# 1. Compter les nombres premiers

## 1.1. Euclide

(**1.1**) On trouve dans le livre VII des *Éléments* d'Euclide les résultats fondamentaux de l'arithmétique des nombres entiers.

Théorème 1.1. (Théorème fondamental de l'arithmétique) — *Tout nombre entier* $n > 1$ *est un produit de nombres premiers, et cette écriture est* unique *à l'ordre des facteurs près.*

Cet énoncé est bien connu, mais il est important d'avoir conscience :

(i) que l'existence d'une factorisation est très facile à démontrer (par récurrence) (1) ;

(ii) que l'unicité, par contre, est plus délicate ; il faut en effet faire appel au *lemme d'Euclide* (2), lequel peut se déduire du théorème de Bachet-Bézout (et donc de l'algorithme de la division euclidienne) ;

(iii) que l'unicité est ce qui est le plus utile dans la pratique (par exemple la résolution dans $\mathbf{Z}^3$ de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, que l'on peut trouver dans [**2**] ou encore [**1**]).

(**1.2**) Considérons un nombre premier $p$. La *valuation* $p$*-adique* d'un nombre entier $n \in \mathbf{Z}$, notée $v_p(n)$, est la plus grand exposant de $p$ divisant $n$ :

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid p^k | n\}.$$

C'est un élément de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $v_p(n) = \infty$ ssi $n = 0$, $v_p(1) = 0$ et, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$,

(i) $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$ ;

(ii) $v_p(m+n) \geqslant \min\{v_p(m), v_p(n)\}$.

Exercice 1. — *Démontrer les deux propriétés précédentes.*

La notion de valuation $p$-adique permet d'énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique sous la forme équivalente suivante : *tout nombre entier* $n \geqslant 1$ *s'écrit sous la forme*

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}.$$

Il est important de remarquer ici que, si le produit porte a priori sur l'ensemble des nombres premiers, le facteur $p^{v_p(n)}$ est égal à 1 dès que $p > n$ ; il s'agit donc en réalité du produit d'un nombre *fini* de termes.

Exercice 2. — *Démontrer que le dernier énoncé ci-dessus est équivalent au théorème 1.*

(**1.3**) Euclide démontre que l'ensemble des nombres premiers est bel et bien *infini*.

Théorème 1.2. (Euclide) — *L'ensemble des nombres premiers est infini.*

*Démonstration.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre entier $n! + 1 > 1$ admet au moins un facteur premier $p$. Celui-ci ne peut être égal à aucun des entiers $2, 3, \dots, n$ car il diviserait sinon $n!$, et donc également $1 = (n! + 1) - n!$ ; on en déduit $p > n$. L'ensemble des nombres premiers est non borné, donc il est infini. □

1. Il s'agit par ailleurs d'un phénomène très général : dans tout anneau *noethérien*, chaque élément non nul peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit d'éléments irréductibles

2. Si $p$ est un nombre premier et $a, b$ sont deux entiers tels que $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$

REMARQUE 1.3. — Notons $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. On peut déduire de l'argument d'Euclide une majoration très grossière du $n$-ième nombre premier $p_n$ :

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$$

pour tout $n \geqslant 1$. On prouve aisément cette inégalité en raisonnant par récurrence (exercice). Pour tout nombre réel $x > 1$,

$$2^{2^{n-1}} \leqslant x \iff n \leqslant \log_2 \log_2 x + 1,$$

donc

$$p_{\lfloor \log_2 \log_2 x \rfloor + 1} \leqslant x$$

et

$$\log_2 \log_2(x) \leqslant \pi(x).$$

Cette minoration est loin d'être optimale, mais elle a le mérite de quantitifer à peu de frais le théorème d'Euclide.

## 1.2. Euler

Euler exposa en 1737 une nouvelle preuve de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, reposant sur le théorème fondamental de l'arithmétique et des considérations analytiques simples.

**(2.1)** Toute l'analyse requise dans l'approche d'Euler est contenue dans l'énoncé suivant, qui est une version *quantitative* de la comparaison série-intégrale [(3)].

LEMME 1.4. — *Soit $y < x$ deux nombres réels. Pour toute fonction monotone $f : [y,x] \to \mathbf{R}$,*

$$\left| \sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) - \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant 3(|f(y)| + |f(x)|).$$

*De façon un peu moins précise :*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(|f(y)| + |f(x)|),$$

*où la constante implicite dans* O *ne dépend ni de $f$, ni de $x$ et $y$.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer $f$ par $-f$, nous pouvons supposer que $f$ est *croissante.*

3. Il faut quand même ajouter l'estimation $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$ sur $[-1/2, 1/2]$, sous la forme : il existe un nombre réel $A > 0$ tel que

$$|\ln(1+x) - x| \leqslant Ax^2$$

pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$. On peut le justifier en observant que la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, donc bornée sur tout segment qu'il contient.

Si $x$ et $y$ sont entiers, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) &= \sum_{n=y}^{x-1}\int_n^{n+1} f(n)\ \mathrm{d}t + f(x)\\ &= \sum_{n=y}^{x-1}\int_n^{n+1} f(\lfloor t\rfloor)\ \mathrm{d}t + f(x)\\ &= \int_y^x f(\lfloor t\rfloor)\ \mathrm{d}t + f(x)\\ &\leqslant \int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t + f(x)\end{aligned}$$

en utilisant la croissance de $f$. De la même manière,

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = f(y) + \sum_{n=y+1}^{x}\int_{n-1}^{n} f(n)\ \mathrm{d}t = f(y) + \int_y^x f(\lceil t\rceil)\ \mathrm{d}t \geqslant f(y) + \int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t,$$

ce qui établit l'estimation voulue :

$$\left|\sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n) - \int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(x)|,|f(y)|\} \leqslant |f(x)|+|f(y)|.$$

Le cas général s'en déduit aisément en introduisant les parties entières des bornes de sommation. On a en effet

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \sum_{\lceil y\rceil\leqslant n\leqslant\lfloor x\rfloor} f(n)$$

et

$$\int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{\lceil y\rceil}^{\lfloor x\rfloor} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_y^{\lceil y\rceil} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\ \mathrm{d}t,$$

avec

$$\left|\int_y^{\lceil y\rceil} f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(y)|,|f(\lceil y\rceil)|\},\quad \left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \max\{|f(x)|,|f(\lfloor x\rfloor)|\}$$

En vertu de la croissance de $f$,

$$f(y) \leqslant f(\lceil y\rceil) \leqslant f(\lfloor x\rfloor) \leqslant f(x)$$

et donc

$$\max\{|f(y)|,|f(\lceil y\rceil)|,|f(x)|,|f(\lfloor x\rfloor)|\} = \max\{|f(x)|,|f(y)|\}.$$

Au final, nous avons obtenu la majoration

$$\left|\sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n) - \int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 3\max\{|f(x)|,|f(y)|\} \leqslant 3\left(|f(x)|+|f(y)|\right).$$

□

REMARQUE 1.5. — Bien que très élémentaire, cette estimation est fort utile et nous l'utiliserons à de nombreuses reprises. Nous en verrons également deux raffinements : la formule d'Abel et la formule d'Euler-Maclaurin.

En guise d'illustration, rappelons le comportement des séries de Riemann. Pour tout nombre réel $s > 1$,

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^s} = \int_M^N t^{-s}\ \mathrm{d}t + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}) = \frac{M^{1-s}-N^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}),$$

donc la série $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ est convergente et

$$1 < \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1).$$

Précisons que le terme $\mathrm{O}(1)$ désigne une fonction *bornée* sur $]1,+\infty[$, donc cette identité :

(i) établit que la fonction $\zeta$ est bornée sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a>1$ ;

(ii) fournit le comportement asymptotique de $\zeta$ au voisinage de $1^+$ :

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$$

quand $s$ tend vers 1 dans $]1,+\infty[$.

**(2.2)** L'observation capitale d'Euler est que le théorème fondamental de l'arithmétique permet d'exprimer $\zeta(s)$ à l'aide des nombres premiers. Pour comprendre cela, introduisons pour tout nombre premier $p$ et tout $s>1$ la série

$$\zeta_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{p^{ks}}$$

restreinte aux entiers qui sont des puissances de $p$. Il s'agit bien entendu d'une série géométrique, de somme

$$\zeta_p(s) = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Le produit

$$\zeta_2(s)\zeta_3(s) = \left(\sum_{m_2\geqslant 0} \frac{1}{2^{m_2 s}}\right)\left(\sum_{m_3\geqslant 0} \frac{1}{3^{m_3 s}}\right) = \sum_{m_2,m_3\geqslant 0} \frac{1}{(2^{m_2}3^{m_3})^s}$$

n'est pas autre chose, en vertu de la règle usuelle de développement, que la série zêta restreinte aux entiers de la forme $2^{m_2}3^{m_3}$. Plus généralement, pour tout entier $N \geqslant 2$,

$$\prod_{p\leqslant N} \zeta_p(s) = \prod_{p\leqslant N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n\in E_N} \frac{1}{n^s},$$

où $E_N$ désigne l'ensemble des entiers obtenus en faisant tous les produits possibles des nombres premiers $p \leqslant N$. Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit que l'ensemble $E_N$ contient *tous les nombres* $n \leqslant N$ (existence d'une factorisation, les facteurs premiers étant nécessairement inférieurs à $N$), et que chacun d'eux ne s'obtient qu'une seule fois, c'est-à-dire pour un seul terme du développement du produit de gauche (unicité de la factorisation). Nous pouvons donc écrire

$$\left|\prod_{p\leqslant N} \zeta_p(s) - \sum_{n\leqslant N} \frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n\in E_N \text{ et } n>N} \frac{1}{n^s} \leqslant \sum_{n>N} \frac{1}{n^s}.$$

Le membre de droite (reste d'une série convergente...) est majoré par $\frac{N^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(N^{-s})$ (Lemme 1.4), donc il tend vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

Nous venons ainsi de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.6 (Formule du produit — *Pour tout réel $s>1$, la suite des produits finis $\prod_{p\leqslant N} \zeta_p(s)$ est convergente, de limite $\zeta(s)$. Autrement dit,*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

**(2.3)** On a manifestement $\zeta(s) > 1$ et $\frac{1}{p^s} < \frac{1}{2}$ pour tout $s > 1$ et tout $p$ premier. Il est donc licite de passer aux logarithmes dans l'identié d'Euler, qui se réécrit alors

$$\begin{aligned}\ln\zeta(s) &= \sum_{p\in\mathscr{P}} -\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\\ &= \sum_{p\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{2s}}\right)\right)\\ &= \sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^{2s}}\right).\end{aligned}$$

pour tout $s\in]1,+\infty[$.

Il faut ici observer que l'interversion de la somme et du $\mathrm{O}(\cdot)$ est licite car on utilise l'estimation

$$\ln(1+x) = x+\mathrm{O}(x^2)$$

pour tout $x$ dans $[-1/2, 1/2]$ (la constante de O ne dépend *pas* de $x$), puis on substitue $p^{-s}\in[0,1/2]$ à $x$. Enfin, en observant que la série des $p^{-2s}$ est bornée par la somme de la série (de Riemann) convergente des $n^{-2}$ pour tout $s\in]1,+\infty[$, nous obtenons

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s} = \ln\zeta(s)+\mathrm{O}(1)$$

pour tout $s\in]1,+\infty[$.

Il reste à exploiter notre connaissance du comportement asymptotique de $\zeta(s)$ au voisinage de $1^+$, rappelé ci-dessus (à la suite de la remarque 1.5) :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(1),$$

donc

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s} = \ln\left(\frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(1)\right)+\mathrm{O}(1) = \ln\frac{1}{s-1}+\ln(1+\mathrm{O}(s-1))+\mathrm{O}(1)$$

et

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s} = -\ln(s-1)+\mathrm{O}(1)$$

lorsque $s$ tend vers $1^+$.

