1. Compter les nombres premiers

1.1. Euclide

(1.1) On trouve dans le livre VII des *Éléments* d'Euclide les résultats fondamentaux de l'arithmétique des nombres entiers.

THÉORÈME 1.1. (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE) — *Tout nombre entier $n > 1$ est un produit de nombres premiers, et cette écriture est* unique *à l'ordre des facteurs près.*

Cet énoncé est bien connu, mais il est important d'avoir conscience :

(i) que l'existence d'une factorisation est très facile à démontrer (par récurrence) [1] ;

(ii) que l'unicité, par contre, est plus délicate ; il faut en effet faire appel au *lemme d'Euclide* [2], lequel peut se déduire du théorème de Bachet-Bézout (et donc de l'algorithme de la division euclidienne) ;

(iii) que l'unicité est ce qui est le plus utile dans la pratique (par exemple la résolution dans $\mathbf{Z}^3$ de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, que l'on peut trouver dans [**Hin**] ou encore [**HW**].

Fwd : **(1.2)** Considérons un nombre premier p. La *valuation p-adique* d'un nombre entier $n \in \mathbf{Z}$, notée $v_p(n)$ est la plus grand exposant de p divisant n :

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid p^k | n\}.$$

C'est un élément de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $v_p(n) = \infty$ ssi $n = 0$, $v_p(1) = 0$ et, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$,

(i) $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$;

(ii) $v_p(m+n) \geqslant \min\{v_p(m), v_p(n)\}$.

EXERCICE 1. — *Démontrer les deux propriétés précédentes.*

La notion de valuation p-adique permet d'énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique sous la forme équivalente suivante : *tout nombre entier $n \geqslant 1$ s'écrit sous la forme*

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}.$$

Il est important de remarquer ici que, si le produit porte a priori sur l'ensemble des nombres premiers, le facteur $p^{v_p(n)}$ est égal à 1 dès que $p > n$; il s'agit donc en réalité du produit d'un nombre *fini* de termes.

EXERCICE 2. — *Démontrer que le dernier énoncé ci-dessus est équivalent au théorème 1.*

(1.3) Euclide démontre que l'ensemble des nombres premiers est bel et bien *infini.*

THÉORÈME 1.2. (EUCLIDE) — *L'ensemble des nombres premiers est infini.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre entier $n! + 1 > 1$ admet au moins un facteur premier p. Celui-ci ne peut être égal à aucun des entiers $2, 3, \ldots, n$ car il diviserait sinon $n!$, et donc également $1 = (n! + 1) - n!$; on en déduit $p > n$. L'ensemble des nombres premiers est non borné, donc il est infini. □

1. Il s'agit par ailleurs d'un phénomène très général : dans tout anneau *noethérien*, chaque élément non nul peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit d'éléments irréductibles

2. Si p est un nombre premier et a, b sont deux entiers tels que $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$

REMARQUE 1.3. — Notons $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. On peut déduire de l'argument d'Euclide une majoration très grossière du n-ième nombre premier p_n :

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$$

pour tout $n \geqslant 1$. On prouve aisément cette inégalité en raisonnant par récurrence (exercice). La suite (p_n) croissant moins vite que la suite $\left(2^{2^{n-1}}\right)$, il y a au moins autant de nombres premiers dans l'intervalle réel $[1,x]$ que de termes de la seconde suite. Puisque $2^{2^{n-1}} \leqslant x$ ssi $n \leqslant \log_2 \log_2 x + 1$, il y a donc toujours au moins $\log_2 \log_2 x + 1$ nombres premiers dans $[1,x]$.

1.2. Euler

Euler exposa en 1737 une nouvelle preuve de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, reposant sur le théorème fondamental de l'arithmétique et des considérations analytiques simples.

(2.1) Toute l'analyse requise dans l'approche d'Euler est contenue dans l'énoncé suivant, qui est une version *quantitative* de la comparaison série-intégrale [(3)].

LEMME 1.4. — *Soit $y < x$ deux nombres réels. Pour toute fonction monotone $f : [y,x] \to \mathbf{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(|f(y)|+|f(x)|),$$

où la constante implicite dans O ne dépend ni de f, ni de x et y.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que f est *croissante.*

Si x et y sont entiers, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) &= \sum_{n=y}^{x-1}\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t + f(x)\\
&= \sum_{n=y}^{x-1}\int_n^{n+1} f(\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t + f(x)\\
&= \int_y^x f(\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t + f(x)\\
&\leqslant \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)
\end{aligned}$$

e utilisant la croissance de f. De la même manière,

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = f(y) + \sum_{n=y+1}^{x}\int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t = f(y) + \int_y^x f(\lceil t\rceil)\,\mathrm{d}t \geqslant f(y) + \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

3. Il faut quand même ajouter l'estimation $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$ sur $[-1/2,1/2]$, sous la forme : il existe un nombre réel $A > 0$ tel que

$$|\ln(1+x) - x| \leqslant Ax^2$$

pour tout $x \in [-1/2,1/2]$. On peut le justifier en observant que la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, donc bornée sur tout segment qu'il contient.

ce qui établit l'estimation voulue :

$$\left|\sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n) - \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(x)|,|f(y)|\} \leqslant |f(x)|+|f(y)|.$$

Le cas général s'en déduit aisément en introduisant les parties entières des bornes de sommation. On a en effet

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \sum_{\lceil y\rceil\leqslant n\leqslant\lfloor x\rfloor} f(n)$$

et

$$\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\lceil y\rceil}^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^{\lceil y\rceil} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

avec

$$\left|\int_y^{\lceil y\rceil} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(y)|,|f(\lceil y\rceil)|\},\quad \left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(x)|,|f(\lfloor x\rfloor)|\}$$

En vertu de la croissance de f,

$$f(y)\leqslant f(\lceil y\rceil)\leqslant f(\lfloor x\rfloor)\leqslant f(x)$$

et donc

$$\max\{|f(y)|,|f(\lceil y\rceil)|,|f(x)|,|f(\lfloor x\rfloor)|\} = \max\{|f(x)|,|f(y)|\}.$$

Au final, nous avons obtenu la majoration

$$\left|\sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n) - \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 3\max\{|f(x)|,|f(y)|\} \leqslant 3\left(|f(x)|+|f(y)|\right).$$

□

Remarque 1.5. — Bien que très élémentaire, cette estimation est fort utile et nous l'utiliserons à de nombreuses reprises. Nous en verrons également deux raffinements : la formule d'Abel et la formule d'Euler-Maclaurin.

En guise d'illustration, rappelons le comportement des séries de Riemann. Pour tout nombre réel $s>1$,

$$\sum_{n=M}^N \frac{1}{n^s} = \int_M^N t^{-s}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}) = \frac{M^{1-s}-N^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}),$$

donc la série $\zeta(s)=\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ est convergente et

$$1<\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(1).$$

(2.2) L'observation capitale d'Euler est que le théorème fondamental de l'arithmétique permet d'exprimer $\zeta(s)$ à l'aide des nombres premiers. Pour comprendre cela, introduisons pour tout nombre premier p et tout $s>1$ la série

$$\zeta_p(s) = 1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{p^{ks}}$$

restreinte aux entiers qui sont des puissances de p. Il s'agit bien entendu d'une série géométrique, de somme

$$\zeta_p(s) = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Le produit

$$\zeta_2(s)\zeta_3(s) = \left(\sum_{m_2\geqslant 0}\frac{1}{2^{m_2 s}}\right)\left(\sum_{m_3\geqslant 0}\frac{1}{3^{m_3 s}}\right) = \sum_{m_2,m_3\geqslant 0}\frac{1}{(2^{m_2}3^{m_3})^s}$$

n'est pas autre chose, en vertu de la règle usuelle de développement, que la série zêta restreinte aux entiers de la forme $2^{m_2}3^{m_3}$. Plus généralement, pour tout entier $N \geqslant 2$,

$$\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s) = \prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n\in E_N}\frac{1}{n^s},$$

où E_N désigne l'ensemble des entiers obtenus en faisant tous les produits possibles des nombres premiers $p \leqslant N$. Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit que l'ensemble E_N contient *tous les nombres* $n \leqslant N$ (existence d'une factorisation, les facteurs premiers étant nécessairement inférieurs à N), et que chacun d'eux ne s'obtient qu'une seule fois, c'est-à-dire pour un seul terme du développement du produit de gauche (unicité de la factorisation). Nous pouvons donc écrire

$$\left|\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s) - \sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n\in E_N \text{ et } n>N}\frac{1}{n^s} \leqslant \sum_{n>N}\frac{1}{n^s}.$$

Le membre de droite (reste d'une série convergente...) est majoré par $\frac{N^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(N^{-s})$ (Lemme 1.4), donc il tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Nous venons ainsi de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.6 (Formule du produit — *Pour tout réel $s > 1$, la suite des produits finis $\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s)$ est convergente, de limite $\zeta(s)$. Autrement dit,*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

(2.3) On a manifestement $\zeta(s) > 1$ et $\frac{1}{p^s} < \frac{1}{2}$ pour tout $s > 1$ et tout p premier. Il est donc licite de passer aux logarithmes dans l'identié d'Euler, qui se réécrit alors

$$\begin{aligned}\ln\zeta(s) &= \sum_{p\in\mathscr{P}} -\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\\ &= \sum_{p\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{2s}}\right)\right)\\ &= \sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^{2s}}\right).\end{aligned}$$

pour tout $s \in]1,+\infty[$.

Il faut ici observer que l'interversion de la somme et du $\mathrm{O}(\cdot)$ est licite car on utilise l'estimation

$$\ln(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$$

pour tout x dans $[-1/2, 1/2]$ (la constante de O ne dépend *pas* de x), puis on substitue $p^{-s} \in [0, 1/2]$ à x. Enfin, en observant que la série des p^{-2s} est bornée par la somme de la série (de Riemann) convergente des n^{-2} pour tout $s \in]1,+\infty[$, nous obtenons

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s} = \ln\zeta(s) + \mathrm{O}(1)$$

pour tout $s \in]1,+\infty[$.

Il reste à exploiter notre connaissance du comportement asymptotique de $\zeta(s)$ au voisinage de 1^+, rappelé ci-dessus (à la suite de la remarque 1.5) :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1),$$

donc

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \log\left(\frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)\right) + \mathrm{O}(1) = \log\frac{1}{s-1} + \log(1+\mathrm{O}(s-1)) + \mathrm{O}(1)$$

et

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = -\log(s-1) + \mathrm{O}(1)$$

lorsque s tend vers 1^+.

THÉORÈME 1.7. (EULER) — *La série*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$$

est divergente.

Démonstration. Pour tout $s > 1$,

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s}$$

dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. L'estimation asymptotique du membre de droite quand s tend vers 1 que l'on vient d'obtenir fournit la conclusion voulue. □

REMARQUE 1.8. — 1. On peut déduire de ce théorème l'estimation $\pi(x) = o(x)$ quand x tend vers l'infini, c'est-à-dire que la proportion des nombres premiers parmi les nombres entiers $\leqslant x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De manière imagée, la probabilité qu'un nombre entier choisi au hasard soit premier est nulle.

2. La formule

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \ln\zeta(s) + \mathrm{O}(1)$$

quand s tend vers 1^+ relie le comportement asymptotique de la suite des nombres premiers, exprimé via celui de la série des $\frac{1}{p^s}$ quand $s \longrightarrow 1^+$, à celui d'une fonction spécifique, ici $\zeta(s)$, au voisinage de $s = 1$. Ce phénomène est au cœur de la théorie analytique des nombres.

