettant de compléter la table de caractères de $\mathcal{S}_4$.

5) Proposer une description concrète d'une des représentations de 4). En notant ρ cette représentation et ε la signature, vérifier que $\rho \otimes \varepsilon$ est irréductible.

6) Dresser finalement la table des caractères de $\mathcal{S}_4$.

Exercice B. Soit k un corps commutatif et soit A une k-algèbre de type fini. Cet exercice a pour objet la démonstration du *lemme de normalisation de Noether* :

il existe des éléments $x_1, \ldots, x_d$ de A algébriquement indépendants sur k et tels que l'anneau A soit entier sur la sous-k-algèbre $k[x_1, \ldots, x_d]$.

1) Considérons tout d'abord un anneau de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$ et un élément non constant $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T_1^{\nu_1} \ldots T_n^{\nu_n} \in k[T_1, \ldots, T_n]$.

On pose

$$r = \max\{\nu_i \ ; \ 1 \leq i \leq n, \ a_\nu \neq 0\} + 1$$

et on définit un automorphisme φ de $k[T_1, \ldots, T_n]$ par les formules

$$\varphi(T_1) = T_1, \ \varphi(T_i) = T_i + T_1^{r^i} \quad (2 \leq i \leq n).$$

1.1. Vérifier que le polynôme $\varphi(f)$ est de la forme

$$\alpha T_1^N + \sum_{p=0}^{N-1} Q_p(T_2, \dots, T_n) T_1^p$$

avec $\alpha \in k^\times$ et $N \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1.2. En déduire qu'il existe des éléments $x_2, \dots, x_n$ de $k[T_1, \dots, T_n]$ tels que
– $f, x_2, \dots, x_n$ soient algébriquement indépendants ;
– l'anneau $k[T_1, \dots, T_n]$ soit entier sur $k[f, x_2, \dots, x_n]$.

1.3. Démontrer que les images de $x_2, \dots, x_n$ dans $k[T_1, \dots, T_n]/(f)$ sont algébriquement indépendantes.

2) Démontrer le lemme de normalisation de Noether. (*Indication : écrire A sous la forme $k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}$ et raisonner par récurrence sur l'entier n en utilisant la première question.*)

Exercice C. Soit A un anneau commutatif. Quels que soient les deux A-modules M et N, une *extension* de M par N est une suite exacte courte de A-modules

$$E \quad : \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0\ .$$

Deux extensions E et E' sont dites *équivalentes* (notation : $E \sim E'$) s'il existe un isomorphisme φ s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E\ :\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E'\ :\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On désigne par $\mathrm{Ext}(M, N)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de M par N.

Étant donnés une extension E de M par N et des homomorphismes $u : N \to N'$, $v : M' \to M$, on note

– $u_*E \ :\ 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\alpha'} u_*P \xrightarrow{\beta'} M \longrightarrow 0$ l'extension de M par N' dans laquelle u_*P est le conoyau de l'homomorphisme $N \to P \oplus N'$, $x \mapsto (\alpha(x), -u(x))$ et α', β' sont les homomorphismes respectivement induits par l'injection canonique $N' \to P \oplus N'$ et β ;

– $v^*E \ :\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha''} v^*P \xrightarrow{\beta''} M' \longrightarrow 0$ l'extension de M' par N dans laquelle v^*P est le noyau de l'homomorphisme $P \oplus M' \to M$, $(x, y) \mapsto \beta(x) - v(y)$ et α'', β'' sont les homomorphismes respectivement induits par α et la projection $P \oplus M' \to M'$.

1) Quel que soit le diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
E'\ :\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & P' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "w"] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
E''\ :\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\gamma"] & P'' \arrow[r, "\delta"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

démontrer que les extensions u_*E' et v^*E'' de M par N sont équivalentes.

2) Démontrer que tout A-module est isomorphe au quotient d'un A-module libre.

3) Soient M, N deux A-modules et soit

$$E_0 \quad : \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans laquelle L est un A-module libre.

3.1. Démontrer que l'application $\mathrm{Hom}_A(R, N) \to \mathrm{Ext}(M, N)$, $u \mapsto u_*E_0$, induit une bijection entre le conoyau de l'application

$$\iota_* : \mathrm{Hom}_A(L, N) \to \mathrm{Hom}_A(R, N), \quad v \mapsto v \circ \iota$$

et $\mathrm{Ext}(M, N)$.

3.2. Vérifier que l'extension 0_*E_0 est équivalente à l'extension triviale

$$0 \to N \to N \oplus M \to M \to \ 0$$

3.3. Quels que soient $u, u' \in \mathrm{Hom}_A(R, N)$, vérifier que l'extension $(u + u')_*E_0$ est équivalente à l'extension $\nabla_*\Delta^*(u_*E_0 \oplus u'_*E_0)$, où $u_*E_0 \oplus u'_*E_0$ est la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \oplus N \longrightarrow u_*L \oplus u'_*L \longrightarrow M \oplus M \longrightarrow 0$$

et où Δ, ∇ sont les homomorphismes

$$\Delta : M \to M \oplus M,\ x \mapsto (x, x) \qquad \text{et} \qquad \nabla : N \oplus N \to N,\ (x, y) \mapsto x + y.$$

(*Indication : on pourra commencer par construire un homomorphisme de* L *dans* $\Delta^*(u_*L \oplus u'_*L)$.)

3.4. Déduire de ce qui précède que l'ensemble $\mathrm{Ext}(M, N)$ est naturellement muni d'une structure de A-module, que l'on décrira.

4) Soit $E \ : \ 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules et soit M un A-module.

4.1. Vérifier que l'application $\delta : \mathrm{Hom}_A(M, N'') \to \mathrm{Ext}(M, N')$, $\quad u \mapsto u^*E$, est A-linéaire.

4.2. Démontrer que la suite de A-modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N') & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_A(M, N) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_A(M, N'') \\ & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ & \mathrm{Ext}(M, N'') & \xleftarrow{g_*} & \mathrm{Ext}(M, N) & \xleftarrow{f_*} & \mathrm{Ext}(M, N') \end{array}$$

est exacte.

4.3. Lorsque l'anneau A est *principal*, démontrer que l'application $g_* : \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M, N'')$ est surjective.