THÉORÈME 1.7. (EULER) — *La série*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}$$

*est divergente.*

*Démonstration.* Pour tout $s > 1$,

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p} \geqslant \sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s}$$

dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. L'estimation asymptotique du membre de droite quand $s$ tend vers 1 que l'on vient d'obtenir fournit la conclusion voulue. □

REMARQUE 1.8. — 1. On peut déduire de ce théorème l'estimation $\pi(x) = o(x)$ quand $x$ tend vers l'infini, c'est-à-dire que la proportion des nombres premiers parmi les nombres entiers $\leqslant x$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$. De manière imagée, la probabilité qu'un nombre entier choisi au hasard soit premier est nulle.

2. La formule

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \ln\zeta(s) + \mathrm{O}(1)$$

quand $s$ tend vers $1^+$ relie le comportement asymptotique de la suite des nombres premiers, exprimé via celui de la série des $\frac{1}{p^s}$ quand $s \longrightarrow 1^+$, à celui d'une fonction spécifique, ici $\zeta(s)$, au voisinage de $s=1$. Ce phénomène est au cœur de la théorie analytique des nombres.

3. Des arguments analogues à ceux utilisés précédemment permettent d'encadrer les sommes partielles de la séries des inverses des nombres premiers : il existe un réel $C>0$ tel que

$$\ln\ln x - \ln 2 \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant x} \frac{1}{p} \leqslant e\ln\ln x + C$$

pour tout réel $x>1$. La démonstration fait l'objet de l'exercice 3 du TD1. Cet encadrement détermine l'ordre de grandeur de $\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}$. Nous verrons plus loin un développement asymptotique de ces sommes partielles, de terme dominant $\ln\ln x$.

## 1.3. Tchébychev

**(3.1)** En 1850, le mathématicien russe Pafnouti Tchébychev démontra que la fonction de comptage des nombres premiers a bien l'ordre de grandeur attendu.

THÉORÈME 1.9. — *Il existe des nombres réels* $0<c<C$ *tels que, pour tout* $x$ *assez grand,*

$$c\,\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant C\,\frac{x}{\log(x)}.$$

On peut déduire de ce théorème l'existence de nombres premiers dans certains intervalles. En effet, si $a<b$ sont deux nombres réels (suffisamment grands) tels que

$$C\frac{a}{\log a} < c\frac{b}{\log b},$$

alors $\pi(a)<\pi(b)$ et l'intervalle $]a,b]$ contient donc un nombre premier. De fait, les bornes obtenues par Tchébychev, à savoir $c=0,92$ et $C=1,11$, étaient assez bonnes pour lui permettre de de démontrer le *postulat de Bertrand* :

*pour tout nombre entier* $n\geqslant 2$*, l'intervalle* $]n,2n[$ *contient toujours un nombre premier.*

Nous allons exposer une version simplifiée de la démonstration de Tchébychev, conduisant aux bornes plus grossières $c=\frac{1}{2}$ et $C=2$. Si ces bornes ne suffisent pas à déduire le postulat de Bertrand, une preuve plus élémentaire de ce résultat, découverte par P. Erdös en 1936, fait l'objet du problème du TD1.

La démonstration de Tchébychev est *élémentaire*, au sens où elle n'utilise que le théorème fondamental de l'arithmétique et des estimations relevant de l'analyse réelle asymptotique, et non pas l'analyse complexe. Elle n'en demeure pas moins ingénieuse, son point de départ étant l'observation que le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ ne diffère « pas trop » du produit de tous les nombres premiers dans l'intervalle $]n,2n]$.

**(3.2)** Nous allons avoir besoin de quatre résultats auxiliaires, tous intéressants indépendamment de l'utilisation que nous allons en faire.

Le premier consiste en une formule explicitant la valuation $p$-adique des coefficients binomiaux.

LEMME 1.10. (FORMULE DE LEGENDRE) — *Pour tout nombre entier naturel $n$ et tout nombre premier $p$,*

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

*Démonstration* — Si l'on factorise chaque entier $m \leqslant n$ sous la forme $m = p^{v_p(m)} m'$, avec $p \nmid m'$, alors le facteur $p^\alpha$ apparaît dans

$$n! = \prod_{1 \leqslant m \leqslant n} m$$

pour chaque entier $m$ tel que $p^\alpha | m$ et $p^{\alpha+1} \nmid m$, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor$ fois (le nombre des multiples de $p^\alpha$ moins celui des multiples de $p^{\alpha+1}$ dans $[1,n]$.). On a donc

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left( \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor \right) \alpha = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

□

Le second est un encadrement du coefficient binomial médian.

LEMME 1.11. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant 2^{n-1}.$$

*Démonstration* — Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sont croissants avec $k \in \{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, puis décroissants avec $k \in \{\lfloor n/2 \rfloor, n\}$ ; la plus grande valeur est donc atteinte en

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{n - \lfloor n/2 \rfloor}.$$

On en déduit facilement la minoration souhaitée :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant (n+1) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

donc

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Pour établir la majoration, distinguons deux cas suivant la parité de $n$.

(i) Si $n = 2m+1$ est impair, alors nous pouvons aparier les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, d'où :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \geqslant 2 \binom{n}{m},$$

ce qui est la majoration souhaitée.

(ii) Si $n = 2m$, alors $\binom{n}{m}$ est l'unique coefficient binomial maximal, donc l'argument précédent ne fonctionne plus. On a cependant

$$\binom{2m}{m} = \frac{m+2}{m} \binom{2m}{m+1} \leqslant 2 \binom{2m}{m+1},$$

donc
$$2^n \geqslant \binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m} + \binom{2m}{m+1} = \binom{2m}{m} + 2\binom{2m}{m+1} \geqslant 2\binom{2m}{m},$$
ce qui est encore la majoration souhaitée.

□

Le troisième fournit une seconde majoration des coefficients binomiaux, faisant apparaître la fonction de comptage.

LEMME 1.12. — *Soit $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ deux nombres entiers.*

*(i) Soit $p$ un nombre premier. En posant $\alpha_p = v_p\left(\binom{n}{k}\right)$, on a*
$$p^{\alpha_p} \leqslant n.$$

*(ii) On en déduit la majoration :*
$$\binom{n}{k} \leqslant n^{\pi(n)}.$$

*Démonstration* — (i) Nous pouvons expliciter la valuation $p$-adique du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à l'aide de la formule de Legendre (Lemme 1.10) :
$$\begin{aligned}
\alpha_p &= v_p\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \\
&= v_p(n!) - v_p(k!) - v_p((n-k)!) \\
&= \sum_{m\geqslant 1}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^m}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^m}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^m}\right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

La fonction réelle $f$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par
$$f(x,y) = \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor$$
est *1-périodique* par rapport à chacune des variables : il suffit de le vérifier pour la première par symétrie de $f$, et
$$f(x+1,y) = \lfloor x+y+1\rfloor - \lfloor x+1\rfloor - \lfloor y\rfloor = \lfloor x+y\rfloor + 1 - (\lfloor x\rfloor + 1) - \lfloor y\rfloor = f(x,y)$$
pour tous $x,y \in \mathbf{R}^2$. On en déduit
$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = \sup_{x,y\in[0,1[} f(x,y),$$
puis
$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = 1$$
puisque
$$f(x,y) = \lfloor x+y\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x+y<1 \\ 1 & \text{si} \quad x+y\geqslant 1 \end{cases}$$
pour tous $x,y \in [0,1[$. En observant que, dans la somme ci-dessus pour $\alpha_p$, les seuls entiers $m$ ayant une contribution éventuellement non nulle sont ceux tels que $p^m \leqslant n$, c'est-à-dire $m \leqslant \log_p n$, nous obtenons finalement
$$\alpha_p \leqslant \log_p n \ \text{ et donc } \ p^{\alpha_p} \leqslant p^{\log_p n} = n.$$

(ii) Avec les notations en vigueur, nous pouvons écrire la factorisation du coefficient binomial sous la forme

$$\binom{n}{k} = \prod_{p \mid \binom{n}{k}} p^{\alpha_p}.$$

Chaque facteur $p^{\alpha_p}$ figurant dans le membre de droite est majoré par $n$ en vertu premier point, et tout diviseur premier de $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ divise $n!$, donc est inférieur à $n$. Ces observations conduisent immédiatement à la majoration

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant n^{\pi(n)}.$$

□

Le quatrième et dernier résultat préliminaire décrit les plus grands facteurs premiers du coefficient binomial médian.

LEMME 1.13. — *Soit* $n \geqslant 2$ *un nombre entier. Le coefficient binomial* $\binom{2n}{n}$ *est divisible une fois et une seule par chaque nombre premier* $p$ *dans l'intervalle* $]n, 2n]$ *; en particulier,*

$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p \mid \binom{2n}{n}.$$

*De même, le coefficient binomial* $\binom{2n+1}{n}$ *est divisible une fois et une seule par chaque nombre premier* $p$ *dans l'intervalle* $]n+1, 2n]$ *; en particulier,*

$$\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \mid \binom{2n+1}{n}.$$

*Démonstration* — En écrivant

$$(2n)! = \binom{2n}{n}(n!)^2,$$

il est manifeste que chaque nombre premier $p \in ]n, 2n]$, divisant $(2n)!$ mais ne divisant pas $n!$, doit diviser le coefficient binomial. Le produit de ces nombres premiers divise donc le coefficient binomial en vertu du lemme d'Euclide. Enfin, la condition $p > n$ implique $p^2 > n^2 \geqslant 2n$, donc $v_p((2n)!) = 1$ en vertu de la formule de Legendre (Lemme 1.10) et $p^2$ ne peut donc pas diviser le coefficient binomial.

Le cas du coefficient binomial $\binom{2n+1}{n}$ se traite de manière analogue. □

**(3.3)** Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 1.9, avec les constantes $c = \frac{1}{2}$ et $C = 2$.

*La minoration* —- Soit $x > 1$ un nombre réel et posons $n = \lfloor x \rfloor$, ce qui fournit l'encadrement $n \leqslant x < n+1$.

En combinant les lemmes 1.11 et 1.12, nous obtenons l'inégalité

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant n^{pi(n)},$$

soit la minoration

$$\pi(n) \geqslant \frac{n \ln 2 - \ln(n+1)}{\ln n} \geqslant \frac{(x-1)\ln 2 - \ln(x+1)}{\ln x}.$$

Le membre de droite est supérieur à $\frac{1}{2}\frac{x}{\ln x}$ pour tout réel $x \geqslant 20$ [4] donc la minoration annoncée est acquise pour tout $x \geqslant 20$. Par aileurs, on la vérifie explicitement pour $3 \leqslant x < 20$ en observant sur une table des valeurs de $\pi(n)$ l'inégalité

$$\pi(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

pour tout entier $n \in [3,20]$.

*La majoration* — La fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ est croissante, donc il suffit d'établir la majoration pour $x$ entier puisqu'alors

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leqslant 2\frac{\lfloor x \rfloor}{\ln\lfloor x \rfloor} \leqslant 2\frac{x}{\ln x}.$$

Nous allons donc établir l'inégalité

$$\pi(n) \leqslant 2\frac{n}{\ln n}$$

en raisonnant par récurrence forte sur le nombre entier $n \geqslant 2$. En fait, nous allons avoir besoin d'initialiser cette récurrence à $n = 106$, donc il faut commencer par vérifier explicitement que la majoration vaut pour tout entier $n \leqslant 106$ ; cela se fait aisément à l'aide d'une table des valeurs de $\pi(n)$.

Prouvons maintenant l'hérédité forte, en distinguant deux cas, selon la parité de $n$.

(i) Si $n$ est pair, alors $\pi(n) = \pi(n-1)$ et l'inégalité pour $n$ découle immédiatement de celle pour $n-1$.