3. Des arguments analogues à ceux utilisés précédemment permettent d'encadrer les sommes partielles de la séries des inverses des nombres premiers : il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\ln\ln x - \ln 2 \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant x} \frac{1}{p} \leqslant e\ln\ln x + C$$

pour tout réel $x > 1$. La démonstration fait l'objet de l'exercice 3 du TD1. Cet encadrement détermine l'ordre de grandeur de $\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p}$. Nous verrons plus loin un développement asymptotique de ces sommes partielles, de terme dominant $\ln\ln x$.

1.3. Tchébychev

(3.1) En 1850, le mathématicien russe Pafnouti Tchébychev démontra que la fonction de comptage des nombres premiers a bien l'ordre de grandeur attendu.

THÉORÈME 1.9. — *Il existe des nombres réels* $0 < c < C$ *tels que, pour tout* x *assez grand,*

$$c\,\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant C\,\frac{x}{\log(x)}.$$

On peut déduire de ce théorème l'existence de nombres premiers dans certains intervalles. En effet, si $a < b$ sont deux nombres réels (suffisamment grands) tels que

$$C\frac{a}{\log a} < c\frac{b}{\log b},$$

alors $\pi(a) < \pi(b)$ et l'intervalle $]a, b]$ contient donc un nombre premier. De fait, les bornes obtenues par Tchébychev, à savoir $c = 0,92$ et $C = 1,11$, étaient assez bonnes pour lui permettre de de démontrer le *postulat de Bertrand* :

pour tout nombre entier $n \geqslant 2$*, l'intervalle* $]n, 2n[$ *contient toujours un nombre premier.*

Nous allons exposer une version simplifiée de la démonstration de Tchébychev, conduisant aux bornes plus grossières $c = \frac{1}{2}$ et $C = 2$. Si ces bornes ne suffisent pas à déduire le postulat de Bertrand, une preuve plus élémentaire de ce résultat, découverte par P. Erdös en 1936, fait l'objet du problème du TD1.

La démonstration de Tchébychev est *élémentaire*, au sens où elle n'utilise que le théorème fondamental de l'arithmétique et des estimations relevant de l'analyse réelle asymptotique, et non pas l'analyse complexe. Elle n'en demeure pas moins ingénieuse, son point de départ étant l'observation que le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ ne diffère « pas trop » du produit de tous les nombres premiers dans l'intervalle $]n, 2n]$.

(3.2) Nous allons avoir besoin de quatre résultats auxiliaires, tous intéressants indépendamment de l'utilisation que nous allons en faire.

Le premier consiste en une formule explicitant la valuation p-adique des coefficients binomiaux.

LEMME 1.10. (FORMULE DE LEGENDRE) — *Pour tout nombre entier naturel* n *et tout nombre premier* p*,*

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

Démonstration — Si l'on factorise chaque entier $m \leqslant n$ sous la forme $m = p^{v_p(m)} m'$, avec $p \nmid m'$, alors le facteur p^α apparaît dans

$$n! = \prod_{1 \leqslant m \leqslant n} m$$

pour chaque entier m tel que $p^\alpha | m$ et $p^{\alpha+1} \nmid m$, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor$ fois (le nombre des multiples de p^α moins celui des multiples de $p^{\alpha+1}$ dans $[1, n]$.). On a donc

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor \right) \alpha = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

□

Le second est un encadrement du coefficient binomial médian.

LEMME 1.11. — *Pour tout entier* $n \geqslant 1$,

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant 2^{n-1}.$$

Démonstration — Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sont croissants avec $k \in \{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, puis décroissants avec $k \in \{\lfloor n/2 \rfloor, n\}$; la plus grande valeur est donc atteinte en

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{n - \lfloor n/2 \rfloor}.$$

On en déduit facilement la minoration souhaitée :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant (n+1) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

donc

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Pour établir la majoration, distinguons deux cas suivant la parité de n.

(i) Si $n = 2m+1$ est impair, alors nous pouvons aparier les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, d'où :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \geqslant 2 \binom{n}{m},$$

ce qui est la majoration souhaitée.

(ii) Si $n = 2m$, alors $\binom{n}{m}$ est l'unique coefficient binomial maximal, donc l'argument précédent ne fonctionne plus. On a cependant

$$\binom{2m}{m} = \frac{m+2}{m} \binom{2m}{m+1} \leqslant 2 \binom{2m}{m+1},$$

donc

$$2^n \geqslant \binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m} + \binom{2m}{m+1} = \binom{2m}{m} + 2\binom{2m}{m+1} \geqslant 2\binom{2m}{m},$$

ce qui est encore la majoration souhaitée.

□

Le troisième fournit une seconde majoration des coefficients binomiaux, faisant apparaître la fonction de comptage.

LEMME 1.12. — *Soit* $n \geqslant 1$ *et* $k \geqslant 0$ *deux nombres entiers.*

(i) Soit p *un nombre premier. En posant* $\alpha_p = v_p\left(\binom{n}{k}\right)$, *on a*

$$p^{\alpha_p} \leqslant n.$$

(ii) On en déduit la majoration :

$$\binom{n}{k} \leqslant n^{\pi(n)}.$$

Démonstration — (i) Nous pouvons expliciter la valuation p-adique du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à l'aide de la formule de Legendre (Lemme 1.10) :

$$\begin{aligned}\alpha_p &= v_p\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\\ &= v_p(n!) - v_p(k!) - v_p((n-k)!)\\ &= \sum_{m\geqslant 1}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{k}{p^m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-k}{p^m}\right\rfloor\right)\end{aligned}$$

La fonction réelle f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor$$

est *1-périodique* par rapport à chacune des variables : il suffit de le vérifier pour la première par symétrie de f, et

$$f(x+1,y) = \lfloor x+y+1\rfloor - \lfloor x+1\rfloor - \lfloor y\rfloor = \lfloor x+y\rfloor + 1 - (\lfloor x\rfloor + 1) - \lfloor y\rfloor = f(x,y)$$

pour tous $x,y\in\mathbf{R}^2$. On en déduit

$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = \sup_{x,y\in[0,1[} f(x,y),$$

puis

$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = 1$$

puisque

$$f(x,y) = \lfloor x+y\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x+y<1\\ 1 & \text{si} \quad x+y\geqslant 1\end{cases}$$

pour tous $x,y\in[0,1[$. En observant que, dans la somme ci-dessus pour α_p, les seuls entiers m ayant une contribution éventuellement non nulle sont ceux tels que $p^m\leqslant n$, c'est-à-dire $m\leqslant\log_p n$, nous obtenons finalement

$$\alpha_p\leqslant\log_p n \quad\text{et donc}\quad p^{\alpha_p}\leqslant p^{\log_p n} = n.$$

(ii) Avec les notations en vigueur, nous pouvons écrire la factorisation du coefficient binomial sous la forme

$$\binom{n}{k} = \prod_{p\mid\binom{n}{k}} p^{\alpha_p}.$$

Chaque facteur p^{α_p} figurant dans le membre de droite est majoré par n en vertu premier point, et tout diviseur premier de $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ divise $n!$, donc est inférieur à n. Ces observations conduisent immédiatement à la majoration

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\leqslant n^{\pi(n)}.$$

□

Le quatrième et dernier résultat préliminaire décrit les plus grands facteurs premiers du coefficient binomial médian.

LEMME 1.13. — *Soit $n\geqslant 2$ un nombre entier. Le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est divisible une fois et une seule par chaque nombre premier p dans l'intervalle $]n,2n]$; en particulier,*

$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p \mid \binom{2n}{n}.$$

De même, le coefficient binomial $\binom{2n+1}{n}$ *est divisible une fois et une seule par chaque nombre premier* p *dans l'intervalle* $]n+1,2n]$ *; en particulier,*

$$\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \mid \binom{2n+1}{n}.$$

Démonstration — En écrivant

$$(2n)! = \binom{2n}{n}(n!)^2,$$

il est manifeste que chaque nombre premier $p \in]n,2n]$, divisant $(2n)!$ mais ne divisant pas $n!$, doit diviser le coefficient binomial. Le produit de ces nombres premiers divise donc le coefficient binomial en vertu du lemme d'Euclide. Enfin, la condition $p > n$ implique $p^2 > n^2 \geqslant 2n$, donc $v_p((2n)!) = 1$ en vertu de la formule de Legendre (Lemme 1.10) et p^2 ne peut donc pas diviser le coefficient binomial.

Le cas du coefficient binomial $\binom{2n+1}{n}$ se traite de manière analogue. □

(3.3) Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 1.9, avec les constantes $c = \frac{1}{2}$ et $C = 2$.

La minoration —- Soit $x > 1$ un nombre réel et posons $n = \lfloor x \rfloor$, ce qui fournit l'encadrement $n \leqslant x < n+1$.

En combinant les lemmes 1.11 et 1.12, nous obtenons l'inégalité

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant n^{\pi(n)},$$

soit la minoration

$$\pi(n) \geqslant \frac{n\ln 2 - \ln(n+1)}{\ln n} \geqslant \frac{(x-1)\ln 2 - \ln(x+1)}{\ln x}.$$

Le membre de droite est supérieur à $\frac{1}{2}\frac{x}{\ln x}$ pour tout réel $x \geqslant 20$, donc la minoration annoncée est acquise pour tout $x \geqslant 20$. Par ailleurs, on la vérifie explicitement pour $3 \leqslant x < 20$ en observant sur une table des valeurs de $\pi(n)$ l'inégalité

$$\pi(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

pour tout entier $n \in [3,20]$, d'où l'on tire

$$\pi(x) \geqslant \pi(\lfloor x \rfloor) \geqslant \frac{1}{2}\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\ln(\lfloor x \rfloor + 1)} \geqslant \frac{1}{2}\frac{n}{\ln n}$$

pour tout réel $x \leqslant 20$.

La majoration — La fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ est croissante, donc il suffit d'établir la majoration pour x entier puisqu'alors

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leqslant 2\frac{\lfloor x \rfloor}{\ln\lfloor x \rfloor} \leqslant 2\frac{x}{\ln x}.$$

Nous allons donc établir l'inégalité

$$\pi(n) \leqslant 2\frac{n}{\ln n}$$

en raisonnant par récurrence forte sur le nombre entier $n \geqslant 2$. En fait, nous allons avoir besoin d'initialiser cette récurrence à $n = 106$, donc il faut commencer par vérifier explicitement que la majoration vaut pour tout entier $n \leqslant 106$; cela se fait aisément à l'aide d'une table des valeurs de $\pi(n)$.

Prouvons maintenant l'hérédité forte, en distinguant deux cas, selon la parité de n.

(i) Si n est pair, alors $\pi(n) = \pi(n-1)$ et l'inégalité pour n découle immédiatement de celle pour $n-1$.

(ii) Supposons maintenant que $n = 2m+1$ soit impair et $n \geqslant 106$. En combinant les lemmes 1.11 et 1.13, on obtient

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 2^{2m}.$$

Le membre de gauche est minoré par $(m+2)^{\pi(2m+1)-\pi(m+1)}$, donc

$$\pi(2m+1) - \pi(m+1) \leqslant \frac{2m\ln 2}{\ln(m+2)},$$

puis

$$\pi(n) = \pi(2m+1) \leqslant 2\frac{m+1}{\ln(m+1)} + \frac{2m\ln 2}{\ln(m+2)} \leqslant \frac{(1+\ln 2)n+1}{\ln(n/2)}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. On vérifie finalement que le membre de droite est majoré par $2\frac{n}{\ln n}$ pour tout $n \geqslant 106$.

