M1 Mathématiques générales et applications, 2022-23 Introduction à la théorie analytique des nombres
Université Lyon 1

CONTRÔLE PARTIEL DU 9 NOVEMBRE

Durée : 2 heures

Ce sujet est constitué de trois exercices indépendants.

On rappelle que la fonction de von Mangolt *est la fonction arithmétique définie par*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \textit{si } n > 1 \textit{ est une puissance d'un nombre premier } p; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que l'on note ψ *sa fonction sommatoire.*

On rappelle également la formule sommatoire d'Abel *: pour toute fonction arithmétique* a*, de fonction sommatoire* A*, et toute fonction* f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}_{>0}$*,*

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pour tous nombres réels $0 < y < x$*.*

Exercice 1 — Pour tout nombre réel $x \geqslant 2$, posons

$$P(x) = \prod_{p\leqslant x} p.$$

Démontrer que le théorème des nombres premiers est équivalent à l'assertion

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)^{1/x} = e.$$

Exercice 2 — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$c(n) = \mathrm{Card}\left\{(a,b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid \mathrm{ppcm}(a,b) = n\right\}.$$

1. Démontrer que la fonction arithmétique c est multiplicative.

   On pourra raisonner en termes de valuations p*-adiques.*

2. Démontrer que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$,

   $$c(n) = \mathrm{o}(n^\varepsilon)$$

   quand n tend vers $+\infty$.

3. Déterminer l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

   $$f(s) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{\mathrm{ppcm}(m,n)^s}.$$

4. Exprimer $f(s)$ à l'aide de la fonction zêta.

Exercice 3 — Pour tout nombre réel $x > 0$, posons

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n),$$

où μ désigne la fonction de Möbius. On se propose de démontrer que le théorème des nombres premiers implique l'estimation

$$M(x) = \mathrm{o}(x)$$

quand x tend vers $+\infty$.

1. Démontrer que l'on a :

   $$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \log n = M(x) \log(x) + \mathrm{O}(x)$$

   quand x tend vers $+\infty$.

2. (i) Démontrer l'identité $\Lambda = \mu * \log$.

   (ii) Démontrer l'identité

   $$(f * g) \cdot \log = (f \cdot \log) * g + f * (g \cdot \log)$$

   pour toutes fonctions arithmétiques f et g.

   (iii) En déduire les identités

   $$\mu \cdot \log = -\mu * \Lambda = -\mu * (\Lambda - 1) - \delta_1.$$

   On pourra observer que l'on a $\delta_1 \cdot \log = 0$*...*

3. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. En utilisant le théorème des nombres premiers, démontrer la majoration

   $$\left| \sum_{a \leqslant x} \left(\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \right) \right| \leqslant 2\varepsilon x \log x$$

   pour tout x assez grand.

4. En déduire que le théorème des nombres premiers implique l'estimation :

   $$M(x) = \mathrm{o}(x)$$

   quand x tend vers $+\infty$.

5. (Question bonus) Démontrer l'identité

   $$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1,$$

   puis déduire de ce qui précède que le théorème des nombres premiers implique :

   $$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Remarque : on peut démontrer que chacune des estimations $M(x) = \mathrm{o}(x)$ *et* $\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = \mathrm{o}(x)$ *est en fait* équivalente *au théorème des nombres premiers.*