(ii) Supposons maintenant que $n = 2m+1$ soit impair et $n \geqslant 106$. En combinant les lemmes 1.11 et 1.13, on obtient

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 2^{2m}.$$

Le membre de gauche est minoré par $(m+2)^{\pi(2m+1)-\pi(m+1)}$, donc

$$\pi(2m+1) - \pi(m+1) \leqslant \frac{2m\ln 2}{\ln(m+2)},$$

puis

$$\pi(n) = \pi(2m+1) \leqslant 2\frac{m+1}{\ln(m+1)} + \frac{2m\ln 2}{\ln(m+2)} \leqslant \frac{(1+\ln 2)n+1}{\ln(n/2)}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. On vérifie finalement que le membre de droite est majoré par $2\frac{n}{\ln n}$ pour tout $n \geqslant 106$ [5].

□

4. La fonction $f : x \mapsto (x-1)\ln 2 - \ln(x+1) - \frac{1}{2}x$ est *convexe* sur $[0,+\infty[$, strictement négative en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc elle admet un minimum strictement négatif en un point $x_0$ et est strictement croissante sur $[x_0,+\infty[$ ; on en déduit qu'elle s'annule en un unique point $x_1 > x_0$, elle qu'elle est strictement positive sur $]x_1,+\infty[$. Comme $f(20) \simeq 0,17 > 0$, cette fonction est positive sur $[20,+\infty[$ et la minoration souhaitée est donc valable sur cet intervalle.

5. La fonction $f : x \mapsto ((1+\ln 2)x+1)\ln x - 2x\ln(x/2) = (\ln 2 - 1)x\ln x + \ln x + (2\ln 2)x$ est *concave* sur $[3,+\infty[$, strictement positive en 3 et de limite $-\infty$ en $+\infty$, donc elle possède un (unique) maximum en un point $x_0$, et est strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$ ; elle s'annule donc en un unique point $x_1 > x_0$ et est strictement négative sur $]x_1,+\infty[$. Comme $f(106) \simeq -0,07 < 0$, $f$ est strictement négative sur $[106,+\infty[$ et la majoration souhaitée vaut donc pour $n \geqslant 106$.

# 2. FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Dans tout ce qui suit, on pose $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 2.1 — *Une* fonction arithmétique *est une application* $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$. *Les fonctions arithmétiques forment un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel pour l'addition usuelle, noté* $\mathscr{A}$.

Bien entendu, une fonction arithmétique n'est pas autre chose qu'une suite à valeurs complexes. Cette nouvelle terminologie est justifiée par le fait que nous allons nous intéresser à des suites particulières, intimement reliées à des questions arithmétiques. Voici les principales fonctions arithmétiques que nous rencontrerons :

(a) la fonction constante égale à 1, notée $1$ ;

(b) la fonction « identité » id, définie par $\mathrm{id}(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ ;

(c) la fonction « de Dirac » en 1, définie par

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ ;

(d) la fonction « nombre de diviseurs » , usuellement notée $d$ ou $\tau$, et définie par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ ;

(e) la fonction $\mu$ de Möbius, définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(f) la fonction indicatrice d'Euler $\varphi$, définie par

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(h,n)=1} 1$$

(g) la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers, notée $\mathbf{1}_{\mathscr{P}}$ ;

(h) la fonction $\Lambda$ de von Mangolt, définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\alpha, \text{ avec } p \text{ premier et } \alpha \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce court chapitre, nous allons mettre en évidence une structure algébrique spécifique sur $\mathscr{A}$, sous-jacente à de nombreuses identités (plus ou moins) bien connues.

## 2.1. Convolution de Dirichlet

**(1.1)** Les fonctions arithmétiques peuvent être multipliées de façon habituelle. Il s'avère cependant que l'on peut définir sur $\mathscr{A}$ une autre structure multiplicative, plus intéressante, qui reflète les propriétés de divisibilité des nombres entiers. Il importe pour cela de manipuler avec aisance les diviseurs d'un nombre entier.

LEMME 2.2. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'application*

$$\{\textit{diviseurs de } n\} \longrightarrow \{(d,d') \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid dd' = n\}, \quad d \mapsto \left(d, \frac{n}{d}\right)$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* Il convient de remarquer que, puisque $d \in \in N^*$ est un diviseur de $n$, le nombre rationnel $n/d$ est bien entier. Si l'on note $q$ l'application définie dans l'énoncé et $p_1$ la projection de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ sur le premier facteur, alors $p_1$ est un inverse à gauche de $u$. Pour voir qu'il s'agit d'un inverse à droite, il suffit d'observer que, pour tout couple $(d,d') \in \mathbf{N}^*$ tel que $dd' = n$, on a nécessairement $d' = \frac{n}{d}$. Ainsi, $u$ et (la restriction de) $p_1$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. □

Étant donné deux fonctions arithmétiques $f, g$, on définit leur *produit de Dirichlet*, noté $f * g$, par

(1) $$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d,d' \in \mathbf{N}^* \,;\, dd'=n} f(d) g(d')$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. La première somme porte sur tous les diviseurs de $n$ dans $\mathbf{N}^*$, la seconde sur tous les couples $(d,d')$ d'éléments de $\mathbf{N}^*$ tels que $dd' = n$ ; cette réécriture est justifiée par le lemme précédent.

PROPOSITION 2.3. — *Muni de l'addition $+$ et de la multiplication $*$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre associative, commutative, d'élément neutre $\delta_1$. En outre, le groupe $\mathscr{A}^\times$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ est formé des $f$ telles que $f(1) \neq 0$.*

Pour $f \in \mathscr{A}$ et $k \geqslant 1$, on pose

$$f^{(k)} = f * \ldots * f$$

($k$ copies). Si $f \in \mathscr{A}^\times$, on désigne par $f^{(-1)}$ son inverse au sens du produit de Dirichlet.

*Démonstration.* L'associativité découle de l'identité

$$((f*g)*h)(n) = \sum_{d,c \,;\, dc=n} (f*g)(d) h(c) = \sum_{a,b,c \,;\, abc=n} (f(a)g(b))h(c)$$

et de l'associativité de la multiplication dans $\mathbf{C}$.

La commutativité se déduit du fait que la seconde somme dans (1) est symétrique en $f$ et $g$.

L'élément neutre multiplicatif de $\mathscr{A}$ est la fonction de Dirac $\delta_1$ puisque

$$f * \delta_1(n) = \sum_{d|n} f(d) \delta_1(n/d) = f(n$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{A}$.

Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible, d'inverse $g$, alors

$$1 = \delta_1(1) = f * g(1) = f(1) g(1),$$

donc $f(1) \neq 0$. Réciproquement, si $f \in \mathscr{A}$ est une fonction telle que $f(1) \neq 0$, alors nous pouvons facilement définir une fonction $g \in \mathscr{A}$ telle que $f * g = \delta_1$. On raisonne pour cela par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ :

— on pose $g(1) = 1/f(1)$ ;

— si $n > 1$ et que l'on a défini $g(m)$ pour tout entier $m < n$, alors on pose

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n,\ d>1} f(d) g(n/d)$$

en remarquant que l'on a $n/d < n$ si $d > 1$.

La relation $f * g = \delta_1$, c'est-à-dire

$$\sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

est vérifiée par construction. □

**(1.2)** Introduisons maintenant les fonctions arithmétiques *multiplicatives.*

DÉFINITION 2.4. — *Une fonction arithmétique $f$ est dite* multiplicative *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

*(i)* $f(1) = 1$ *;*

*(ii)* $f(mn) = f(m)f(n)$ *pour tous entiers* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *premiers entre eux.*

Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit qu'une fonction arithmétique multiplicative $f$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les entiers de la forme $p^\alpha$, avec $p$ premier et $\alpha \geqslant 1$ : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f(n) = f\left(\prod_p p^{v_p(n)}\right) = \prod_p f\left(p^{v_p(n)}\right).$$

PROPOSITION 2.5. — *Les fonctions arithmétiques multiplicatives forment un sous-groupe de* $\mathscr{A}^\times$*.*

La démonstration de ce résultat réside entièrement dans l'observation élémentaire suivante.

LEMME 2.6. — *Soit* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *deux nombres entiers* premiers entre eux. *L'applications*

$$\{(d,e) \in (\mathbf{N}^*)^2 \ ; \ d|m \text{ et } e|n\} \longrightarrow \{\text{diviseurs de } mn\}, \quad (d,e) \mapsto de$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que, si $d$ (resp. $e$) est un diviseur de $m$ (resp. de $n$), alors $de$ est bien un diviseur de $mn$ ; il suffit d'écrire $m = dm'$, $n = en'$ et $mn = dem'n'$ pour s'en convaincre.

L'application $(d,e) \mapsto de$ est toujours surjective, même si $m$ et $n$ ne sont pas premiers entre eux. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un diviseur $\delta$ de $mn$ et de poser $d = \mathrm{pgcd}(\delta, m)$ ; il vient alors $d|m$ et $\mathrm{pgcd}(\delta/d, m/d) = 1$, donc $\frac{\delta}{d}|n$ puisque

$$\delta|mn \ \Rightarrow \ \frac{\delta}{d}|\frac{m}{d}n.$$

La factorisation $\delta = d\frac{\delta}{d}$ que l'on vient d'obtenir établit la surjectivité de l'application considérée.

Sous l'hypothèse $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$, cette application est également injective. En effet, si $d, d'|m$, $e, e'|n$ et $de = d'e'$, alors $\mathrm{pgcd}(d,e')|\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$ et donc $d|d'$. Par symétrie, nous en déduisons $d' = d$ et $e' = e$. □

*Démonstration de la proposition 2.5.* Si $f$ et $g$ sont multiplicatives, alors, pour tous entiers $m,n$ premiers entre eux,

$$\begin{aligned}(f*g)(mn) &= \sum_{\delta|mn} f(\delta)g(mn/\delta)\\ &= \sum_{d|m,d'|n} f(dd')g\left(\frac{m}{d}\frac{n}{d'}\right)\\ &= \sum_{d|n,d'|m} f(d)f(d')g(m/d)g(n/d')\\ &= \left(\sum_{d|m} f(d)g(m/d)\right)\left(\sum_{d'|n} f(d')g(n/d')\right)\\ &= (f*g)(m)(f*g)(n).\end{aligned}$$

La deuxième égalité est justifiée par le lemme précédent, la troisième exploite la multiplicativité de $f$ et $g$, tandis que la quatrième n'est autre que le développement usuel d'un produit de deux sommes.

Toute fonction $f$ multiplicative est inversible puisque $f(1)=1$, et il reste à démontrer que son inverse $f^{(-1)}$ est encore multiplicative. On peut raisonner de la façon suivante. Considérons l'unique fonction arithmétique multiplicative $h$ telle que

$$h(p^a) = f^{(-1)}(p^a)$$

pour tous $p$ premier et $a \in \mathbf{N}^*$.

On a

$$(f*h)(p^a) = \sum_{m=0}^{a} f(p^m)h(p^{a-m}) = \sum_{m=0}^{a} f(p^m)f^{(-1)}(p^{a-m}) = (f*f^{(-1)})(p^a) = \delta_1(p^a),$$

donc $f*h$ et $\delta_1$ prennent les mêmes valeurs sur tous les entiers qui sont une puissance d'un nombre premier. Puisqu'il s'agit de deux fonctions multiplicatives, on en déduit $f*h=\delta_1$, et donc $f^{(-1)}=h$ est bien multiplicative. □

□

EXEMPLES 2.8 — L'identité

$$1*1(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d,d'\ ;\ dd'=n} 1$$

montre que $1*1$ est la fonction « nombre de diviseurs », notée $d$ ; il s'agit donc d'une fonction multiplicative. On a

$$d(p^\alpha) = \sum_{0\leqslant k\leqslant\alpha} 1 = \alpha+1$$

pour tout nombre premier $p$ et tout $\alpha \geqslant 1$, donc

$$d(n) = \prod_{p|n}(v_p(n)+1)$$

par multiplicativité.

Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$1^{(k)}(n) = \sum_{d_1,\dots,d_k\ ;\ d_1\cdots d_k=n} 1$$

est le nombre de $k$-uplets d'entiers $(d_1,\dots,d_k)$ tels que $d_1\cdots d_k = n$.