□

(3.4) Le théorème de Tchébychev fournit en particulier l'estimation asymptotique

$$\pi(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

quand $x \longrightarrow +\infty$. Sensiblement plus faible que le théorème des nombres premiers, elle permet toutefois déjà de déterminer le comportement asymptotique de certaines sommes indexées par des nombres premiers.

THÉORÈME 1.14 (THÉORÈME DE MERTENS) — *Quand* $x \to +\infty$,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + \mathrm{O}(1).$$

Démonstration. Les deux membres de l'égalité ont le même comportement asymptotique si l'on remplace x par $\lfloor x \rfloor$, donc il est suffisant de traiter le cas où $x = n$ est un nombre entier. L'idée consiste à évaluer de deux façons différentes la quantité $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$: avec la formule de Stirling d'une part, et avec la formule de Legendre d'autre part.

On a

$$\ln(n!) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln k = n\ln n - n + \mathrm{O}(\ln n) = n\ln n + \mathrm{O}(n)$$

quand n tend vers $+\infty$ par application du lemme 1.3.

Écrivons maintenant

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{p\leqslant n} p^{v_p(n!)}\right) = \sum_{p\leqslant n} v_p(n!)\ln p.$$

En injectant la formule de Legendre, il vient

$$\ln(n!) = \sum_{p\leqslant n,\ m\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \ln p = \sum_{p\leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln p + \sum_{p\leqslant n,\ m\geqslant 2} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \ln p.$$

La seconde somme du membre de droite se majore facilement :

$$\sum_{p\leqslant n,\ m\geqslant 2} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \ln p \leqslant \sum_{p\leqslant n,\ m\geqslant 2} \frac{n}{p^m} \ln p = n\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} = \mathrm{O}(n)$$

en sommant la série géométrique et en observant que la série de terme général $\frac{\ln k}{k(k-1)} \sim \frac{\ln k}{k^2}$ est convergente.

Pour traiter la première somme, il suffit d'écrire

$$\lfloor x \rfloor = x + \mathrm{O}(1)$$

pour tout x réel, donc

$$\sum_{p \leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln p = \sum_{p \leqslant n} \frac{n}{p} \ln p + \mathrm{O}\left(\sum_{p \leqslant n} \ln p \right) = n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + \mathrm{O}\left(\sum_{p \leqslant n} \ln p \right).$$

Grâce à la majoration grossière

$$\sum_{p \leqslant n} \ln p \leqslant \pi(n) \ln n,$$

le théorème de Tchébychev conduit à l'estimation

$$\sum_{p \leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + \mathrm{O}(n).$$

Au final, ces deux façons d'estimer $\ln(n!)$ conduisent à l'égalité

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + \mathrm{O}(n) = n \ln n + \mathrm{O}(n),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\log p}{p} = \ln n + \mathrm{O}(1).$$

$\square$

2. Fonctions arithmétiques

Dans tout ce qui suit, on pose $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 2.1 — *Une* fonction arithmétique *est une application* $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$. *Les fonctions arithmétiques forment un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel pour l'addition usuelle, noté* $\mathscr{A}$.

Bien entendu, une fonction arithmétique n'est pas autre chose qu'une suite à valeurs complexes. Cette nouvelle terminologie est justifiée par le fait que nous allons nous intéresser à des suites particulières, intimement reliées à des questions arithmétiques. Voici les principales fonctions arithmétiques que nous rencontrerons :

(a) la fonction constante égale à 1, notée 1 ;

(b) la fonction « identité » id, définie par $\mathrm{id}(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$;

(c) la fonction « de Dirac » en 1, définie par

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$;

(d) la fonction « nombre de diviseurs » , usuellement notée d ou τ, et définie par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$;

(e) la fonction μ de Möbius, définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(f) la fonction indicatrice d'Euler φ, définie par

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(h,n)=1} 1$$

(g) la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers, notée $\mathbf{1}_{\mathscr{P}}$;

(h) la fonction Λ de von Mangolt, définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^{\alpha}, \text{ avec } p \text{ premier et } \alpha \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉFINITION 2.2. — *La* fonction sommatoire *d'une fonction arithmétique* f *est la fonction* M_f *définie sur* $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ *par*

$$M_f(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n).$$

Le problème de déterminer le comportement asymptotique de M_f est une vaste généralisation du théorème des nombres premiers (cas $f = \mathbf{1}_{\mathscr{P}}$).

Avant d'aborder l'étude asymptotique de M_f, nous allons mettre en évidence une structure algébrique spécifique sur $\mathscr{A}$, sous-jacente à de nombreuses identités (plus ou moins) bien connues.

2.1. Convolution de Dirichlet

(1.1) Les fonctions arithmétiques peuvent être multipliées de façon habituelle. Il s'avère cependant que l'on peut définir sur $\mathscr{A}$ une autre structure multiplicative, plus intéressante, qui reflète les propriétés de divisibilité des nombres entiers. Il importe pour cela de manipuler avec aisance les diviseurs d'un nombre entier.

LEMME 2.3. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'application*

$$\{\textit{diviseurs de}\, n\} \longrightarrow \{(d,d') \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid dd' = n\},\ \ d \mapsto \left(d, \frac{n}{d}\right)$$

est une bijection.

Démonstration. Il convient de remarquer que, puisque $d \in \in N^*$ est un diviseur de n, le nombre rationnel n/d est bien entier. Si l'on note q l'application définie dans l'énoncé et p_1 la projection de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ sur le premier facteur, alors p_1 est un inverse à gauche de u. Pour voir qu'il s'agit d'un inverse à droite, il suffit d'observer que, pour tout couple $(d,d') \in \mathbf{N}^*$ tel que $dd' = n$, on a nécessairement $d' = \frac{n}{d}$. Ainsi, u et (la restriction de) p_1 sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. □

Étant donné deux fonctions arithmétiques f, g, on définit leur *produit de Dirichlet*, noté $f * g$, par

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d,d' \in \mathbf{N}^*\ ;\ dd'=n} f(d) g(d') \tag{1}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. La première somme porte sur tous les diviseurs de n dans $\mathbf{N}^*$, la seconde sur tous les couples (d,d') d'éléments de $\mathbf{N}^*$ tels que $dd' = n$; cette réécriture est justifiée par le lemme précédent.

PROPOSITION 2.4. — *Muni de l'addition $+$ et de la multiplication $*$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre associative, commutative, d'élément neutre δ_1. En outre, le groupe $\mathscr{A}^\times$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ est formé des f telles que $f(1) \neq 0$.*

Pour $f \in \mathscr{A}$ et $k \geqslant 1$, on pose

$$f^{(k)} = f * \ldots * f$$

(k copies). Si $f \in \mathscr{A}^\times$, on désigne par $f^{(-1)}$ son inverse au sens du produit de Dirichlet.

Démonstration. L'associativité découle de l'identité

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{d,c\ ;\ dc=n} (f * g)(d) h(c) = \sum_{a,b,c\ ;\ abc=n} (f(a)g(b))h(c)$$

et de l'associativité de la multiplication dans $\mathbf{C}$.

La commutativité se déduit du fait que la seconde somme dans (1) est symétrique en f et g.

L'élément neutre multiplicatif de $\mathscr{A}$ est la fonction de Dirac δ_1 puisque

$$f * \delta_1(n) = \sum_{d|n} f(d) \delta_1(n/d) = f(n$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{A}$.

Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible, d'inverse g, alors

$$1 = \delta_1(1) = f * g(1) = f(1)g(1),$$

donc $f(1) \neq 0$. Réciproquement, si $f \in \mathscr{A}$ est une fonction telle que $f(1) \neq 0$, alors nous pouvons facilement définir une fonction $g \in \mathscr{A}$ telle que $f * g = \delta_1$. On raisonne pour cela par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$:

— on pose $g(1) = 1/f(1)$;

— si $n > 1$ et que l'on a défini $g(m)$ pour tout entier $m < n$, alors on pose

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n,\ d>1} f(d)g(n/d)$$

en remarquant que l'on a $n/d < n$ si $d > 1$.

La relation $f * g = \delta_1$, c'est-à-dire

$$\sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

est vérifiée par construction. □

(1.2) Introduisons maintenant les fonctions arithmétiques *multiplicatives.*

DÉFINITION 2.5. — *Une fonction arithmétique f est dite* multiplicative *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $f(1) = 1$ *;*

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ *pour tous entiers* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *premiers entre eux.*

Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit qu'une fonction arithmétique multiplicative f est entièrement déterminée par ses valeurs sur les entiers de la forme p^α, avec p premier et $\alpha \geqslant 1$: pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f(n) = f\left(\prod_p p^{v_p(n)}\right) = \prod_p f\left(p^{v_p(n)}\right).$$

PROPOSITION 2.6. — *Les fonctions arithmétiques multiplicatives forment un sous-groupe de* $\mathscr{A}^\times$.

La démonstration de ce résultat réside entièrement dans l'observation élémentaire suivante.

LEMME 2.7. — *Soit* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *deux nombres entiers* premiers entre eux. *L'applications*

$$\{(d,e) \in (\mathbf{N}^*)^2\ ;\ d|m \text{ et } e|n\} \longrightarrow \{\text{diviseurs de } mn\}, \quad (d,e) \mapsto de$$

est une bijection.

Démonstration. Notons tout d'abord que, si d (resp. e) est un diviseur de m (resp. de n), alors de est bien un diviseur de mn ; il suffit d'écrire $m = dm'$, $n = en'$ et $mn = dem'n'$ pour s'en convaincre.

Considérons un diviseur k de mn et posons

$$d = \mathrm{pgcd}(k,m), \quad \text{et} \quad e = \mathrm{pgcd}(k,n).$$

Par construction, d (resp. e) est un diviseur de m (resp. de n), donc $\mathrm{pgcd}(d,e) = 1$. Comme $d|k$ et $e|k$, on en déduit $de|k$ par application du lemme de Gauss.

Pour démontrer la divisibilité réciproque, écrivons

$$mn = kq', \quad m = dm', \text{ et } n = en',$$

avec

$$\mathrm{pgcd}(k, m') = \mathrm{pgcd}(k, n') = 1.$$

Comme k est premier à m' et n', l'identité

$$kq = mn = dem'n',$$

implique $k|de$ (toujours le lemme de Gauss).

On en déduit que l'application considérée dans l'énoncé est bien une bijection, de bijection réciproque l'application

$$k \mapsto (\mathrm{pgcd}(k, m), \mathrm{pgcd}(k, n))$$

□

Démonstration de la proposition 2.5. Si f et g sont multiplicatives, alors, pour tous entiers m, n premiers entre eux,

$$\begin{aligned}
(f * g)(mn) &= \sum_{\delta|mn} f(\delta) g(mn/\delta) \\
&= \sum_{d|m, d'|n} f(dd') g\left(\frac{m}{d}\frac{n}{d'}\right) \\
&= \sum_{d|n, d'|m} f(d) f(d') g(m/d) g(n/d') \\
&= \left(\sum_{d|m} f(d) g(m/d)\right) \left(\sum_{d'|n} f(d') g(n/d')\right) \\
&= (f * g)(m)(f * g)(n).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité est justifiée par le lemme précédent, la troisième exploite la multiplicativité de f et g, tandis que la quatrième n'est autre que le développement usuel d'un produit de deux sommes.

