REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS II

On rappelle que toutes les représentations considérées sont *complexes*.

Exercice 1 *(Caractères)* — Soit G un groupe fini et soit (V,ρ) une représentation de G.

1) Démontrer l'identité
$$\dim(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{tr}(\rho(g)).$$

2) Vérifier que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, $\mathrm{tr}(g^{-1}) = \overline{\mathrm{tr}(g)}$.

3) Quelle que soit la représentation (W,ρ') de G, on fait agir G sur l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W},\mathrm{V})$ en posant $g.u = \rho(g)\circ u\circ\rho'(g^{-1})$ pour tous $g\in\mathrm{G}$, $u\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W},\mathrm{V})$, définissant ainsi une représentation $\rho''(g)$. Vérifier l'identité $\mathrm{tr}(\rho''(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g))\mathrm{tr}(\rho'(g^{-1}))$ pour tout $g\in\mathrm{G}$ puis établir que, si la représentation (W,ρ') est irréductible, sa multiplicité dans la représentation (V,ρ) est égale à
$$\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi_\rho(g)\overline{\chi_{\rho'}(g)},$$
où l'on a posé $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ et $\chi_{\rho'}(g) = \mathrm{tr}(\rho'(g))$.

4) Retrouver tous les théorèmes du cours concernant les caractères à partir des résultats du troisième exercice de la première fiche.

Exercice 2 — Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$, de degré 3 et non isomorphes. Déterminer les multiplicités des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ apparaissant dans la représentation $\rho\otimes\rho'$.

Exercice 3 (*Groupes diédraux*) — Étant donné un entier naturel $n\geq 3$, on désigne par D_n le groupe des isométries du plan préservant un polyèdre régulier à n côté ; on note C_n le sous-groupe constitué des rotations. On vérifie immédiatement que le groupe D_n est d'ordre $2n$ et qu'il contient une réflexion s.

1) Justifier que l'application $\mathrm{C}_n\times\{1,s\}\to\mathrm{D}_n,\ \ (r,\sigma)\mapsto r\sigma$ est une bijection et décrire la structure de groupe obtenue sur $\mathrm{C}_n\times\{1,s\}$.

2) Déterminer toutes les représentations irréductibles de degré un de D_n.

3) Soit (V,ρ) une représentation du groupe C_n. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{I}(\mathrm{V},\rho)$ l'espace vectoriel des applications $f:\mathrm{D}_n\to\mathrm{V}$ telles que $f(rg) = \rho(r)f(g)$ pour tous $r\in\mathrm{C}_n$, $g\in\mathrm{D}_n$, sur lequel le groupe D_n opère par $g.f(g') = f(g'g)$ $(g,\ g'\in\mathrm{D}_n)$.

Déterminer toutes les représentations irréductibles de D_n de cette forme.

4) Vérifier que l'on a obtenu ainsi toutes les représentations irréductibles du groupe D_n.

Exercice 4 (*Induction*) — Soient G un groupe fini et $\mathrm{H}\subset\mathrm{G}$ un sous-groupe. Étant donné un H-module W, le produit tensoriel $\mathbb{C}[\mathrm{G}]\otimes_{\mathbb{C}[\mathrm{H}]}\mathrm{W}$ est par définition le quotient de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[\mathrm{G}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{W}$ par le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme $e_{gh}\otimes w - e_g\otimes hw$ avec $g\in\mathrm{G}$, $h\in\mathrm{H}$ et $w\in\mathrm{W}$. L'action naturelle de G sur $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ fait de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]\otimes_{\mathbb{C}[\mathrm{H}]}\mathrm{W}$ un G-module, que l'on appelle G-*module induit par* W et que l'on note
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W}).$$

1) Étant donné $\mathscr{R}\subset G$ un système de représentants des classes à droite modulo H, les éléments e_r, $r\in\mathscr{R}$, constituent une base de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ en tant que $\mathbb{C}[\mathrm{H}]$-module à droite. En déduire une description du G-module $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ et déterminer les G-modules
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathbf{1}_{\mathrm{H}}) \quad\text{et}\quad \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}[\mathrm{H}]),$$
respectivement induits par les représentations triviale et régulière de H.