On a par ailleurs

$$1*\mathrm{id}(n) = \sum_{d|n} d,$$

donc la fonction arithmétique $\sigma = 1 * \mathrm{id}$, associant à tout entier $n$ la somme de ses diviseurs, est également multiplicative.

## 2.2. La fonction de Möbius

Considérons l'inverse de convolution de la fonction 1. Il s'agit d'une fonction multiplicative, qui vérifie par hypothèse l'identité

$$\sum_{d|n} 1^{(-1)}(d) = \delta_1(n)$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$. On en déduit :

$$1^{(-1)}(1) = 1, \quad 1^{(-1)}(p) = -1 \quad \text{et} \quad 1^{(-1)}(p^\alpha) = 0$$

pour tout nombre premier $p$ et tout $\alpha \geqslant 2$. Par multiplicativité, on a donc

$$1^{(-1)}(n) = \prod_p 1^{(-1)}\left(p^{v_p(n)}\right) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$1^{(-1)} = \mu.$$

Proposition 2.9. — *La fonction de Möbius est l'inverse de convolution de la fonction constante* 1. *De manière équivalente,*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & \text{‘}sinon \end{cases}$$

Proposition 2.10. — *Soient $f$ et $g$ deux fonctions arithmétiques. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d). \tag{3}$$

*Démonstration.* La première identité équivaut à $g = f * 1$, la seconde à $f = g * \mu$. Elles sont donc équivalentes puisque $1 * \mu = \delta_1$. □

## 2.3. La fonction indicatrice d'Euler

Par définition,

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} 1 = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \delta_1(\mathrm{pgcd}(m,n)).$$

En utilisant l'identité $\delta_1 = 1 * \mu$, il vient alors

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} 1 * \mu(\mathrm{pgcd}(m,n)) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d|\mathrm{pgcd}(m,n)} \mu(d).$$

La double somme de droite est indexée par les couples $(m,d)$ formés d'un entier $m \in \{1,\ldots,n\}$ et d'un diviseur commun $d$ de $m$ et $n$. Si l'on fixe un diviseur $d$ de $n$, les couples $(m,d)$ associés correspondent aux multiples $m$ de $d$ entre 1 et $n$, en nombre $\frac{n}{d}$. Nous pouvons donc réécrire l'identité précédente sous la forme :

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d \mid m,n} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant n \\ d \mid m,n}} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \mathrm{id} * \mu.$$

En observant que l'on a

$$\varphi(p^\alpha) = \sum_{d \mid p^\alpha} \mu(d) \frac{p^\alpha}{d} = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

pour tout nombre premier $p$ et tout $\alpha \geqslant 1$, nous retrouvons les propriétés bien connues de $\varphi$.

PROPOSITION 2.11. — *La fonction indicatrice d'Euler est multiplicative. Elle vérifie :*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

*et*

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$$

*pour tout entier* $n \in \mathbf{N}^*$.

# 3. Séries de Dirichlet

Les séries de Dirichlet apparaissent naturellement comme les *séries génératrices* des fonctions arithmétiques : à $f \in \mathscr{A}$ est associée la série de fonctions de la variable complexe $s$ définie par

$$L(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

La motivation pour introduire les fonctions $n^s$ plutôt que $s^n$ (qui conduiraient à des séries entières) est la propriété de *multiplicativité* évidente

$$\frac{1}{(mn)^s} = \frac{1}{m^s} \cdot \frac{1}{n^s}$$

pour tous $m,n \in \mathbf{N}^*$.

L'idée fondamentale sous-jacente à l'étude des séries de Dirichlet est simple : les propriétés de la fonctions arithmétique $f$ se reflètent dans le comportement analytique de $L(f,s)$, et l'on dispose d'outils puissants pour étudier ce dernier.

Nous allons commencer par une étude générale des séries de Dirichlet, puis nous considérerons plus spécifiquement le cas des séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques multiplicatives.

## 3.1. Abscisses de convergence

**(1.1)** Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes.

On sait que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in \overline{\mathbf{R}}_+$ caractérisé par le fait que cette série converge (resp. diverge) pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R$ (resp. $|z| > R$). Nous allons voir que la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ a une *abscisse de convergence* $\sigma_c \in \overline{\mathbf{R}}$, caractérisée par le fait que cette série converge (resp. diverge) pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$ (resp. $\mathfrak{Re}(s) < \sigma_c$).

**(1.2)** L'outil essentiel permettant l'étude de la convergence des séries de Dirichlet est la *transformation d'Abel.*

Proposition 3.1. — *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres complexes. Posons $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ pour $N \geqslant 0$ et $A_{-1} = 0$.*

1. *Pour tous entiers $M,N$ tels que $0 \leqslant M \leqslant N$,*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_N b_{N+1} - A_{M-1} b_M.$$

2. *Si :*
   - *(i) les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont bornées (ce qui est en particulier le cas lorsque cette série converge) ;*
   - *(ii) la suite $(b_n)$ est à valeurs réelles, décroissante à partir d'un certain rang et tend vers $0$ ;*

   *alors la série $\sum a_n b_n$ converge.*

*Démonstration.* 1. Cette identité, appelée *transformation d'Abel*, est un analogue discret de l'intégration par parties. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=M}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_M \\ &= \sum_{n=M}^{N} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_{N+1} - A_{M-1} b_M.\end{aligned}$$

2. Sous les hypothèses (i) et (ii), nous pouvons écrire, pour $M$ et $N$ assez grands (de sorte que la suite $(b_n)_{n\geqslant M-1}$ soit réelle et décroissante) :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| &\leqslant \sup_{n\geqslant 0} |A_n| \left(\sum_{n=M}^{N} |b_n - b_{n+1}| + |b_{N+1}| + |b_M|\right) \\ &\leqslant \sup_{n\geqslant 0} |A_n| \left(\sum_{n=M}^{N} (b_n - b_{n+1}) + b_{N+1} + b_M\right) \\ &\leqslant 2 b_M \sup_{n\geqslant 0} |A_n|.\end{aligned}$$

Cette majoration établit que la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ est de Cauchy, donc convergente. □

REMARQUE 3.2 — Un cas particulier bien connu de cette proposition est celui des séries *alternées* : si $(u_n)$ est une suite réelle décroissante tendant vers 0, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge. Il suffit de poser $a_n = (-1)^n$ et $b_n = u_n$.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat technique permettant d'étudier la convergence des séries de Dirichlet.

PROPOSITION 3.3. — *Si la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ *converge en un point* $s_0 \in \mathbf{C}$, *alors elle converge uniformément sur tout cône* $C(s_0, \theta) = s_0 + \left(\mathbf{R}_{\geqslant 0} e^{i\theta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0} e^{-i\theta}\right)$ *avec* $\theta \in [0, \pi/2[$.

*Démonstration.* Posons $s = s_0 + t$. Puisque

$$\frac{a_n}{n^s} = \frac{b_n}{n^t}$$

avec $b_n = a_n n^{-s_0}$, la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ en $s_0$ équivaut à celle de la série $\sum \frac{b_n}{n^t}$ en 0. Nous pouvons donc nous borner à traiter le cas $s_0 = 0$, et nous faisons ainsi l'hypothèse que la série $\sum a_n$ converge.

Notons $A_{M,N}$ la somme partielle $\sum_{n=M}^{N} a_n$ et posons $A_{M,M-1} = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, notre hypothèse garantit l'existence d'un entier $M_0 \geqslant 1$ tel que, pour tous $N \geqslant M > M_0$,

$$|A_{M,N}| \leqslant \varepsilon.$$

Effectuons une transformation d'Abel :

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M}^{N} A_{M,n} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{A_{M,N}}{(N+1)^s}.$$

Il vient
$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leqslant \varepsilon\left(\sum_{n=M}^{N}\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right|+\frac{1}{|(N+1)^s|}\right)$$
pour tous $N \geqslant M > M_0$. Écrivons $s = a+ib$ avec $a,b \in \mathbf{R}$. En observant que l'on a $|t^{s+1}| = t^{a+1}$ pour tout $t > 0$ et
$$|s| \leqslant ka \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\cos\theta}$$
pour tout $s$ dans le cône $C(0,\theta) = \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\theta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\theta}$, on obtient, en suposant $a$ non nul,
$$\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right| = \left|\int_n^{n+1}\frac{s}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant k\int_n^{n+1}\frac{a}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t = k\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right),$$
puis, en observant que l'on a $k \geqslant 1$,
$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leqslant \varepsilon k\left(\sum_{n=M}^{N}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)+\frac{1}{(N+1)^a}\right) = \frac{\varepsilon k}{M^a} \leqslant k\varepsilon.$$
Cette majoration vaut pour tout $s$ dans le cône $C(0,\theta)$ : nous l'avons établie en supposons $\mathfrak{Re}(s) \neq 0$, mais elle est également vraie lorsque $s = 0$ puisque $k \geqslant 1$. La suite des sommes partielles de la série de Dirichlet
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$$
est ainsi uniformément de Cauchy sur le cône $C(0,\theta)$, donc elle converge uniformément sur ce domaine. □

Il découle de la proposition précédente que, si la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ converge en un point $s_0 \in \mathbf{C}$, alors elle converge en tout point du demi-plan ouvert $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \mathfrak{Re}(s_0)\}$ ; en effet, tout point $s$ de ce demi-plan est contenu dans le cône $C(s_0, \mathrm{Arg}(s-s_0))$ et $\mathrm{Arg}(s-s_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Cette observation permet de définir l'*abscisse de convergence* d'une série de Dirichlet.

COROLLAIRE 3.4. — *Il existe $\sigma_c \in \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ soit divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) < \sigma_c$ et convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$.*

*Démonstration.* Considérons le sous-ensemble
$$I = \left\{ s \in \mathbf{R} \;\middle|\; \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \text{ converge}\right\}$$
dans $\overline{\mathbf{R}}$ et posons
$$\sigma_c = \inf I.$$

Si $I = \varnothing$, alors $\sigma_c = +\infty$. La série de Dirichlet ne converge en aucun point $s_0$ de $\mathbf{C}$, puisqu'elle convergerait sinon en tout point de la demi-droite réelle $]\mathfrak{Re}(s_0), +\infty[$.

Si $I \neq \varnothing$, alors
$$]\sigma_c, +\infty[ \subset I \quad \text{et} \quad I \cap ]-\infty, \sigma_c[ = \varnothing$$
puisque la convergence en un point $x_0$ de $\mathbf{R}$ implique la convergence en tout $x \in [x_0, +\infty[$.

Si maintenant $s$ est un nombre complexe tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$, alors la série de Dirichlet converge en $s$ puisque ce point appartient au cône $C(s_0,\theta)$, avec $\sigma_c < s_0 < \mathfrak{Re}(s)$ et $\theta = \mathrm{Arg}(s-s_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Enfin, la série diverge en tout point de $]-\infty, \sigma_c[$ (par définition de $\sigma_c$), donc en tout point $s_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_0) < \sigma_c$, puisque le cône $C(s_0,\theta)$ rencontre $]-\infty, \sigma_c[$ lorsque $\theta$ est choisi suffisamment proche de $\frac{\pi}{2}$. □

L'élément $\sigma_c$ de $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ que l'on vient d'associer à la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ est son *abscisse de convergence.*

REMARQUE 3.5 — Pour déterminer l'abcisse de convergence d'une série de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^s}$, il est donc suffisant de considérer des valeurs *réelles* de la variable $s$.

EXEMPLE 3.5 — Il est facile de voir que tous les cas sont possibles pour $\sigma_c$ :

(i) Si $a_n = \frac{1}{n!}$, alors

$$\frac{a_n}{n^s} = \frac{n^{-s}}{n!} = \mathrm{o}\left(n^{-2}\right)$$

lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc $\sigma_c = -\infty$.

(ii) Si $a_n = n!$, alors $\left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ tend vers $+\infty$ avec $n$ pour tout $s \in \mathbf{C}$, donc $\sigma_c = +\infty$.