Toute fonction f multiplicative est inversible puisque $f(1) = 1$, et il reste à démontrer que son inverse $f^{(-1)}$ est encore multiplicative. On peut raisonner de la façon suivante. Considérons l'unique fonction arithmétique multiplicative h telle que

$$h(p^a) = f^{(-1)}(p^a)$$

pour tous p premier et $a \in \mathbf{N}^*$.

On a

$$(f * h)(p^a) = \sum_{m=0}^{a} f(p^m) h(p^{a-m}) = \sum_{m=0}^{a} f(p^m) f^{(-1)}(p^{a-m}) = (f * f^{(-1)})(p^a) = \delta_1(p^a),$$

donc $f * h$ et δ_1 prennent les mêmes valeurs sur tous les entiers qui sont une puissance d'un nombre premier. Puisqu'il s'agit de deux fonctions multiplicatives, on en déduit $f * h = \delta_1$, et donc $f^{(-1)} = h$ est bien multiplicative. □

□

EXEMPLES 2.8 — L'identité

$$1 * 1(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d, d' \,;\, dd' = n} 1$$

montre que $1*1$ est la fonction « nombre de diviseurs », notée d ; il s'agit donc d'une fonction multiplicative. On a

$$d(p^\alpha) = \sum_{0\leqslant k\leqslant\alpha} 1 = \alpha+1$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 1$, donc

$$d(n) = \prod_{p|n}(v_p(n)+1)$$

par multiplicativité.

Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$1^{(k)}(n) = \sum_{d_1,\ldots,d_k\ ;\ d_1\cdots d_k=n} 1$$

est le nombre de k-uplets d'entiers $(d_1,\ldots,d_k)$ tels que $d_1\cdots d_k = n$.

On a par ailleurs

$$1*\mathrm{id}(n) = \sum_{d|n} d,$$

donc la fonction arithmétique $\sigma = 1*\mathrm{id}$, associant à tout entier n la somme de ses diviseurs, est également multiplicative.

2.2. La fonction de Möbius

Considérons l'inverse de convolution de la fonction 1. Il s'agit d'une fonction multiplicative, qui vérifie par hypothèse l'identité

$$\sum_{d|n} 1^{(-1)}(d) = \delta_1(n)$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$. On en déduit :

$$1^{(-1)}(1) = 1,\ \ 1^{(-1)}(p) = -1 \ \text{ et } \ 1^{(-1)}(p^\alpha) = 0$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 2$. Par multiplicativité, on a donc

$$1^{(-1)}(n) = \prod_p 1^{(-1)}\left(p^{v_p(n)}\right) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$1^{(-1)} = \mu.$$

PROPOSITION 2.9. — *La fonction de Möbius est l'inverse de convolution de la fonction constante* 1. *De manière équivalente,*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n=1 \\ 0 & \textit{`sinon} \end{cases}$$

PROPOSITION 2.10. — *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(2) $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

(3) $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Démonstration. La première identité équivaut à $g = f * 1$, la seconde à $f = g * \mu$. Elles sont donc équivalentes puisque $1 * \mu = \delta_1$. □

2.3. La fonction indicatrice d'Euler

Par définition,

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} 1 = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \delta_1(\mathrm{pgcd}(m,n)).$$

En utilisant l'identité $\delta_1 = 1 * \mu$, il vient alors

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} 1 * \mu(\mathrm{pgcd}(m,n)) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(m,n)} \mu(d).$$

La double somme de droite est indexée par les couples (m,d) formés d'un entier $m \in \{1,\dots,n\}$ et d'un diviseur commun d de m et n. Si l'on fixe un diviseur d de n, les couples (m,d) associés correspondent aux multiples m de d entre 1 et n, en nombre $\frac{n}{d}$. Nous pouvons donc réécrire l'identité précédente sous la forme :

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d \mid m,n} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant n \\ d \mid m,n}} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \mathrm{id} * \mu.$$

En observant que l'on a

$$\varphi(p^\alpha) = \sum_{d \mid p^\alpha} \mu(d) \frac{p^\alpha}{d} = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 1$, nous retrouvons les propriétés bien connues de φ.

PROPOSITION 2.11. — *La fonction indicatrice d'Euler est multiplicative. Elle vérifie :*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

et

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Séries de Dirichlet

Les séries de Dirichlet apparaissent naturellement comme les *séries génératrices* des fonctions arithmétiques : à $f \in \mathscr{A}$ est associée la série de fonctions de la variable complexe s définie par

$$L(f,s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

La motivation pour introduire les fonctions n^s plutôt que s^n (qui conduiraient à des séries entières) est la propriété de *multiplicativité* évidente

$$\frac{1}{(mn)^s} = \frac{1}{m^s} \cdot \frac{1}{n^s}$$

pour tous $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Nous allons commencer par une étude générale des séries de Dirichlet, puis nous considérerons plus spécifiquement le cas des séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques multiplicatives.

3.1. Abscisses de convergence

(1.1) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres complexes.

On sait que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in \overline{\mathbf{R}}_+$ caractérisé par le fait que cette série converge (resp. diverge) pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R$ (resp. $|z| > R$). Nous allons voir que la série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ a une *abscisse de convergence* $\sigma_c \in \overline{R}$, caractérisée par le fait que cette série converge (resp. diverge) pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$ (resp. $\mathfrak{Re}(s) < \sigma_c$).

(1.2) L'outil essentiel permettant l'étude de la convergence des séries de Dirichlet est la *transformation d'Abel.*

PROPOSITION 3.1. — *Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites de nombres complexes. Posons $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ pour $N \geqslant 0$ et $A_{-1} = 0$.*

1. *Pour tous entiers M, N tels que $0 \leqslant M \leqslant N$,*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_M.$$

2. *Si :*
   - *(i) les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont bornées (ce qui est en particulier le cas lorsque cette série converge) ;*
   - *(ii) la suite (b_n) est à valeurs réelles, décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0 ;*

   alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. 1. Cette identité, appelée *transformation d'Abel,* est un analogue discret de l'intégration par parties. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=M}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_M .
\end{aligned}$$

2. Sous les hypothèses (i) et (ii), nous pouvons écrire, pour M et N assez grands (de sorte que la suite $(b_n)_{n \geqslant M-1}$ soit réelle et décroissante) :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| &\leqslant \sup_{n \geqslant 0} |A_n| \left(\sum_{n=M}^{N-1} |b_n - b_{n+1}| + |b_N| + |b_M| \right) \\
&\leqslant \sup_{n \geqslant 0} |A_n| \left(\sum_{n=M}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) + b_N + b_M \right) \\
&\leqslant 2 b_M \sup_{n \geqslant 0} |A_n| .
\end{aligned}$$

Cette majoration établit que la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ est de Cauchy, donc convergente. □

REMARQUE 3.2 — Un cas particulier bien connu de cette proposition est celui des séries alternées : si (u_n) est une suite réelle décroissante tendant vers 0, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge. Il suffit de poser $a_n = (-1)^n$ et $b_n = u_n$.

PROPOSITION 3.3. — *Si la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge en un point $s_0 \in \mathbf{C}$, alors elle converge uniformément sur tout cône $s_0 + \left(\mathbf{R}_{\geqslant 0} e^{i\theta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0} e^{-i\theta} \right)$ avec $\theta \in [0, \pi/2[$.*

Démonstration. Posons $s = s_0 + t$. Puisque

$$\frac{a_n}{n^s} = \frac{b_n}{n^t}$$

avec $b_n = a_n n^{-s_0}$, la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ en s_0 équivaut à celle de la série $\sum \frac{b_n}{n^t}$ en 0. Nous pouvons donc nous borner à traiter le cas $s_0 = 0$, et nous faisons donc l'hypothèse que la série $\sum a_n$ converge.

Notons $A_{M,N}$ la somme partielle $\sum_{n=M}^{N} a_n$. Étant donné $\varepsilon > 0$, notre hypothèse garantit l'existence d'un entier $M_0 \geqslant 1$ tel que, pour tous $N \geqslant M > M_0$,

$$|A_{M,N}| \leqslant \varepsilon .$$

Effectuons une transformation d'Abel :

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M}^{N} A_{M,n} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) + \frac{A_{M,N}}{(N+1)^s} .$$

Il vient

$$\left| \sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{n=M}^{N} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| + \frac{1}{|(N+1)^s|} \right)$$

pour tous $N \geqslant M > M_0$. Écrivons $s = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. En observant que l'on a

$$|s| \leqslant ka \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\cos \theta}$$

pour tout s dans le cône $\mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\theta}+\mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\theta}$ et $|t^{s+1}|=t^{a+1}$ pour tout $t>0$, on obtient

$$\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right|=\left|\int_n^{n+1}\frac{s}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant k\int_n^{n+1}\frac{a}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t=k\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)$$

et donc

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right|\leqslant \varepsilon k\left(\sum_{n=M}^{N}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)+\frac{1}{(N+1)^a}\right)=\frac{\varepsilon k}{M^a}\leqslant k\varepsilon.$$

La conclusion en découle en vertu du critère de Cauchy uniforme. □

COROLLAIRE 3.4. — *Il existe $\sigma_c\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ soit divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)<\sigma_c$ et convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>\sigma_c$.*

Démonstration. Il découle de la proposition précédente que l'ensemble

$$I=\left\{s\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}\;\middle|\;\sum_{n\geqslant 1}a_n n^{-s}\text{ converge}\right\}$$

est un *intervalle* contenant $+\infty$. On pose alors :

$$\sigma_c=\inf I.$$

□

L'élément σ_c de $\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ que l'on vient d'associer à la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ est son *abscisse de convergence.*

REMARQUE 3.5 — Pour déterminer l'abcisse de convergence d'une série de Dirichlet $\sum\frac{a_n}{n^s}$, il est suffisant de considérer $s\in\mathbf{R}$.

EXEMPLE 3.5 — Il est facile de voir que tous les cas sont possibles :

(i) Si $a_n=\frac{1}{n!}$, alors

$$\frac{a_{n+1}(n+1)^{-s}}{a_n n^{-s}}=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $s\in\mathbf{C}$, donc $\sigma_c=-\infty$.

(ii) Si $a_n=n!$, alors $\left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ tend vers $+\infty$ avec n pour tout $s\in\mathbf{C}$, donc $\sigma_c=+\infty$.

(iii) Si $a_n=1$, alors $\sigma_c=1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$ diverge au point $s=\sigma_c$.

(iv) Si $a_n=\frac{1}{(\log n)^2}$, alors $\sigma_c=1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(\log n)^2 n^s}$ converge au point $s=\sigma_c$.

COROLLAIRE 3.7. — *Une série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ d'abscisse converge σ_c converge sur le demi-plan $\mathscr{H}_{\sigma_c}=\{s\in\mathbf{C}\mid\mathfrak{Re}(s)>\sigma_c\}$, uniformément sur tout compact. Sa somme f est une fonction holomorphe sur $\mathscr{H}_{\sigma_c}$ dont les dérivées itérées s'obtiennent en dérivant la série initiale terme à terme :*

$$f^{(k)}(s)=(-1)^k\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n(\log n)^k}{n^s}$$

pour tout $k\in\mathbf{N}$ et tout $s\in\mathscr{H}_{\sigma_c}$.