2) Démontrer que l'application $W \to \mathrm{Ind}_H^G(W),\ w \mapsto 1 \otimes w$ induit par composition une bijection

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(W), V) \to \mathrm{Hom}_H(W, V)$$

pour tout G-module V.

En déduire que toute représentation irréductible de G est contenue dans une représentation induite d'une représentation irréductible de H.

3) On note χ_W le caractère du H-module W et on désigne par $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_W)$ le caractère du G-module $\mathrm{Ind}_H^G(W)$. Démontrer que, pour toute fonction centrale φ sur G,

$$(\chi_W|\varphi_{|H})_H = (\mathrm{Ind}_H^G(\chi_W)|\varphi)_G,$$

où $(.|.)_H$ et $(.|.)_G$ sont les produits scalaires hermitiens usuels sur Cent(H) et Cent(G) respectivement ; c'est la *formule de réciprocité de Frobenius*.

4) Vérifier que, pour tout élément g de G,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi_W)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G,\ s^{-1}gs \in H} \chi_W(s^{-1}gs).$$

Exercice 5 (*Un théorème de Frobenius*) — Soient G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G satisfaisant à la condition suivante : quel que soit $g \in G$, $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$ si $g \notin H$.

1) On désigne par N l'ensemble des éléments de G dont la classe de conjugaison est disjointe de H. Démontrer que toute fonction centrale φ sur H se prolonge de manière unique en une fonction centrale $\widetilde{\varphi}$ sur G prenant la valeur 1 sur N puis établir l'identité

$$\widetilde{\varphi} = \mathrm{Ind}_H^G(\varphi) - \varphi(1)(\mathrm{Ind}_H^G(1) - 1).$$

2) Vérifier que

$$(\widetilde{\varphi_1}|\widetilde{\varphi_2})_G = (\varphi_1|\varphi_2)_H$$

pour toutes fonctions centrales $\varphi_1,\ \varphi_2$ sur H.

3) Supposons que χ soit un caractère irréductible de H. Démontrer que la fonction centrale $\widetilde{\chi}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères irréductibles de G puis en déduire qu'il s'agit du caractère d'une représentation irréductible ρ de G dont le noyau contient N.

4) Déduire de ce qui précède qu'il existe une *rétraction* de G sur H, c'est-à-dire un homomorphisme $p : G \to H$ tel que $p_{|H}$ soit l'identité de H.

Exercice 6 — Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et W un H-module ; on pose $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$.

Étant donné un élément g de G, on pose ${}^gH = gHg^{-1}$ et on désigne par ${}^gW$ le ${}^gH$-module obtenu en faisant agir $u \in {}^gH$ sur W par $u.w = (g^{-1}ug).w$.

1) Soit K un sous-groupe de G et soit $T \subset G$ un système de représentants des doubles classes $K\backslash G/H$.

(i) Quel que soit $t \in T$, on désigne par $V(t)$ le sous-K-module de V engendré par les vecteurs $e_t \otimes w$, $w \in W$. Vérifier que le stabilisateur de $\mathbb{C}e_t \otimes W$ est le sous-groupe $K \cap {}^tH$ de K et en déduire que $V(t)$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}ke_t \otimes W$, k parcourant un système de représentants des classes à droite $K/(K \cap {}^tH)$.

(ii) Déduire de ce qui précède que le K-module $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ est isomorphe à la somme directe des K-modules $\mathrm{Ind}_{K\cap {}^tH}^K({}^tW)$, $t \in T$.

2) En utilisant la question précédente et la propriété universelle de l'induction, démontrer que le G-module $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ est irréductible si et seulement si

– le H-module W est irréductible ;
– pour tout $g \in G - H$, les $H \cap gHg^{-1}$-modules W et ${}^gW$ n'ont aucune composante irréductible commune.

3) Déduire de ce qui précède que, lorsque H est distingué dans G, le G-module $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ est irréductible si et seulement si le H-module W est irréductible et n'est isomorphe à aucun de ses conjugués ${}^gW$, $g \in G - H$.