(iii) Si $a_n = 1$, alors $\sigma_c = 1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ diverge au point $s = \sigma_c$.

(iv) Si $a_n = \frac{1}{(\log n)^2}$, alors $\sigma_c = 1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\log n)^2 n^s}$ converge au point $s = \sigma_c$.

COROLLAIRE 3.7. — *Une série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ d'abscisse converge $\sigma_c$ converge sur le demi-plan $\mathscr{H}_{\sigma_c} = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c\}$, uniformément sur tout compact. Sa somme $f$ est une fonction holomorphe sur $\mathscr{H}_{\sigma_c}$ dont les dérivées itérées s'obtiennent en dérivant la série initiale terme à terme :*

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n (\log n)^k}{n^s}$$

*pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $s \in \mathscr{H}_{\sigma_c}$.*

*Démonstration.* C'est une application immédiate du théorème de Weierstrass affirmant que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes est holomorphe. Puisque l'holomorphie est une propriété locale, il suffit d'appliquer ce théorème sur l'intérieur de tout disque fermé $K$ contenu dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > \sigma_c$, et d'observer que la convergence sur $K$ est uniforme puisque $K$ est contenu dans un cône fermé $C(s_0, \theta_0)$ convenable (choisir $s_0$ réel tel que

$$\sigma_c < s_0 < \min_{s\in K} \mathfrak{Re}(s),$$

puis $\theta_0$ tel que

$$0 < \theta_0 \leqslant \max_{s\in K} \mathrm{Arg}(s - s_0),$$

en observant que l'on a bien $\mathrm{Arg}(s - s_0) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $s \in K$ puisque $K$ est contenu dans le demi-plan ouvert $\mathfrak{Re}(\cdot) > s_0$.) □

REMARQUE 3.8 — Si l'on se borne à ne considérer que des valeurs *réelles* de la variable $s$, alors on peut établir aisément que la somme $f(s)$ de la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le demi-plan $s > \sigma_c$. Il suffit bien entendu de considérer la cas $\sigma_c < +\infty$ et, en raisonnant par récurrence, de prouver que $f$ est dérivable sur $]\sigma_c, +\infty[$, de dérivée $f'$ vérifiant

$$f'(s) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n \log n}{n^s}$$

pour tout $s > \sigma_c$. Étant donné $s > s_1 > \sigma_c$ dans $\mathbf{R}$, nous pouvons écrire

$$\frac{a_n \log n}{n^s} = \frac{\log n}{n^{s-s_1}} \cdot \frac{a_n}{n^{s_1}}. \tag{4}$$

La série des $a_n n^{-s_1}$ est convergente par hypothèse (puisque $s_1 > \sigma_c$) tandis que la suite de terme général $\frac{\log n}{n^{s-s_1}}$ tend vers 0 et est décroissante à partir d'un certain rang puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\log u}{u^a} = \frac{1 - a\log u}{u^{a+1}} < 0$$

dès que $u > e^{1/a}$. On en déduit la convergence de la série de terme général (4) (par transformation d'Abel, cf. Proposition 3.1) pour tout $s > \sigma_c$. Cette convergence est en outre uniforme sur tout intervalle $[s_1, +\infty[$ avec $s_1 > \sigma_c$ en vertu de la proposition 3.3, donc $f$ est dérivable sur $]\sigma_c, +\infty[$ et $f'(s)$ est la somme de la série des $a_n(\log n)n^{-s}$.

**(1.2)** Ce qui précède suffit à établir l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ au demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. Nous approfondirons cela au chapitre suivant.

EXEMPLE 3.9 — Considérons la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

qui est convergente pour $s > 0$ (série alternée) et divergente pour $s \leqslant 0$ (le terme général ne tend pas vers 0) ; son abscisse de convergence est donc $\sigma_c = 0$. Sa somme $f$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. Pour $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathfrak{Re}(s) > 1$, la convergence absolue des séries permet de permuter les termes et donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots - \frac{2}{2^s} - \frac{2}{4^s} - \frac{2}{6^s} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \\
&= f(s).
\end{aligned}$$

En observant que l'on a

$$1 - \frac{2}{2^s} = 1 - e^{(1-s)\log 2} = (s-1)\log 2 + o(s-1)$$

au voisinage de 1, l'identité

$$(s-1)\zeta(s) = (s-1)\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)^{-1} f(s)$$

fait apparaître au membre de droite une fonction méromorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$, de valeur

$$\frac{1}{\log 2} f(1) = \frac{1}{\log 2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1$$

en $s = 1$. Nous venons ainsi de prouver que la fonction $\zeta$ possède un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ ayant un pôle simple en $s = 1$, de résidu 1.

On ne peut pas exclure *a priori* que le prolongement de $\zeta$ ait des pôles aux zéros de $(1 - 2^{1-s})$ distincts de 1, c'est-à-dire aux points de $1 + \frac{2i\pi}{\ln 2}\mathbf{Z}$ distincts de 1. Nous verrons plus loin que tel est bien le cas, ce qui montrera *a posteriori* que ces pôles apparents sont des zéros de $f$.

**(1.3)** L'abscisse de convergence d'une série Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^s}$ est étroitement relié au comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n.$$

Nous nous contenterons du résultat élémentaire suivant.

PROPOSITION 3.10. — *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

*(i) l'abscisse de convergence $\sigma_c$ est finie ou égale à $-\infty$ (c'est-à-dire la série de Dirichlet converge en un point de* $\mathbf{C}$*) ;*

*(ii) la suite $(a_n)$ a une croissance polynomiale : il existe $d > 0$ tel que $a_n = \mathrm{O}(n^d)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ;*

*(iii) la fonction sommatoire a une croissance polynomiale : il existe $c \geqslant 0$ tel que $S(x) = \mathrm{O}(x^c)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.*

*Démonstration.* Si la série de Dirichlet converge en $\sigma \in \mathbf{R}$, alors $a_n n^{-\sigma} = \mathrm{o}(1)$ et donc $a_n = \mathrm{o}(n^\sigma)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Ceci établit (i) $\Rightarrow$ (ii).

S'il existe $d > 0$ tel que $a_n = \mathrm{O}(n^d)$ quand $n$ tend vers $+\infty$, alors

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n = \mathrm{O}\left(\sum_{n \leqslant x} n^d\right) = \mathrm{O}(n^{d+1}),$$

la dernière égalité se déduisant, par exemple, de la comparaison série-intégrale (Lemme 1.4). Ceci établit (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Finalement, s'il existe $c \geqslant 0$ tel que $S(x) = \mathrm{O}(x^c)$ quand $x$ tend vers $+\infty$, alors

$$a_n = S(n) - S(n-1) = \mathrm{O}(n^c)$$

quand $n$ tend vers $+\infty$ et la série de Dirichlet converge donc en $s = c + 2$. Ceci établit (iii) $\Rightarrow$ (i) et achève la démonstration.

□

**(1.4)** Nous achevons cette première étude des séries de Dirichlet en définissant leur *abscisse de convergence absolue.*

Partant d'une série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$, nous pouvons considérer la série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^s}$ et lui appliquer ce qui précède.

DÉFINITION 3.11. — *L'*abscisse de convergence absolue *d'une série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$ est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-s}$. C'est l'unique élément de $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que la série $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-s}$ soit convergente sur $]\sigma_a, +\infty[$ et divergente sur $]-\infty, \sigma_a[$.*

LEMME 3.12. — *L'abscisse de convergence $\sigma_c$ et l'abscisse de convergence absolue $\sigma_a$ d'une série de Dirichlet vérifient les inégalités*

$$\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1.$$

*Démonstration.* L'inégalité $\sigma_c \leqslant \sigma_a$ est claire puisque la convergence absolue implique la convergence. Si $s_0 > \sigma_c$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{o}(1)$$

par convergence, donc

$$\frac{a_n}{n^{s_0+1+\varepsilon}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

et la série $a_n n^{-(s_0+1+\varepsilon)}$ est absolument convergente. On en déduit

$$\sigma_a \leqslant 1 + s_0 + \varepsilon,$$

et on conclut en faisant tendre $s_0$ vers $\sigma_c$ et $\varepsilon$ vers 0. □

EXEMPLE 3.12 — Là encore, tous les cas sont possibles :
- — $\sigma_a = \sigma_c = -\infty$ si $a_n = \frac{1}{n!}$ ;
- — $\sigma_a = \sigma_c = +\infty$ si $a_n = n!$ ;
- — $\sigma_c = \sigma_a = 1$ si $a_n = 1$ ;
- — $\sigma_c = 0$ et $\sigma_a = 1$ si $a_n = (-1)^{n+1}$.

En général, une série de Dirichlet est donc divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_c$, convergente mais non absolument convergente sur la bande $\sigma_c < \mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_a$, de largeur au plus 1, et absolument convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re} > \sigma_a$.

## 3.2. Les séries de Dirichlet des fonctions arithmétiques

**(2.1)** Comme nous l'avons dit, les séries de Dirichlet sont naturellement les séries génératrices des fonctions arithmétiques. Pour $f \in \mathscr{A}$, posons

$$L_f(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Si $f$ est à croissance polynomiale, alors l'abscisse de convergence de $L_f$ est dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ (Proposition 3.10). Nous noterons $\sigma_f$ l'abscisse de convergence *absolue* de $L_f$.

PROPOSITION 3.13. — *Si $f, g \in \mathscr{A}$ sont deux fonctions arithmétiques telles que $\sigma_f, \sigma_g < +\infty$, alors $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$ et*

$$L_{f*g}(s) = L_f(s) L_g(s).$$

*Démonstration.* Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $a = \mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_g)$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \frac{|f * g(n)|}{|n^s|} &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a} \left| \sum_{uv=n} f(u) g(v) \right| \\ &\leqslant \sum_{n \geqslant 1} \sum_{uv=n} \frac{|f(u)|}{u^a} \frac{|f(v)|}{v^a} \\ &\leqslant \left( \sum_{u \geqslant 1} \frac{|f(u)|}{u^a} \right) \left( \sum_{v \geqslant 1} \frac{|g(v)|}{v^a} \right). \end{aligned}$$

Cela montre que $L_{f*g}(s)$ converge absolument si $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$, donc $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$. Sous cette hypothèse, les inégalités précédentes deviennent des égalités lorsqu'on omet les modules puisque la convergence absolue permet de regrouper les termes à notre guise. □

COROLLAIRE 3.14. — *Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible et si $\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}} < +\infty$, alors*

$$L_f(s) L_{f^{(-1)}}(s) = 1$$

*pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$. En particulier, $L_f(s)$ ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$.*

EXEMPLE 3.15 — 1. On a $L_1(s) = \zeta(s)$ et $\sigma_1 = 1$. L'inverse de 1 est la fonction de Möbius, qui vérifie $\sigma_\mu \leqslant 1$ puisque $|\mu(n)| \leqslant 1$ pour tout $n$. Comme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\mu(n)|}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}$$

diverge, il vient $\sigma_\mu = 1$. On en déduit que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, ainsi que l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

2. On sait que la fonction $d$ comptant le nombre de diviseurs d'un entier vérifie $d = 1 * 1$. On a donc $\sigma_d \leqslant 1$, puisque $\sigma_1 = 1$, puis $\sigma_d = 1$ puisque

$$\Sigma_{n\geqslant 1} \frac{d(n)}{n} \geqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tels que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

3. On sait que $\varphi = \mathrm{id} * \mu$. Comme $L_{id}(s) = \zeta(s-1)$ a une abscisse de converge absolue égale à 2, $\sigma_\varphi \leqslant 2$. Il s'agit en fait d'une égalité puisque

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^2} \geqslant \sum_p \frac{p(p-1)}{p^2}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

pour tout nombre complexe $s$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 2$.