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème de Weierstrass affirmant que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes est holomorphe. Puisque l'holomorphie est une propriété locale, il suffit d'appliquer ce théorème sur l'intérieur de tout disque fermé K contenu dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > \sigma_c$, et d'observer que la convergence sur K est uniforme puisque K est contenu dans un cône fermé $s_0 + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\theta_0} + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\theta_0}$ convenable (choisir s_0 réel tel que

$$\sigma_c < s_0 < \min_{s \in K} \mathfrak{Re}(s),$$

puis θ_0 tel que

$$0 < \theta_0 \leqslant \max_{s \in K} \operatorname{Arg}(s - s_0),$$

en observant que l'on a bien $\operatorname{Arg}(s - s_0) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $s \in K$ puisque K est contenu dans le demi-plan ouvert $\mathfrak{Re}(\cdot) > s_0$.) $\square$

REMARQUE 3.8 — Si l'on se borne à ne considérer que des valeurs réelles de la variable s, alors on peut établir aisément que la somme $f(s)$ de la série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le demi-plan $s > \sigma_c$. Il suffit bien entendu de considérer la cas $\sigma_c < +\infty$ et, en raisonnant par récurrence, de prouver que f est dérivable sur $]\sigma_c, +\infty[$, de dérivée f' vérifiant

$$f'(s) = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n \log n}{n^s}$$

pour tout $s > \sigma_c$. Étant donné $s > s_1 > \sigma_c$ dans $\mathbf{R}$, nous pouvons écrire

$$\frac{a_n \log n}{n^s} = \frac{\log n}{n^{s - s_1}} \cdot \frac{a_n}{n^{s_1}}. \tag{4}$$

La série des $a_n n^{-s_1}$ est convergente par hypothèse (puisque $s_1 > \sigma_c$) tandis que la suite de terme général $\frac{\log n}{n^{s-s_1}}$ tend vers 0 et est décroissante à partir d'un certain rang puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \frac{\log u}{u^a} = \frac{1 - a \log u}{u^{a+1}} < 0$$

dès que $u > e^{1/a}$. On en déduit la convergence de la série de terme général (4) (par transformation d'Abel, cf. Proposition 3.1) pour tout $s > \sigma_c$. Cette convergence est en outre uniforme sur tout intervalle $[s_1, +\infty[$ avec $s_1 > \sigma_c$ en vertu de la proposition précédente, donc f est dérivable sur $]\sigma_c, +\infty[$ et $f'(s)$ est la somme de la série des $a_n (\log n) n^{-s}$.

(1.2) Ce qui précède suffit à établir l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction ζ au demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. Nous approfondirons cela au chapitre suivant.

EXEMPLE 3.9 — Considérons la série de Dirichlet

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

qui est convergente pour $s > 0$ (série alternée) et divergente pour $s \leqslant 0$ (le terme général ne tend pas vers 0) ; son abscisse de convergence est donc $\sigma_c = 0$. Sa somme f est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. Pour $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathfrak{Re}(s) > 1$, la convergence absolue des séries permet de permuter les termes et donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots - \frac{2}{2^s} - \frac{2}{4^s} - \frac{2}{6^s} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \\
&= f(s).
\end{aligned}$$

En observant que l'on a

$$1-\frac{2}{2^s}=1-e^{(1-s)\log 2}=(s-1)\log 2+o(s-1)$$

au voisinage de 1, l'identité

$$(s-1)\zeta(s)=(s-1)\left(1-\frac{2}{2^s}\right)^{-1}f(s)$$

fait apparaître au membre de droite une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>0$, de valeur

$$\frac{1}{\log 2}f(1)=\frac{1}{\log 2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1$$

en $s=1$. Nous venons ainsi de prouver que la fonction ζ possède un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>0$ ayant un unique pôle en $s=1$; il s'agit d'un pôle simple, de résidu 1.

(1.3) L'abscisse de convergence d'une série Dirichlet $\sum\frac{a_n}{n^s}$ est étroitement relié au comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n.$$

Nous nous contenterons du résultat élémentaire suivant.

PROPOSITION 3.10. — *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'abscisse de convergence σ_c est finie ou égale à $-\infty$ (c'est-à-dire la série de Dirichlet converge en un point de $\mathbf{C}$*) ;*

(ii) la fonction sommatoire a une croissance polynomiale : il existe $c\geqslant 0$ tel que $S(x)=\mathrm{O}(x^c)$ quand x tend vers $+\infty$;

(iii) la suite (a_n) a une croissance polynomiale : il existe $d>0$ tel que $a_n=\mathrm{O}(n^d)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. On commence par établir l'équivalence des deux premières conditions. Supposons que la série de Dirichlet converge en $\sigma\in\mathbf{R}$; quitte à augmenter σ, on peut supposer $\sigma\neq -1$. On a alors $a_n n^{-\sigma}=\mathrm{O}(1)$ sur $\mathbf{N}^*$ et donc

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n=\mathrm{O}\left(\sum_{n\leqslant x}n^{\sigma}\right)=\mathrm{O}(x^{\sigma+1})$$

par comparaison série-intégrale (Lemme 1.4), en utilisant $\sigma\neq -1$.

Réciproquement, si $S(x)=\mathrm{O}(x^c)$, alors

$$a_n=S(n)-S(n-1)=\mathrm{O}(n^c)$$

et la série de Dirichlet est donc convergente en $s=c+2$.

L'équivalence entre les conditions (ii) et (iii) est immédiate. □

(1.4) Nous achevons cette première étude des séries de Dirichlet en définissant leur *abscisse de convergence absolue.*

Partant d'une série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$, nous pouvons considérer la série de Dirichlet $g(s)=\sum_{n\geqslant 1}|a_n|n^{-s}$ et lui appliquer ce qui précède.

DÉFINITION 3.11. — *L'*abscisse de convergence absolue *d'une série de Dirichlet* $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ *est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet* $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| n^{-s}$*. C'est l'unique élément de* $\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ *tel que la série* $\sum_{n\geqslant 1}|a_n|n^{-s}$ *soit convergente sur* $]\sigma_a,+\infty[$ *et divergente sur* $]-\infty,\sigma_a[$.

LEMME 3.12. — *L'abscisse de convergence* σ_c *et l'abscisse de convergence absolue* σ_a *d'une série de Dirichlet vérifient les inégalités*

$$\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1.$$

Démonstration. L'inégalité $\sigma_c \leqslant \sigma_a$ est claire puisque la convergence absolue implique la convergence. Si $s > s_0 > \sigma_c$, alors

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{o}(1)$$

et

$$\frac{a_n}{n^{s+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1+s-s_0}}\right),$$

donc la série $a_n n^{1+s-s_0}$ est absolument convergente. On en déduit

$$\sigma_a \leqslant 1 + s$$

et on conclut en faisant tendre s vers σ_c. □

EXEMPLE 3.12 — Là encore, tous les cas sont possibles :
- $\sigma_a = \sigma_c = -\infty$ si $a_n = \frac{1}{n!}$;
- $\sigma_a = \sigma_c = +\infty$ si $a_n = n!$;
- $\sigma_c = \sigma_a = 1$ si $a_n = 1$;
- $\sigma_c = 0$ et $\sigma_a = 1$ si $a_n = (-1)^{n+1}$.

En général, une série de Dirichlet est donc divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_c$, convergente mais non absolument convergente sur la bande $\sigma_c < \mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_a$, de largeur au plus 1, et absolument convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re} > \sigma_a$.

3.2. Les séries de Dirichlet des fonctions arithmétiques

(2.1) Comme nous l'avons dit, les séries de Dirichlet sont naturellement les séries génératrices des fonctions arithmétiques. Pour $f \in \mathscr{A}$, posons

$$L_f(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Si f est à croissance polynomiale, alors l'abscisse de convergence de L_f est dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ (Proposition 3.10). Nous noterons σ_f l'abscisse de convergence *absolue* de L_f.

PROPOSITION 3.13. — *Si* $f, g \in \mathscr{A}$ *sont deux fonctions arithmétiques telles que* $\sigma_f, \sigma_g < +\infty$*, alors* $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$ *et*

$$L_{f*g}(s) = L_f(s) L_g(s).$$

Démonstration. Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $a = \mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_g)$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{|f*g(n)|}{|n^s|} &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}\left|\sum_{uv=n} f(u)g(v)\right| \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\sum_{uv=n} \frac{|f(u)|}{u^a}\frac{|f(v)|}{v^a} \\ &\leqslant \left(\sum_{u\geqslant 1}\frac{|f(u)|}{u^a}\right)\left(\sum_{v\geqslant 1}\frac{|g(v)|}{v^a}\right).\end{aligned}$$

Cela montre que $L_{f*g}(s)$ converge absolument si $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$, donc $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$. Sous cette hypothèse, les inégalités précédentes deviennent des égalités lorsqu'on omet les modules puisque la convergence absolue permet de regrouper les termes à notre guise. □

COROLLAIRE 3.14. — *Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible et si $\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}} < +\infty$, alors*

$$L_f(s)L_{f^{(-1)}}(s) = 1$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$. En particulier, $L_f(s)$ ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$.

EXEMPLE 3.15 — 1. On a $L_1(s) = \zeta(s)$ et $\sigma_1 = 1$. L'inverse de 1 est la fonction de Möbius, qui vérifie $\sigma_\mu \leqslant 1$ puisque $|\mu(n)| \leqslant 1$ pour tout n. Comme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|\mu(n)|}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}$$

diverge, il vient $\sigma_\mu = 1$. On en déduit que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, ainsi que l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

2. On sait que la fonction d comptant le nombre de diviseurs d'un entier vérifie $d = 1*1$. On a donc $\sigma_d \leqslant 1$, puisque $\sigma_1 = 1$, puis $\sigma_d = 1$ puisque

$$\Sigma_{n\geqslant 1}\frac{d(n)}{n} \geqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tels que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

3. On sait que $\varphi = \mathrm{id} * \mu$. Comme $L_{id}(s) = \zeta(s-1)$ a une abscisse de converge absolue égale à 2, $\sigma_\varphi \leqslant 2$. Il s'agit en fait d'une égalité puisque

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varphi(n)}{n}^2 \geqslant \sum_p \frac{p(p-1)}{p^2}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 2$.

4. Considérons finalement la fonction de von Mangolt $\Lambda = \mu * \log$. On a $\sigma_\Lambda \leqslant 1$ et $\sigma_\Lambda = 1$ par divergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}.$$

Puisque $L_{\log}(s) = -\zeta(s)$ et $L_\mu(s) = \zeta(s)^{-1}$, nous obtenons l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

(2.2) Le résultat suivant montre qu'une fonction arithmétique à croissance polynomiale est entièrement déterminée par sa série de Dirichlet. Il permet en particulier d'établir des identités entre fonctions arithmétiques à partir de calculs sur leurs séries de Dirichlet.

PROPOSITION 3.16. — *Soit $f, g \in \mathscr{A}$ deux fonctions arithmétiques à croissance polynomiale. S'il existe $c > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ tel que $L_f(s) = L_g(s)$ pour tout $s \in [c, +\infty[$, alors $f = g$.*

Démonstration. En posant $h = f - g$, nous avons $\sigma_h \leqslant \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ et $L_h(s) = 0$ pour tout $s \in [c, +\infty[$. Supposons que h ne soit pas identiquement nulle et désignons par n_0 le plus petit entier n tel que $h(n) \neq 0$. L'hypothèse nous permet d'écrire

$$\frac{h(n_0)}{n_0^{c+t}} = -\sum_{n\geqslant n_0+1} \frac{h(n)}{n^{c+t}}$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. En observant que l'on a

$$\frac{n_0^{c+t}}{n^{c+t}} = \frac{n_0^c}{n^c} \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^t \leqslant \frac{n_0^c}{n^c} \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, il vient

$$|h(n_0)| \leqslant n_0^c \left(\sum_{n\geqslant n_0+1} \frac{|h(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. Nous en déduisons $h(n_0) = 0$ en faisant tendre t vers $+\infty$, ce qui contredit notre hypothèse ; la fonction h est donc identiquement nulle, c'est-à-dire $f = g$. □

COROLLAIRE 3.17. — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique à croissance polynomiale. Si f n'est pas identiquement nulle, il existe un nombre réel c tel que $L_f(s)$ ne s'annule pas sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.*

Démonstration. Supposons que n_0 soit le plus petit entier tel que $f(n_0) \neq 0$. Si $s \in \mathbf{C}$ est un nombre complexe tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et $L_f(s) = 0$, nous pouvons écrire comme dans la démonstration précédente

$$|f(n_0)| \leqslant n_0^{\mathfrak{Re}(s)} \sum_{n\geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^{\mathfrak{Re}(s)}} = n_0^c \left(\sum_{n\geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^{\mathfrak{Re}(s)-c}$$

pour tout $c > \sigma_f$ et donc $\mathfrak{Re}(s)$ est majorée en fonction de n_0 et c. □

(2.3) Sans surprise, enfin, les séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives ont des propriétés particulières.

PROPOSITION 3.18. — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique* multiplicative *à croissance polynomiale.*

(i) *Pour tout nombre premier p, la série restreinte*

$$L_{f,p}(s) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}$$

converge absolument uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$.

(ii) *La suite des produits $\prod_{p \leqslant N} L_{f,p}(s)$ converge uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et*

$$L_f(s) = \prod_p L_{f,p}(s).$$

(iii) *S'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\sum_p \sum_{m \geqslant 1} \frac{|f(p^m)|}{p^{mc}} < +\infty,$$

alors $\sigma_f \leqslant c$ et

$$L_f(s) = \prod_p L_{f,s}(s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ de partie réelle strictement supérieure à c.

Démonstration. (i) Il suffit d'écrire

$$\sum_{m \geqslant 0} \left| \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{|f(n)|}{n^c} < +\infty$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c > \sigma_f$.

(ii) Notons $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à N.

$$\prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} \left(\sum_{m \geqslant 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{\nu : \mathscr{P}_{\leqslant N} \to \mathbf{N}} \prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} \frac{f(p^{\nu(p)})}{p^{\nu(p)s}} = \sum_{\nu : \mathscr{P}_{\leqslant N} \to \mathbf{N}} \frac{f(n_\nu)}{n_\nu^s},$$

où l'on a posé $n_\nu = \prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} p^{\nu(p)}$. Lorsque ν parcourt l'ensemble des applications de $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ dans $\mathbf{N}$, n_ν décrit l'ensemble des entiers strictement positifs dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à N. Puisque ceux-ci contiennent certainement tous les entiers inférieurs à N, nous en déduisons

$$\left| L_f(s) - \prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s) \right| \leqslant \sum_{n > N} \frac{|f(n)|}{n^c},$$

ce qui établit la convergence de $\prod_{p \in \mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s)$ vers $L_f(s)$, uniformément sur tout demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.

(iii) Cette hypothèse équivaut à la convergence du produit infini

$$\prod_p \left(1 + \sum_{m \geqslant 1} \left| \frac{f(p^m)}{p^{mc}} \right| \right).$$

En raisonnant comme au point (ii), la multiplicativité de f entraîne la majoration

$$\sum_{n \leqslant N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{m \geqslant 1} \left| \frac{f(p^m)}{p^{mc}} \right| \right)$$

pour tout $N \geqslant 2$, et donc la convergence de $L_f(s)$, uniformément sur le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$. On a donc $\sigma_f \leqslant c$, et $L_f(s) = \prod_p L_{f,p}(s)$ d'après le point (ii). $\square$

REMARQUE 3.19 — Lorsque f est *complètement multiplicative*, c'est-à-dire vérifie $f(mn) = f(m)f(n)$ pour *tous* entiers m et n, la formule du point (ii) s'écrit plus simplement sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

C'est une généralisation de la formule du produit d'Euler.

EXEMPLE 3.20 — On a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

pour tout complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

4. La fonction zêta de Riemann

Nous amorçons dans ce chapitre l'étude de la fonction ζ en établissant l'existence d'un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ satisfaisant à une équation fonctionnelle associée à la réflexion d'axe la droite $\mathfrak{Re}(\cdot) = \frac{1}{2}$.

La fonction Γ d'Euler joue un rôle important dans l'étude de ζ et constitue en soit un sujet digne d'intérêt...

4.1. La fonction Gamma d'Euler

Euler observa que l'identité

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t,$$

valable pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et que l'on démontre aisément par récurrence et intégration par parties, permet d'étendre le domaine de définition de la fonction factorielle : le second membre garde en effet un sens lorsque l'entier n est remplacé par n'importe quel nombre réel dans $]-1, +\infty[$.

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Remarque 4.1. — *On a immédiatement*

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

si l'on connaît la valeur de l'intégrale de Gauss[4].

Proposition 4.2. — (i) *La fonction* Γ *ainsi définie est* holomorphe *sur le demi-plan* $\mathfrak{Re}(z) > 0$, *sur lequel :*

(i) *elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \; ; \tag{6}$$

(ii) *elle se prolonge de manière unique en une fonction méromorphe*[5] *sur* $\mathbf{C}$, *encore notée* Γ *;*

(iii) *la fonction* Γ *satisfait l'équation fonctionnelle (2) sur* $\mathbf{C}$. *Ses pôles, tous simples, sont les entiers négatifs, et le résidu de* Γ *en* $-n$ *est* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

---

4. C'est un calcul que l'on effectue classiquement en exprimant le carré de cette intégrale sous la forme d'une intégrale double, puis en passant en coordonnées polaires. On peut également déduire ce résultat de la *formule des compléments* pour la fonction Γ, voir la remarque 5.8.

5. Rappelons qu'une *fonction méromorphe* sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ est une fonction définie sur le complémentaire dans U d'un ensemble E de points isolés, dont chacun est un *pôle* pour f : pour tout $z_0 \in E$, il existe un entier $k \geqslant 0$ et une fonction holomorphe h sur un voisinage V de z_0 dans U tels que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$.

Démonstration. (i) Il s'agit d'une application du *théorème d'holomorphie sous l'intégrale* :

- la fonction
$$\mathbf{R}\times\mathbf{C},\quad (t,z)\mapsto e^{-t}t^{z-1}=e^{-t+(z-1)\log t}$$
est continue, donc mesurable et intégrable par rapport à t sur tout segment, et elle est holomorphe par rapport à la seconde variable;
- pour tous nombres réels $0<a<b$ et tout nombre complexe $z\in\mathbf{C}$ tel que $a\leqslant\mathfrak{Re}(z)\leqslant b$, la majoration
$$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{\mathfrak{Re}(z)-1}\leqslant\begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t\in]0,1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t\in[1,+\infty[\end{cases}$$
fournit une domination *uniforme* en z dans la bande verticale $\mathscr{B}_{a,b}=\{z\in\mathbf{C}\mid a\leqslant\mathfrak{Re}(z)\leqslant b\}$ par une fonction intégrale sur $[0,+\infty[$.

Sous ces hypothèses, le théorème d'holomorphie sous l'intégrale fournit l'holomorphie de la fonction Γ sur l'intérieur de $\mathscr{B}_{a,b}$, et donc sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(z)>0$ puisqu'il s'agit d'une propriété *locale*.

(ii) L'*unicité* du prolongement méromorphe se déduit directement du *principe du prolongement analytique*[6]. En effet, si f et g sont deux fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ qui coïncident avec Γ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot)>0$, alors l'ensemble E de leurs pôles est discret et f et g sont holomorphes sur l'ouvert $\mathbf{C}\setminus E$, qui est connexe; puisqu'elle coïncident (avec Γ) sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot)>0$, on obtient $f=g$. Cette unicité justifie l'abus de notation consistant à utiliser Γ pour désigner le prolongement méromorphe obtenu.

Existence — Étant donné un entier $n\geqslant 1$, on considère la fonction Γ_n définie sur le demi-plan $\Omega_n=\{z\in\mathbf{C}\mid\mathfrak{Re}(z)>-n\}$ par
$$\Gamma_n(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$
C'est une fonction méromorphe sur ce demi-plan, ayant des pôles simples en $0,-1,\ldots,-(n-1)$. Les fonctions Γ_{n+1} et Γ_n coïncident sur Ω_n puisque
$$\Gamma_{n+1}(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\Gamma_n(z)$$
pour tout $z\in\Omega_n\setminus\{0,-1,\ldots,-(n-1)\}$ en vertu de l'équation fonctionnelle de Γ. Il existe donc une unique fonction F sur $\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$ telle que $F(z)=\Gamma_n(z)$ pour tous $n\in\mathbf{N}$ et $z\in\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$ vérifiant $\mathfrak{Re}(z)>-n$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec un pôle simple en tout entier négatif.

(iii) L'identité $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ entre fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$ est vérifiée sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z)>0$, donc également sur tout $\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$ en vertu du principe du prolongement analytique. Considérons finalement $n\in\mathbf{N}$ et écrivons
$$\Gamma(z)=\Gamma_{n+1}(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$
pour tout $z\in\Omega_{n+1}\setminus\{0,-1,\ldots,-n\}$. Comme $\Gamma(1)=1$, nous en déduisons l'équivalent
$$\Gamma(z)\sim\frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)(z+n)}=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{z+n}$$
au voisinage de $-n$. Ceci prouve que Γ admet un pôle simple en $-n$, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$. □

6. Soit f et g deux fonctions sur un ouvert *connexe* U de $\mathbf{C}$. Si f et g coïncident sur une partie A de U *admettant un point d'accumulation* dans U, alors $f=g$.

Le prolongement méromorphe de la fonction Γ que nous venons de construire à partir de l'équation fonctionnelle peut s'obtenir différemment, en écrivant explicitement une fonction méromorphe qui coïncide avec Γ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$ (voir également l'exercice? sur la fiche TD4).

Pour ce faire, on commence par écrire

$$e^{-t} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. La domination

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \exp n\left(-\frac{t}{n}\right) = e^{-t}$$

vaut pour $n > |t|$ en vertu de l'inégalité $\log(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$. Le théorème de convergence dominée nous permet donc d'écrire :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathbf{1}_{[0,n]}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} n^z\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u$$

pour tout nombre complexe z tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$. On définit classiquement la *fonction Bêta d'Euler* en posant

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,\mathrm{d}u$$

pour x, y dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. En utilisant de façon répétée l'identité

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$$

(cf. le lemme ci-dessous), il vient

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{z+n}B(n,z)n^z = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(z+1)\cdots(z+n)}B(1,z)n^z,$$

d'où au final

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{7}$$

puisque $B(1,z) = 1$.