4. Considérons finalement la fonction de von Mangolt $\Lambda = \mu * \log$. On a $\sigma_\Lambda \leqslant 1$ et $\sigma_\Lambda = 1$ par divergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}.$$

Puisque $L_{\log}(s) = -\zeta'(s)$ et $L_\mu(s) = \zeta(s)^{-1}$, nous obtenons l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

**(2.2)** Le résultat suivant montre qu'une fonction arithmétique à croissance polynomiale est entièrement déterminée par sa série de Dirichlet. Il permet en particulier d'établir des identités entre fonctions arithmétiques à partir de calculs sur leurs séries de Dirichlet.

PROPOSITION 3.16. — *Soit $f, g \in \mathscr{A}$ deux fonctions arithmétiques à croissance polynomiale. S'il existe $c > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ tel que $L_f(s) = L_g(s)$ pour tout $s \in [c, +\infty[$, alors $f = g$.*

*Démonstration.* En posant $h = f - g$, nous avons $\sigma_h \leqslant \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ et $L_h(s) = 0$ pour tout $s \in [c, +\infty[$. Supposons que $h$ ne soit pas identiquement nulle et désignons par $n_0$ le plus petit entier $n$ tel que $h(n) \neq 0$. L'hypothèse nous permet d'écrire

$$\frac{h(n_0)}{n_0^{c+t}} = -\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{h(n)}{n^{c+t}}$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. En observant que l'on a

$$\frac{n_0^{c+t}}{n^{c+t}} = \frac{n_0^c}{n^c} \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^t \leqslant \frac{n_0^c}{n^c} \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, il vient

$$|h(n_0)| \leqslant n_0^c \left(\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|h(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. Nous en déduisons $h(n_0) = 0$ en faisant tendre $t$ vers $+\infty$, ce qui contredit notre hypothèse ; la fonction $h$ est donc identiquement nulle, c'est-à-dire $f = g$. □

COROLLAIRE 3.17. — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique à croissance polynomiale. Si $f$ n'est pas identiquement nulle, il existe un nombre réel $c$ tel que $L_f(s)$ ne s'annule pas sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.*

*Démonstration.* Supposons que $n_0$ soit le plus petit entier tel que $f(n_0) \neq 0$. Si $s \in \mathbf{C}$ est un nombre complexe tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et $L_f(s) = 0$, nous pouvons écrire comme dans la démonstration précédente

$$|f(n_0)| \leqslant n_0^{\mathfrak{Re}(s)} \sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^{\mathfrak{Re}(s)}} = n_0^c \left(\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^{\mathfrak{Re}(s)-c}$$

pour tout $c > \sigma_f$ et donc $\mathfrak{Re}(s)$ est majorée en fonction de $n_0$ et $c$. □

**(2.3)** Sans surprise, enfin, les séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives ont des propriétés particulières.

PROPOSITION 3.18. — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique* multiplicative *à croissance polynomiale.*

(i) *Pour tout nombre premier $p$, la série restreinte*

$$L_{f,p}(s) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}$$

*converge absolument uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$.*

(ii) *La suite des produits $\prod_{p \leqslant N} L_{f,p}(s)$ converge uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et*

$$L_f(s) = \prod_p L_{f,p}(s).$$

(iii) *S'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\sum_p \sum_{m \geqslant 1} \frac{|f(p^m)|}{p^{mc}} < +\infty,$$

*alors $\sigma_f \leqslant c$ et*

$$L_f(s) = \prod_p L_{f,s}(s)$$

*pour tout $s \in \mathbf{C}$ de partie réelle strictement supérieure à $c$.*

*Démonstration.* (i) Il suffit d'écrire

$$\sum_{m\geqslant 0}\left|\frac{f(p^m)}{p^{ms}}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{|f(n)|}{n^c} < +\infty$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c > \sigma_f$.

(ii) Notons $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à $N$.

$$\prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}}\left(\sum_{m\geqslant 0}\frac{f(p^m)}{p^{ms}}\right) = \sum_{\nu:\mathscr{P}_{\leqslant N}\to\mathbf{N}}\ \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}}\frac{f(p^{\nu(p)})}{p^{\nu(p)s}} = \sum_{\nu:\mathscr{P}_{\leqslant N}\to\mathbf{N}}\frac{f(n_\nu)}{n_\nu^s},$$

où l'on a posé $n_\nu = \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} p^{\nu(p)}$. Lorsque $\nu$ parcourt l'ensemble des applications de $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ dans $\mathbf{N}$, $n_\nu$ décrit l'ensemble des entiers strictement positifs dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à $N$. Puisque ceux-ci contiennent certainement tous les entiers inférieurs à $N$, nous en déduisons

$$\left|L_f(s) - \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s)\right| \leqslant \sum_{n>N}\frac{|f(n)|}{n^c},$$

ce qui établit la convergence de $\prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} L_{f,p}(s)$ vers $L_f(s)$, uniformément sur tout demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.

(iii) Cette hypothèse équivaut à la convergence du produit infini

$$\prod_p\left(1 + \sum_{m\geqslant 1}\left|\frac{f(p^m)}{p^{mc}}\right|\right).$$

En raisonnant comme au point (ii), la multiplicativité de $f$ entraîne la majoration

$$\sum_{n\leqslant N}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leqslant \prod_{p\leqslant N}\left(1 + \sum_{m\geqslant 1}\left|\frac{f(p^m)}{p^{mc}}\right|\right)$$

pour tout $N \geqslant 2$, et donc la convergence de $L_f(s)$, uniformément sur le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$. On a donc $\sigma_f \leqslant c$, et $L_f(s) = \prod_p L_{f,p}(s)$ d'après le point (ii). □

REMARQUE 3.19 — Lorsque $f$ est *complètement multiplicative*, c'est-à-dire vérifie $f(mn) = f(m)f(n)$ pour *tous* entiers $m$ et $n$, la formule du point (ii) s'écrit plus simplement sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

C'est une généralisation de la formule du produit d'Euler.

EXEMPLE 3.20 — On a

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

pour tout complexe $s$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

# 4. La fonction zêta de Riemann

Nous amorçons dans ce chapitre l'étude de la fonction $\zeta$ en établissant l'existence d'un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ satisfaisant à une équation fonctionnelle associée à la symétrie de centre $\frac{1}{2}$.

La fonction $\Gamma$ d'Euler joue un rôle important dans l'étude de $\zeta$ et constitue en soit un sujet digne d'intérêt...

## 4.1. La fonction Gamma d'Euler

Euler observa que l'identité

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t,$$

valable pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et que l'on démontre aisément par récurrence et intégration par parties, permet d'étendre le domaine de définition de la fonction factorielle : le second membre garde en effet un sens lorsque l'entier $n$ est remplacé par n'importe quel nombre réel dans $]-1, +\infty[$.

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Remarque 4.1. — On a immédiatement

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1 \ \text{ et } \ \Gamma(n) = (n-1)! \text{ pour tout } n \geqslant 1$$

ainsi que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

si l'on connaît la valeur de l'intégrale de Gauss [6].

Proposition 4.2. — (i) *La fonction* $\Gamma$ *ainsi définie est* holomorphe *sur le demi-plan* $\mathfrak{Re}(z) > 0$*, sur lequel :*

(i) *elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ ; \tag{6}$$

(ii) *elle se prolonge de manière unique en une fonction méromorphe* [7] *sur* $\mathbf{C}$*, encore notée* $\Gamma$ *;*

(iii) *la fonction* $\Gamma$ *satisfait l'équation fonctionnelle (2) sur* $\mathbf{C}$*. Ses pôles, tous simples, sont les entiers négatifs, et le résidu de* $\Gamma$ *en* $-n$ *est* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

6. C'est un calcul que l'on effectue classiquement en exprimant le carré de cette intégrale sous la forme d'une intégrale double, puis en passant en coordonnées polaires. On peut également déduire ce résultat de la *formule des compléments* pour la fonction $\Gamma$, voir la remarque 5.8.

7. Rappelons qu'une *fonction méromorphe* sur un ouvert $U$ de $\mathbf{C}$ est une fonction définie sur le complémentaire dans $U$ d'un ensemble $E$ de points isolés, dont chacun est un *pôle* pour $f$ : pour tout $z_0 \in E$, il existe un entier $k \geqslant 0$ et une fonction holomorphe $h$ sur un voisinage $V$ de $z_0$ dans $U$ tels que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$.

*Démonstration.* (i) Il s'agit d'une application du *théorème d'holomorphie sous l'intégrale* (voir les rappels d'analyse complexe à la fin de ce document) :

- la fonction
$$\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{C}, \quad (t,z) \mapsto e^{-t}t^{z-1} = e^{-t+(z-1)\log t}$$
est continue, donc mesurable et intégrable par rapport à $t$ sur tout segment, et elle est holomorphe par rapport à la seconde variable;
- pour tous nombres réels $0 < a < b$ et tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ tel que $a \leqslant \mathfrak{Re}(z) \leqslant b$, la majoration
$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\mathfrak{Re}(z)-1} \leqslant \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in ]0,1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in [1,+\infty[ \end{cases}$$
fournit une domination *uniforme* en $z$ dans la bande verticale $\mathscr{B}_{a,b} = \{z \in \mathbf{C} \mid a \leqslant \mathfrak{Re}(z) \leqslant b\}$ par une fonction intégrale sur $[0,+\infty[$.

Sous ces hypothèses, le théorème d'holomorphie sous l'intégrale fournit l'holomorphie de la fonction $\Gamma$ sur l'intérieur de $\mathscr{B}_{a,b}$, et donc sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$ puisqu'il s'agit d'une propriété *locale.*

(ii) L'*unicité* du prolongement méromorphe se déduit directement du *principe du prolongement analytique*(8). En effet, si $f$ et $g$ sont deux fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ qui coïncident avec $\Gamma$ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$, alors l'ensemble $E$ de leurs pôles est discret et $f$ et $g$ sont holomorphes sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus E$, qui est connexe; puisqu'elle coïncident (avec $\Gamma$) sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$, on obtient $f = g$. Cette unicité justifie l'abus de notation consistant à utiliser $\Gamma$ pour désigner le prolongement méromorphe obtenu.

*Existence* — Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction $\Gamma_n$ définie sur le demi-plan $\Omega_n = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > -n\}$ par
$$\Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$
C'est une fonction méromorphe sur ce demi-plan, ayant des pôles simples en $0, -1, \ldots, -(n-1)$. Les fonctions $\Gamma_{n+1}$ et $\Gamma_n$ coïncident sur $\Omega_n$ puisque
$$\Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma_n(z)$$
pour tout $z \in \Omega_n \setminus \{0,-1,\ldots,-(n-1)\}$ en vertu de l'équation fonctionnelle de $\Gamma$. Il existe donc une unique fonction $F$ sur $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ telle que $F(z) = \Gamma_n(z)$ pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ vérifiant $\mathfrak{Re}(z) > -n$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec un pôle simple en tout entier négatif.

(iii) L'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ entre fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ est vérifiée sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$, donc également sur tout $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ en vertu du principe du prolongement analytique. Considérons finalement $n \in \mathbf{N}$ et écrivons
$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$
pour tout $z \in \Omega_{n+1} \setminus \{0,-1,\ldots,-n\}$. Comme $\Gamma(1) = 1$, nous en déduisons l'équivalent
$$\Gamma(z) \sim \frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)(z+n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$$
au voisinage de $-n$. Ceci prouve que $\Gamma$ admet un pôle simple en $-n$, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$. □

8. Soit $f$ et $g$ deux fonctions méromorphes sur un ouvert *connexe* $U$ de $\mathbf{C}$. Si $f$ et $g$ coïncident sur une partie $A$ de $U$ *admettant un point d'accumulation* dans $U$, alors $f = g$.

Le prolongement méromorphe de la fonction $\Gamma$ que nous venons de construire à partir de l'équation fonctionnelle peut s'obtenir différemment, en écrivant explicitement une fonction méromorphe qui coïncide avec $\Gamma$ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$ (voir également l'exercice 1 sur la fiche TD4).