LEMME 4.3. — *Pour tous nombres complexes x, y tels que $\mathfrak{Re}(x), \mathfrak{Re}(y) > 0$,*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

Démonstration. Une intégration par parties conduit à

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-u)^x u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \frac{x}{y}\int_0^1 (1-u)^{x-1}u^y\,\mathrm{d}u = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

En développant $(1-u)^y = (1-u)^{y-1}(1-u)$, il vient

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y).$$

La conclusion s'obtient en combinant ces deux identités. □

L'identité (3) s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}n^{-z} \qquad (\mathfrak{Re}(z) > 0). \tag{8}$$

Au membre de droite figure une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous allons voir que la convergence est uniforme sur tout compact, et donc que la limite est holomorphe sur $\mathbf{C}$; c'est l'expression de Γ que l'on souhaitait obtenir.

PROPOSITION 4.4 (FORMULE DE GAUSS) — *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}\, n^{-z}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact. En particulier, la fonction Γ *ne s'annule en aucun point de* $\mathbf{C}$.

Démonstration. La stratégie de démonstration est très classique : on établit tout d'abord que le membre de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ en prouvant que la convergence est uniforme sur tout compact, puis, en notant Z l'ensemble (discret) des zéros de Γ, on observe que les deux membres sont des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C}\setminus Z$ qui, comme on vient de le voir, coïncident sur l'ouvert non vide $\mathfrak{Re}(z) > 0$; l'égalité vaut alors sur $\mathbf{C}\setminus Z$ en vertu du principe du prolongement analytique. Le membre de droite étant holomorphe sur $\mathbf{C}$, on en déduit immédiatement $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$, posons

$$u_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}.$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ ayant un zéro simple en $0, -1, \ldots, -n$. Écrivons

$$u_n(z) = n^{-z} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)$$

et

$$n^{-z} = e^{-z\log n} = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) - \log(k)\right) = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\cdot \exp\left(z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

(le second facteur du membre de droite compense le terme d'indice $k = n$ dans la somme), d'où

$$u_n(z) = z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot e^{-z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Le facteur $e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ tend vers 1 uniformément sur tout compact, donc nous pouvons le négliger dans ce qui suit. Fixons $R > 0$ et z tel que $|z| \leqslant R$. Pour $k > R$, il vient

$$\left|\frac{z}{k}\right| < 1, \text{ et donc } 1 + \frac{z}{k} = e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right)},$$

en définissant $\log(1+x)$ par la série entière usuelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Ceci permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} &= z \prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot \prod_{R<k\leqslant n} e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \\ &= z \prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} e^{v_{R,n}(z)} \end{aligned}$$

en posant

$$v_{R,n}(z) = \sum_{R<k\leqslant n} \left(\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Il existe un nombre $C(R) > 0$ tel que

$$|\log(1+x) - x| \leqslant C(R)|x|^2 \text{ pour tout } x \in \mathbf{C} \text{ tel que } |x| \leqslant \max_{k\in\mathbf{N},\, k>R} \frac{R}{k} = \frac{R}{R+1}.$$

On en déduit la majoration

$$\begin{aligned}|v_{R,n}(z)| &\leqslant \sum_{R<k\leqslant n}\left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{R<k\leqslant n}\left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-\frac{z}{k}\right|+|z|\sum_{R<k\leqslant n}\left|\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\right| \\ &\leqslant (C(R)R^2+R)\cdot\sum_{R<k\leqslant n}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

pour tout $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z|\leqslant R$. Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc ceci établit la convergence uniforme de la suite $(v_{R,n})$ sur le disque fermé $D(0,R)$.

Nous avons obtenu ainsi la convergence uniforme de la suite (u_n) sur $D(0,R)$ vers une fonction u_∞ s'écrivant

$$u_\infty(z)=z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}e^{v_{R,\infty}(z)}$$

pour tout $z\in D(0,R)$. Cette fonction est holomorphe sur l'intérieur de $D(0,R)$, avec un zéro simple en chacun des points $0,-1,\dots,-\lfloor R\rfloor$. Puisque R a été choisi arbitrairement, la fonction u_∞ est donc holomorphe sur $\mathbf{C}$, avec un zéro simple en chaque entier négatif. □

COROLLAIRE 4.5 (FORMULE DU PRODUIT DE WEIERSTRASS) — *Pour tout $z\in\mathbf{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Démonstration. Il suffit d'écrire, comme dans la démonstration de la proposition précédente,

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}\,n^{-z}=e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}=e^{za_n}z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

avec

$$a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n=\gamma+\mathrm{o}(1).$$

□

REMARQUE 4.6. — *La non-annulation de Γ sur $\mathbf{C}$ constituera une information importante dans l'étude des singularités (zéros et pôles) du prolongement méromorphe de la fonction ζ sur $\mathbf{C}$.*

Outre l'équation fonctionnelle, la fonction Γ satisfait à plusieurs identités remarquables. Parmi celles-ci, en voici qui joueront un rôle important par la suite.

PROPOSITION 4.7 (FORMULE DES COMPLÉMENTS) — *Pour tout $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{N}$,*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle et la formule du produit de Weierstrass permettent d'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=-\frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)}=z\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{z}{k}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right)=z\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).$$

On remarque que le produit infini figurant à droite est uniformément convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$ en vertu de l'estimation $\log\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)=\frac{z^2}{k^2}+z^4\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)$ et de la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ (cf. la démonstration de la formule de Gauss ci-dessus).

La conclusion provient immédiatement de la *formule du produit* pour la fonction sinus (Euler) : pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

(voir les exposés pour une démonstration).

□

REMARQUE 4.7. — *En faisant $z=\frac{1}{2}$, la formule des compléments fournit*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi},\quad \textit{et donc}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Vu la remarque 5.1, ce calcul fournit donc une manière de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

PROPOSITION 4.8 (FORMULE DE DUPLICATION) — *Pour tout $z\in\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$,*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)=2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z).$$

Démonstration. En vertu de la formule de Gauss, le membre de gauche est la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$\begin{aligned}\frac{n^{\frac{z}{2}}n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)}\cdot\frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} &= \frac{2^{2n+2}(n!)^2n^{z+\frac{1}{2}}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)}\\ &= \frac{(n!)^2n^{z+\frac{1}{2}}2^{2(n+1)}}{(2n+1)!(2n+1)^z}\cdot\frac{(2n+1)!(2n+1)^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)}.\end{aligned}$$

On a

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^z\sim 2^{-z}$$

et, par la formule de Stirling,

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sim\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{(2(2n+1)\pi}}\sim\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+1}n^{-\frac{1}{2}}e\sqrt{\pi}\sim 2^{-(2n+1)}n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi},$$

donc

$$\frac{n^{\frac{z}{2}}n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)}\cdot\frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}\sim 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

La conclusion en découle immédiatement en faisant tendre n vers $+\infty$. □

REMARQUE 4.9. — *En faisant $z=1$, on retrouve de nouveau*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

4.2. Prolongement de la fonction zêta : première méthode

Commençons par définir les *nombres de Bernoulli* (voir également les exposés).

La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec des pôles simples le long de $2i\pi\mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Elle se prolonge par continuité en 0 puisque $e^z - 1 \sim z$, donc elle est holomorphe au voisinage de 0. Son développement en série entière à l'origine s'écrit

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$

avec $B_n \in \mathbf{R}$. La série entière obtenue a pour rayon de convergence 2π (la distance de l'origine au pôle le plus proche).

Le nombre B_n est par définition le *n-ième nombre de Bernoulli.* Il s'agit manifestement d'un nombre *rationnel* en vertu des règles de calcul sur les séries entières.

Le calcul des premiers nombres de Bernoulli s'effectue facilement :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1} &= \left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots\right)^{-1} \\
&= 1-\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots\right)^{-1}+\ldots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4}\right)z^2+\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{8}\right)z^3+\ldots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}+0\cdot z^3+\ldots
\end{aligned}$$

donc

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0.$$

PROPOSITION 4.10. — *Les nombres de Bernoulli sont rationnels et $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Démonstration. La première assertion découle immédiatement de la rationnalité des coefficients de la série exponentielle et des règles de calcul sur les séries entières. Pour obtenir la seconde, il suffit de vérifier que la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{e^z-1}+1\right) = \frac{ze^z}{2(e^z-1)}$$

est *paire*, ce qui est immédiat. □

En poussant plus loins les calculs, on obtient

$$B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{12},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}\ \ldots$$

Nous en savons assez pour construire un prolongement méromorphe de la fonction zêta sur $\mathbf{C}$. Pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = n^s \int_0^\infty e^{-nt} t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

par le changement de variable $t \leftarrow nt$, donc
$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nt} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
En sommant, nous en déduisons, pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$:
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \left(\sum_{n\geqslant 1} e^{-nt}\right) t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \frac{t^s}{e^t-1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
L'interversion de l'intégrale et de la somme est ici justifiée par le théorème de convergence monotone : il s'agit d'une série de fonctions positives dont la somme est intégrable (en 0, cela découle de l'estimation $t^{s-1}e^t - 1 \sim t^{s-2}$).

Pour aller plus loin, nous allons traiter séparément les bornes 0 et ∞ :
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^s}{e^t-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^s}{e^t-1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
Dans le membre de droite, la seconde intégrale définit une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}$: il suffit en effet d'invoquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec la domination
$$\left|\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\right| \leqslant \frac{t^a}{e^t-1}$$
pour tout s dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \leqslant a$. Dans la première intégrale, nous pouvons remplacer $\frac{t}{e^t-1}$ par son développement en série entière en 0 et intervertir la somme et l'intégrale puisque le segment $[0,1]$ est contenu dans l'intérieur du disque de convergence $D(0,2\pi)$:
$$\int_0^1 \frac{t^s}{e^t-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \int_0^1 t^{n+s-2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)}.$$
La série de fonctions obtenue est normalement convergente sur tout compact K de $\mathbf{C} \setminus \{1,0,-1,-2,\ldots\}$: en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $|s-(1-n)| \geqslant \delta$ pour tout $s \in K$ et $n \in \mathbf{N}$, et
$$\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{n\geqslant 0} \frac{|B_n|}{n!}$$
est fini puisque 1 est à l'intérieur du disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$. La somme de cette série de fonctions holomorphes est donc elle-même holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{1,0,-1,-2,\ldots\}$, et même méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec (au plus) un pôle simple en 1 et chaque entier négatif.

Au final, l'identité
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)} + \int_1^\infty \frac{t^s}{e^t-1} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{9}$$
valable sous la condition $\mathfrak{Re}(s) > 1$, fournit bien un prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbf{C}$: le membre de droite est une fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$, donc $\Gamma^{-1} f$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui coïncide avec ζ sur son demi-plan de définition.

L'étude des singularités de ce prolongement est aisée : celles du membre de droite de (9) sont des pôles simples :

- en 1, de résidu $B_0 = 1$;
- en 0, de résidu $B_1 = -\frac{1}{2}$;
- en -1, de résidu $\frac{B_2}{2} = \frac{1}{12}$;
- et en chaque entier strictement négatif *pair* $-2n$, de résidu $\frac{B_{2n}}{(2n)!}$ (rappelons que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$).

Comme Γ a un pôle simple en chaque entier négatif $-n$, de résidu $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, on en déduit que (le prolongement de) ζ :

- possède une unique singularité, qui est un pôle simple en 1 ;
- s'annule en tout entier strictement négatif pair.

En outre,

$$\mathrm{Res}_1 \zeta = 1, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2} \ \text{ et } \ \zeta(1-2n) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}(-1)^{2n-1}(2n-1)! = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

REMARQUE 4.11. — *Plus uniformément, nous avons obtenu :*

$$\zeta(-n) = -\frac{B_n}{n+1}$$

pour tout $n \geqslant 1$. *Notons également que les valeurs* $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ *et* $\zeta(-1) = \frac{1}{12}$ *peuvent s'écrire de manière provocatrice*

$$1+1+1+\ldots = -\frac{1}{2}$$

et

$$1+2+3+4+\ldots = \frac{1}{12},$$

où les membres de gauche sont les séries divergentes obtenues en évaluant terme à terme $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ *en* 0 *et en* 1. *Ces deux identités sont à comprendre de la façon suivante : étant donnée une suite* $\underline{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ *de nombres complexes, considérons la série de Dirichlet* $D(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ *; en supposant*

(a) que $D(s)$ *a une abscisse de convergence finie ;*

(b) et que $D(s)$ *admet un prolongement méromorphe sur un demi-plan contenant* 0 *et holomorphe en* 0

cela fait sens de poser

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \lim_{s\to 0} D(s).$$

Il est clair que les suites $\underline{a}$ *vérifiant les deux conditions ci-dessus forment un espace vectoriel complexe et que l'application* $\underline{a} \mapsto \Sigma_D(\underline{a})$ *est linéaire. En outre, si* $a_n \geqslant 0$ *et si la série* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *associée à la suite* $\underline{a}$ *est convergente, alors*

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

En effet, cette hypothèse garantit que l'abscisse de convergence de $D(s)$ *est inférieure à* 0, *et même strictement négative sous l'hypothèse (b) en vertu du* lemme de Landau *(Cf. TD4, exercice 4). On a alors*

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \lim_{s\to 0} D(s) = D(0) = \sum_{n\geqslant 1} a_n$$

par convergence uniforme de $D(s)$ *au voisinage de* 0. *L'opérateur* Σ_D *est un exemple de procédé de sommation.*

4.3. Prolongement de la fonction zêta : deuxième méthode

(4.3.1) Préliminaires d'analyse de Fourier

LEMME 4.12. — *Soit f une fonction continue sur* $\mathbf{R}$, *périodique de période* 1. *Posons*

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$. Si la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, alors

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Posons $g(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Il s'agit de la somme d'une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbf{R}$, donc g est continue et vérifie

$$\int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = c_n$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La fonction $f - g$ est continue, 1-périodique et à coefficients de Fourier identiquement nuls, donc est orthogonale à toutes les fonctions $(t \mapsto e^{2i\,\pi nt})$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$; ces dernières formant une base hilbertienne, on en déduit $f - g = 0$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$, d'où $f - g = 0$ presque partout puis, par continuité, $f = g$. □

LEMME 4.13 (TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE GAUSSIENNE) — *Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,*

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}.$$

Démonstration. En complétant le carré dans l'exponentielle, nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nous allons calculer l'intégrale apparaissant au membre de droite à l'aide du théorème des résidus. Fixons $R > 0$ et considérons le chemin γ_R constitué par le bord du rectangle de sommets $-R, R, R + i\xi$ et $-R + i\xi$ parcouru dans le sens indirect. La fonction $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$, donc

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

On a d'autre part :

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x + i\int_0^{\xi} e^{-\pi(R+it)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{R}^{-R} e^{-\pi(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x + i\int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+it)}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\left|\int_0^{\xi} e^{-\pi(\pm R+it)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |\xi| \sup_{|t|\leqslant|\xi|} e^{-\pi(R^2-t^2)} \leqslant |\xi| e^{-R^2},$$

donc, en faisant tendre R vers $+\infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il est bien connu que l'intégrale de droite est égale à 1 (on calcule son carré en appliquant le théorème de Fubini et en passant en coordonnées polaires). □

PROPOSITION 4.14 (FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON) — *Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que :*

(i) la famille $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ soit sommable;

(ii) la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ soit uniformément convergente sur $[0,1]$.

On a :
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

Démonstration. Posons $F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La condition (ii) garantit que F est une fonction continue et 1-périodique ; en outre, elle permet d'écrire
$$c_n(F) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(n).$$
La famille $(c_n(F))_{n\in\mathbf{Z}}$ étant supposée sommable, nous pouvons appliquer le lemme précédent : pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx},$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\,\pi nx}.$$
Il reste à évaluer les deux membres en 0 pour obtenir l'identité souhaitée :
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$
□

COROLLAIRE 4.15 (ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA FONCTION THÊTA) — *Posons, pour tout $t \in \mathbf{R}_{>0}$,*
$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$
On a, pour tout $t > 0$,
$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\theta(t).$$

Démonstration. Étant donné $t > 0$, la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ et
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 t}e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi y^2}e^{2i\pi y\frac{\xi}{\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{\xi^2}{t}}$$
en vertu du lemme 14. La famille des $\widehat{f}(n)$ est manifestement sommable et la série des $f(x+n)$ converge normalement sur $[0,1]$ puisque
$$|f(x+n)| = e^{-\pi t(x+n)^2} \leqslant e^{-\pi t(n^2-2n)} = \mathrm{o}\left(e^{-\pi t\frac{n^2}{2}}\right)$$
sur ce segment. Nous pouvons donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f, ce qui conduit à l'identité
$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$
□

(4.3.2) Prolongement méromorphe et équation fonctionnelle de ζ

THÉORÈME 4.16. — *Soit Λ la fonction définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ par*

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant pour uniques singularités des pôles simples en 0 et 1, de résidus respectifs -1 et 1. En outre, ce prolongement satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in \mathbf{C}, \quad \Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$,

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{s}{2}}n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u}u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

L'interversion de la somme et de l'intégrale se déduit du *théorème de Fubini* sur l'espace produit $\mathbf{Z}\times\mathbf{R}_{>0}$, muni du produit de la mesure de comptage et de la mesure de Lebesgue. En effet, en posant $\sigma = \mathfrak{Re}(s)$, il vient :

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}\left|e^{-n^2\pi u}u^{\frac{s}{2}-1}\right|\,\mathrm{d}u = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi u}u^{\frac{\mathfrak{Re}(s)}{2}-1}\,\mathrm{d}u = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\zeta(\sigma) < \infty,$$

donc

$$\Lambda(s) = \int_0^{+\infty}\sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 u}u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Nous reconnaissons la fonction θ de Jacobi :

$$\Lambda(s) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{1}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Dans le membre de droite, l'intégrale sur $[1,+\infty[$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout en entier : c'est une application du théorème d'holomorphie sous l'intégrale, en utilisant la domination

$$|\theta(u)-1|\cdot|u^{\frac{s}{2}-1}| \leqslant \frac{u^{\frac{\mathfrak{Re}(s)}{2}-1}}{e^{\pi u}-1} = \mathrm{O}\left(e^{-\pi\frac{u}{2}}\right)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$. L'intégrale sur $[0,1]$ est plus problématique : on a $\theta(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$ au voisinage de 0 puisque

$$\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\theta\left(\frac{1}{u}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$$

en vertu de l'équation fonctionnelle, donc l'intégrabilité en 0 ne vaut que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ permet cependant de réécrire cette intégrale sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\theta\left(\frac{1}{t}\right)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}\theta(t)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)u^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(u^{\frac{1-s}{2}} - u^{-\frac{s}{2}}\right)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)u^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale obtenue définit de nouveau une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous avons ainsi obtenu l'identité

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\theta(u)-1)\left(u^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}}\right)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le membre de droite est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les seules singularités sont deux pôles simples en 0 et 1, de résidus respectifs -1 et 1, et qui est invariante par l'involution $s \mapsto 1-s$. □

L'équation fonctionnelle

$$\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

peut se aisément se réécrire de façon à relier $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. En écrivant $\frac{1-s}{2} = 1 - \frac{s+1}{2}$, la formule des compléments et la formule de duplication conduisent à

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s)} \\ &= \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)},\end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

et

$$\zeta(s) = 2^{s}\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$.

COROLLAIRE 4.17. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}.$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle fournit l'identité

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n) = (-1)^{n+1}2^{1-2n}\pi^{-2n}(2n-1)!\zeta(2n).$$

On connaît par ailleurs les valeurs de zêta aux entiers négatifs :

$$\zeta(-k) = (-1)^{k+1}\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$, donc

$$\zeta(1-2n) = \frac{B_{2n}}{2n}.$$

La formule

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}$$

en découle immédiatement. □

COROLLAIRE 4.18. — *La fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont l'unique singularité est un pôle simple en 1, de résidu 1. Elle s'annule en tous les entiers pairs strictement négatifs (les zéros* triviaux*). Ses autres zéros sont tous contenus dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathfrak{Re}(s) < 1\}$ et ils sont globalement préservés par les transformations $s \mapsto 1-s$ et $s \mapsto \overline{s}$.*

Démonstration. Le prolongement méromorphe de Λ et de Γ sur $\mathbf{C}$ donnent évidemment naissance à un prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbf{C}$:

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}\Lambda(s).$$

Le membre de droite est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$, et même sur $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque $\Lambda(s) = -\frac{1}{s}+\mathrm{O}(1)$ et $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} = \frac{s}{2}+\mathrm{O}(s^2)$ au voisinage de $s=0$. En outre, l'holomorphie de Λ sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ force la fonction zêta à s'annuler en tout entier strictement négatif pair puisque tel est le cas de la fonction holomorphe $s\mapsto\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

Pour aller plus loin, observons que la fonction zêta ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot)>1$ en vertu de l'identité

$$\zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

sur ce demi-plan (rappelons qu'il s'agit d'une reformulation de l'identité de convolution $\delta_1 = 1*\mu$). Comme la fonction Γ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ [7], on en déduit que

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

ne s'annule pas davantage pour $\mathfrak{Re}(s)>1$, et donc également pour $\mathfrak{Re}(s)<0$ en vertu de l'équation fonctionnelle. On en déduit que chaque entier strictement négatif pair est un zéro *simple* de ζ (ce serait sinon un zéro de Λ), et que ζ ne s'annule nulle part ailleurs sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)<0$. Comme Γ ne s'annule pas, les zéros non triviaux de ζ, c'est-à-dire de partie réelle dans $[0,1]$, sont précisément les zéros de Λ ; il sont donc invariants par la transformation $s\mapsto 1-s$ (symétrie de centre $\frac{1}{2}$). On a par ailleurs

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

pour tout $s\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque les fonctions ζ et $s\mapsto\overline{\zeta(\bar{s})}$ sont holomorphes sur cet ouvert connexe et coïncident sur l'intervalle réel $]1,+\infty[$, qui contient des points d'accumulations. On en déduit immédiatement que l'ensemble des zéros de ζ est stable par conjugaison complexe. Tout zéro non trivial $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ de ζ dans la bande critique $0\leqslant\sigma_0\leqslant 1$ vient donc accompagnés des zéros $\overline{s_0}, 1-s_0$ et $1-\overline{s_0}$. □

Bibliographie

[Hin] M. HINDRY, *Arithmétique*, Calvage & Mounet, 2008

[HW] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT, *An introduction to the Theory of Numbers*, sixth edition, Oxford University Press, 2008

[Ten] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Dunod, 2022

[TenWu] G. TENENBAUM et J. WU, *Théorie analytique et probabiliste des nombres : 307 exercices corrigés*, Belin, 2014

7. Rappelons que son inverse est holomorphe sur $\mathbf{C}$...

Table des matières