Pour ce faire, on commence par écrire

$$e^{-t} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. La domination

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \exp n\left(-\frac{t}{n}\right) = e^{-t}$$

vaut pour $n > |t|$ en vertu de l'inégalité $\log(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$. Le théorème de convergence dominée nous permet donc d'écrire :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\, \mathrm{d}u$$

pour tout nombre complexe $z$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$. On définit classiquement la *fonction Bêta d'Euler* en posant

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1}\, \mathrm{d}u$$

pour $x, y$ dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$. En utilisant de façon répétée l'identité

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

(cf. le lemme ci-dessous), il vient

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{z+n} B(n,z) n^z = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(z+1)\cdots(z+n)} B(1,z) n^z,$$

d'où au final

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{7}$$

puisque $B(1,z) = \frac{1}{z}$.

LEMME 4.3. — *Pour tous nombres complexes $x, y$ tels que $\mathfrak{Re}(x), \mathfrak{Re}(y) > 0$,*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

*Démonstration.* Une intégration par parties conduit à

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-u)^x u^{y-1}\, \mathrm{d}u = \frac{x}{y} \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^y\, \mathrm{d}u = \frac{x}{y} B(x,y+1).$$

En développant $(1-u)^y = (1-u)^{y-1}(1-u)$, il vient

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y).$$

La conclusion s'obtient en combinant ces deux identités. □

L'identité (7) s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} n^{-z} \qquad (\mathfrak{Re}(z) > 0). \tag{8}$$

Au membre de droite figure une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous allons voir que la convergence est uniforme sur tout compact, et donc que la limite est holomorphe sur $\mathbf{C}$ ; c'est l'expression de $\Gamma$ que l'on souhaitait obtenir.

PROPOSITION 4.4 (FORMULE DE GAUSS) — *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}\, n^{-z}$$

*et la convergence est uniforme sur tout compact. En particulier, la fonction* $\Gamma$ *ne s'annule en aucun point de* $\mathbf{C}$.

*Démonstration.* La stratégie de démonstration est très classique : on établit tout d'abord que le membre de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ en prouvant que la convergence est uniforme sur tout compact, puis, en notant $Z$ l'ensemble (discret) des zéros de $\Gamma$, on observe que les deux membres sont des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus Z$ qui, comme on vient de le voir, coïncident sur l'ouvert non vide $\mathfrak{Re}(z) > 0$; l'égalité vaut alors sur $\mathbf{C} \setminus Z$ en vertu du principe du prolongement analytique. Le membre de droite étant holomorphe sur $\mathbf{C}$, on en déduit immédiatement $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$, posons

$$u_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}.$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ ayant un zéro simple en $0, -1, \ldots, -n$. Écrivons

$$u_n(z) = n^{-z} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)$$

et

$$n^{-z} = e^{-z\log n} = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) - \log(k)\right) = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \cdot \exp\left(z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

(le second facteur du membre de droite compense le terme d'indice $k = n$ dans la somme), d'où

$$u_n(z) = z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Le facteur $e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ tend vers 1 uniformément sur tout compact, donc nous pouvons le négliger dans ce qui suit. Fixons $R > 0$ et $z$ tel que $|z| \leqslant R$. Pour $k > R$, il vient

$$\left|\frac{z}{k}\right| < 1, \quad \text{et donc} \quad 1 + \frac{z}{k} = e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right)},$$

en définissant $\log(1+x)$ par la série entière usuelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Ceci permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} &= z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot \prod_{R<k\leqslant n} e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \\ &= z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} e^{v_{R,n}(z)} \end{aligned}$$

en posant

$$v_{R,n}(z) = \sum_{R<k\leqslant n}\left(\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Il existe un nombre $C(R) > 0$ tel que

$$|\log(1+x) - x| \leqslant C(R)|x|^2 \ \text{ pour tout } x \in \mathbf{C} \text{ tel que } |x| \leqslant \max_{k\in\mathbf{N},\, k>R} \frac{R}{k} = \frac{R}{R+1}.$$

On en déduit la majoration suivante pour tous entiers $m,n$ tels que $R < m < n$ :

$$\begin{aligned}
|v_{R,n}(z) - v_{R,m}| &\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k}\right| + |z| \sum_{k=m+1}^{n} \left|\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right| \\
&\leqslant (C(R)R^2 + R)\cdot \sum_{R<k\leqslant n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant R$. Le membre de droite tend vers 0 lorsque $m$ et $n$ tendent vers $+\infty$, donc ceci établit la convergence uniforme de la suite $(v_{R,n})$ sur le disque fermé $D(0,R)$.

Nous avons obtenu ainsi la convergence uniforme de la suite $(u_n)$ sur $D(0,R)$ vers une fonction $u_\infty$ s'écrivant

$$u_\infty(z) = z \prod_{1\leqslant k\leqslant R} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} e^{v_{R,\infty}(z)}$$

pour tout $z \in D(0,R)$. Cette fonction est holomorphe sur l'intérieur de $D(0,R)$, avec un zéro simple en chacun des points $0,-1,\ldots,-\lfloor R\rfloor$. Puisque $R$ a été choisi arbitrairement, la fonction $u_\infty$ est donc holomorphe sur $\mathbf{C}$, avec un zéro simple en chaque entier négatif. □

COROLLAIRE 4.5 (FORMULE DU PRODUIT DE WEIERSTRASS) — *Pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

*où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.*

*Démonstration.* Il suffit d'écrire, comme dans la démonstration de la proposition précédente,

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} n^{-z} = e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e^{za_n} z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

avec

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \gamma + \mathrm{o}(1).$$

□

REMARQUE 4.6. — La non-annulation de $\Gamma$ sur $\mathbf{C}$ constituera une information importante dans l'étude des singularités (zéros et pôles) du prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ sur $\mathbf{C}$.

Outre l'équation fonctionnelle, la fonction $\Gamma$ satisfait à plusieurs identités remarquables. Parmi celles-ci, en voici qui joueront un rôle important par la suite.

PROPOSITION 4.7 (FORMULE DES COMPLÉMENTS) — *Pour tout $z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$,*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

*Démonstration.* L'équation fonctionnelle et la formule du produit de Weierstrass permettent d'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} = z\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{z}{k}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right) = z\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).$$

On remarque que le produit infini figurant à droite est uniformément convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$ en vertu de l'estimation $\log\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)=\frac{z^2}{k^2}+z^4\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)$ et de la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ (cf. la démonstration de la formule de Gauss ci-dessus).

La conclusion provient immédiatement de la *formule du produit* pour la fonction sinus (Euler) : pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

(voir l'exposé 9 pour une démonstration).

□

REMARQUE 4.7. — En faisant $z=\frac{1}{2}$, la formule des compléments fournit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi},\ \text{ et donc }\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Vu la remarque 5.1, ce calcul fournit donc une manière de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

PROPOSITION 4.8 (FORMULE DE DUPLICATION) — *Pour tout* $z\in\mathbf{C}\setminus(-\mathbf{N})$,

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)=2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z).$$

*Démonstration.* En vertu de la formule de Gauss, le membre de gauche est la limite, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de

$$\begin{aligned}\frac{n^{\frac{z}{2}}n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)}\cdot\frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} &= \frac{2^{2n+2}(n!)^2n^{z+\frac{1}{2}}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)}\\ &= \frac{(n!)^2n^{z+\frac{1}{2}}2^{2(n+1)}}{(2n+1)!(2n+1)^z}\cdot\frac{(2n+1)!(2n+1)^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)}.\end{aligned}$$

On a

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^z\sim 2^{-z}$$

et, par la formule de Stirling,

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sim\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{2(2n+1)\pi}}\sim\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+1}n^{-\frac{1}{2}}e\sqrt{\pi}\sim 2^{-(2n+1)}n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi},$$

donc

$$\frac{n^{\frac{z}{2}}n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)}\cdot\frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}\sim 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

La conclusion en découle immédiatement en faisant tendre $n$ vers $+\infty$. □

REMARQUE 4.9. — En faisant $z=1$, on retrouve de nouveau

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

### 4.2. Prolongement de la fonction zêta : première méthode

Commençons par définir les *nombres de Bernoulli* (voir également l'exposé 4).

La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec des pôles simples le long de $2i\pi\mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Elle se prolonge par continuité en 0 puisque $e^z - 1 \sim z$, donc elle est holomorphe au voisinage de 0. Son développement en série entière à l'origine s'écrit

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$

avec $B_n \in \mathbf{R}$. La série entière obtenue a pour rayon de convergence $2\pi$ (la distance de l'origine au pôle le plus proche).

Le nombre $B_n$ est par définition le *$n$-ième nombre de Bernoulli.* Il s'agit manifestement d'un nombre *rationnel* en vertu des règles de calcul sur les séries entières.

Le calcul des premiers nombres de Bernoulli s'effectue facilement :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1} &= \left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots\right)^{-1} \\
&= 1-\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots\right)^2-\ldots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4}\right)z^2+\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{8}\right)z^3+\ldots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}+0\cdot z^3+\ldots
\end{aligned}$$

donc

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0.$$

PROPOSITION 4.10. — *Les nombres de Bernoulli sont rationnels et $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.*

*Démonstration.* La première assertion découle immédiatement de la rationnalité des coefficients de la série exponentielle et des règles de calcul sur les séries entières. Pour obtenir la seconde, il suffit de vérifier que la fonction $f$ définie par

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^z-1}+1\right) = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

est *paire*, ce qui est immédiat. □

En poussant plus loins les calculs, on obtient

$$B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{12},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}\ \ldots$$

Nous en savons assez pour construire un prolongement méromorphe de la fonction zêta sur $\mathbf{C}$. Pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = n^s \int_0^\infty e^{-nt} t^s\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

par le changement de variable $t \leftarrow nt$, donc

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{-s} \, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En sommant, nous en déduisons, pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} \left( \sum_{n\geqslant 1} e^{-nt} \right) t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

L'interversion de l'intégrale et de la somme est ici justifiée par le théorème de Fubini-Tonelli puisque la quantité

$$\int_0^{\infty} \sum_{n\geqslant 1} |e^{-nt} t^{s-1}| \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{\mathfrak{Re}(s)-1} \, \mathrm{d}t$$

est finie (l'intégrabilité en 0 pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ découle de l'estimation $t^{\mathfrak{Re}(s)-1}(e^t-1)^{-1} \sim t^{\mathfrak{Re}(s)-2}$).

Pour aller plus loin, nous allons traiter séparément les bornes 0 et $\infty$ :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^s}{e^t - 1} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Dans le membre de droite, la seconde intégrale définit une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}$ : il suffit en effet d'invoquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec la domination

$$\left| \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right| \leqslant \frac{t^a}{e^t - 1}$$

pour tout $s$ dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \leqslant a$. Dans la première intégrale, nous pouvons remplacer $\frac{t}{e^t-1}$ par son développement en série entière en 0 et intervertir la somme et l'intégrale puisque le segment $[0,1]$ est contenu dans l'intérieur du disque de convergence $D(0,2\pi)$ :

$$\int_0^1 \frac{t^s}{e^t - 1} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \int_0^1 t^{n+s-2} \, \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)}.$$

La série de fonctions obtenue est normalement convergente sur tout compact $K$ de $\mathbf{C} \setminus \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ : en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $|s-(1-n)| \geqslant \delta$ pour tout $s \in K$ et $n \in \mathbf{N}$, et

$$\sum_{n\geqslant 0} \left| \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)} \right| \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{n\geqslant 0} \frac{|B_n|}{n!}$$

est fini puisque 1 est à l'intérieur du disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$. La somme de cette série de fonctions holomorphes est donc elle-même holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{1, 0, -1, -2, \dots\}$. Il s'agit plus précisément d'une fonction *méromorphe* sur $\mathbf{C}$ ayant un pôle simple en 1 et en chaque entier négatif ; en effet, étant donné $n_0 \in \mathbf{N}$, il suffit d'écrire cette somme sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)} = \frac{B_{n_0}}{n_0!} \frac{1}{s-(1-n_0)} + g_{n_0}(s), \quad \text{avec } g_{n_0}(s) = \sum_{n\geqslant 1,\ n\neq n_0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)}$$

et d'observer que $g_{n_0}$ est holomorphe au voisinage de $n_0$.

Au final, l'identité

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)} + \int_1^{\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \, \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{9}$$

valable sous la condition $\mathfrak{Re}(s) > 1$, fournit bien un prolongement méromorphe de $\zeta$ sur $\mathbf{C}$ : le membre de droite est une fonction méromorphe $f$ sur $\mathbf{C}$, donc $\Gamma^{-1}f$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui coïncide avec $\zeta$ sur son demi-plan de définition.

L'étude des singularités de ce prolongement est aisée. En posant

$$f(s) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s-(1-n)} + \int_1^{\infty} \frac{t^s}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$$

et en utilisant les développements asymptotiques

$$\Gamma(s) = 1 + \mathrm{O}_{s\to 1}(s-1)$$

et

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n} + \mathrm{O}_{s\to -n}(1), \quad n \in \mathbf{N},$$

il vient :

– d'une part

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} f(s) = (1+\mathrm{O}(s-1)) \cdot \left(\frac{B_1}{1!}\frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)\right) = \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)$$

au voisinage de 1 puisque $B_1 = 1$, donc ce prolongement a un pôle simple en 1, de résidu 1 ;

– d'autre part

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} f(s) = \left((-1)^{n-1}(n-1)!(s+n-1) + \mathrm{O}((s+n-1)^2\right) \cdot \left(\frac{B_n}{n!}\frac{1}{s+n-1} + \mathrm{O}(1)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}B_n}{n} + \mathrm{O}(s+n-1)\end{aligned}$$

au voisinage de $-(n-1)$, pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$\zeta(-(n-1)) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n},$$

ou encore

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

pour tout $n \geqslant 0$.

En se rappelant que $B_n$ s'annule pour tout $n \geqslant 3$ impair, nous obtenons donc l'annulation (du prolongement) de $\zeta$ en tous les entiers strictement négatifs pairs ; ce sont les *zéros triviaux* de cette fonction.

REMARQUE 4.11. — Les valeurs $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ et $\zeta(-1) = \frac{1}{12}$ peuvent s'écrire de manière provocatrice

$$1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2}$$

et

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12},$$

où les membres de gauche sont les séries divergentes obtenues en évaluant terme à terme $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ en 0 et en 1. Ces deux identités sont à comprendre de la façon suivante : étant donnée une suite $\underline{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes, considérons la série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ ; en supposant

(a) que $D(s)$ a une abscisse de convergence finie ;

(b) et que $D(s)$ admet un prolongement méromorphe sur un demi-plan contenant 0 et holomorphe en 0

cela fait sens de poser
$$\Sigma_D(\underline{a}) = \lim_{s\to 0} D(s).$$
Il est clair que les suites $\underline{a}$ vérifiant les deux conditions ci-dessus forment un espace vectoriel complexe et que l'application $\underline{a} \mapsto \Sigma_D(\underline{a})$ est linéaire. En outre, si $a_n \geqslant 0$ et si la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ associée à la suite $\underline{a}$ est convergente, alors
$$\Sigma_D(\underline{a}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$
En effet,
$$D(0) = \lim_{s\to 0,\ s>0} D(s) = \lim_{s\to 0,\ s>0} \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n\geqslant 1} \lim_{s\to 0,\ s>0} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n\geqslant 1} a_n$$
en vertu du théorème de convergence monotone.L'opérateur $\Sigma_D$ est un exemple de *procédé de sommation.*

## 4.3. Prolongement de la fonction zêta : deuxième méthode

### (4.3.1) Préliminaires d'analyse de Fourier

LEMME 4.12. — *Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$, périodique de période 1. Posons*
$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$
*pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$. Si la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, alors*
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$$
*pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

*Démonstration.* Posons $g(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Il s'agit de la somme d'une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbf{R}$, donc $g$ est continue et vérifie
$$\int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = c_n$$
pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La fonction $f - g$ est continue, 1-périodique et à coefficients de Fourier identiquement nuls, donc est orthogonale à toutes les fonctions $(t \mapsto e^{2i\,\pi nt})$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ ; ces dernières formant une base hilbertienne, on en déduit $f - g = 0$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$, d'où $f - g = 0$ presque partout puis, par continuité, $f = g$. □

LEMME 4.13 (TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE GAUSSIENNE) — *Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,*
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}.$$

*Démonstration.* En complétant le carré dans l'exponentielle, nous obtenons :
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$
Nous allons calculer l'intégrale apparaissant au membre de droite à l'aide du théorème des résidus. Fixons $R > 0$ et considérons le chemin $\gamma_R$ constitué par le bord du rectangle de sommets $-R, R, R + i\xi$ et $-R + i\xi$ parcouru dans le sens indirect. La fonction $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$, donc
$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

On a d'autre part :

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x + i\int_0^{\xi} e^{-\pi(R+it)^2}\,\mathrm{d}t + \int_R^{-R} e^{-\pi(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x + i\int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\left|\int_0^{\xi} e^{-\pi(\pm R+it)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |\xi| \sup_{|t|\leqslant|\xi|} e^{-\pi(R^2-t^2)} \leqslant |\xi| e^{-R^2-\xi^2},$$

donc, en faisant tendre $R$ vers $+\infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il est bien connu que l'intégrale de droite est égale à 1 (on calcule son carré en appliquant le théorème de Fubini et en passant en coordonnées polaires). □

PROPOSITION 4.14 (FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON) — *Soit $f$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que :*

*(i) la famille $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ soit sommable;*

*(ii) la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ soit uniformément convergente sur $[0,1]$.*

*On a : Pour tout $x\in\mathbf{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) e^{-2i\pi nx}$$

*et, en particulier :*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

*Démonstration.* Posons $F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. La condition (ii) garantit que $F$ est une fonction continue et 1-périodique; en outre, elle permet d'écrire

$$c_n(F) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(n).$$

La famille $(c_n(F))_{n\in\mathbf{Z}}$ étant supposée sommable, nous pouvons appliquer le lemme précédent : pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

Il reste à évaluer les deux membres en 0 pour obtenir l'identité souhaitée :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

□

COROLLAIRE 4.15 (ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA FONCTION THÊTA) — *Posons, pour tout $t\in\mathbf{R}_{>0}$,*

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

*On a, pour tout $t>0$,*

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\theta(t).$$

*Démonstration.* Étant donné $t > 0$, la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 t} e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi y \frac{\xi}{\sqrt{t}}}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{\xi^2}{t}}$$

en vertu du lemme 14. La famille des $\widehat{f}(n)$ est manifestement sommable et la série des $f(x+n)$ converge normalement sur $[0,1]$ puisque

$$|f(x+n)| = e^{-\pi t(x+n)^2} \leqslant e^{-\pi t(n^2)}$$

sur ce segment. Nous pouvons donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f$, ce qui conduit à l'identité

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

**(4.3.2) Prolongement méromorphe et équation fonctionnelle de $\zeta$**

Considérons la fonction holomorphe $\Lambda$ définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ par

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

THÉORÈME 4.16. — *La fonction $\Lambda$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant pour uniques singularités des pôles simples en $0$ et $1$, de résidus respectifs $-1$ et $1$. En outre, ce prolongement satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$\forall s \in \mathbf{C}, \quad \Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

*Démonstration.* Pour tout nombre complexe $s$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$,

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}} n^{-s} \pi^{-\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

L'interversion de la somme et de l'intégrale se déduit du *théorème de Fubini* sur l'espace produit $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}_{>0}$, muni du produit de la mesure de comptage et de la mesure de Lebesgue. En effet, en posant $\sigma = \mathfrak{Re}(s)$, il vient :

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \left| e^{-n^2\pi u} u^{\frac{s}{2}-1} \right| \mathrm{d}u = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi u} u^{\frac{\mathfrak{Re}(s)}{2}-1}\, \mathrm{d}u = \pi^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \zeta(\sigma) < \infty,$$

donc

$$\Lambda(s) = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Nous reconnaissons la fonction $\theta$ de Jacobi :

$$\Lambda(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(\theta(u)-1) u^{\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^1 \frac{1}{2}(\theta(u)-1) u^{\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\theta(u)-1) u^{\frac{s}{2}}\, \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Dans le membre de droite, l'intégrale sur $[1,+\infty[$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout en entier : c'est une application du théorème d'holomorphie sous l'intégrale, en utilisant la domination

$$\frac{1}{2}|\theta(u)-1| \cdot |u^{\frac{s}{2}-1}| \leqslant \frac{u^{\frac{\mathfrak{Re}(s)}{2}-1}}{e^{\pi u}-1} = \mathrm{O}\left(e^{-\pi\frac{u}{2}}\right)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$. L'intégrale sur $[0,1]$ est plus problématique : on a $\theta(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$ au voisinage de 0 puisque

$$\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\theta\left(\frac{1}{u}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$$

en vertu de l'équation fonctionnelle, donc l'intégrabilité en 0 ne vaut que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ permet cependant de réécrire cette intégrale sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\theta\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{t}\theta(t) - 1\right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\theta(u) - 1) u^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(u^{\frac{1-s}{2}} - u^{-\frac{s}{2}}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\theta(u) - 1) u^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u}.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale obtenue définit de nouveau une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous avons ainsi obtenu l'identité

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\theta(u) - 1)\left(u^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

pour tout nombre complexe $s$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le membre de droite est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les seules singularités sont deux pôles simples en 0 et 1, de résidus respectifs $-1$ et 1, et qui est invariante par l'involution $s \mapsto 1 - s$. □

L'équation fonctionnelle

$$\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

peut se réécrire un peu plus simplement. En écrivant $\frac{1-s}{2} = 1 - \frac{s+1}{2}$, la formule des compléments et la formule de duplication conduisent à

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s)} \\
&= \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

et

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$.

COROLLAIRE 4.17. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}.$$

*Démonstration.* L'équation fonctionnelle fournit l'identité

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n) = (-1)^n 2^{1-2n}\pi^{-2n}(2n-1)!\zeta(2n).$$

On connaît par ailleurs les valeurs de zêta aux entiers négatifs :

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$, donc

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

La formule

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}$$

en découle immédiatement. □

COROLLAIRE 4.18. — *La fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *dont l'unique singularité est un pôle simple en* 1*, de résidu* 1*. Elle s'annule en tous les entiers pairs strictement négatifs (les zéros* triviaux*). Ses autres zéros sont tous contenus dans la bande verticale* $\{s \in \mathbf{C} \mid 0 \leqslant \mathfrak{Re}(s) \leqslant 1\}$ *et ils sont globalement préservés par les transformations* $s \mapsto 1-s$ *et* $s \mapsto \bar{s}$.

*Démonstration.* Le prolongement méromorphe de $\Lambda$ et de $\Gamma$ sur $\mathbf{C}$ donnent évidemment naissance à un prolongement méromorphe de $\zeta$ sur $\mathbf{C}$ :

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}\Lambda(s).$$

Le membre de droite est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$, et même sur $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque $\Lambda(s) = -\frac{1}{s} + \mathrm{O}(1)$ et $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} = \frac{s}{2} + \mathrm{O}(s^2)$ au voisinage de $s=0$. En outre, l'holomorphie de $\Lambda$ sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ force la fonction zêta à s'annuler en tout entier strictement négatif pair puisque tel est la cas de la fonction holomorphe $s \mapsto \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}$.

Pour aller plus loin, observons que la fonction zêta ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 1$ en vertu de l'identité

$$\zeta(s)\cdot\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

sur ce demi-plan (rappelons qu'il s'agit d'une reformulation de l'identité de convolution $\delta_1 = 1 * \mu$). Comme la fonction $\Gamma$ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ [9], on en déduit que

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

ne s'annule pas davantage pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, et donc également pour $\mathfrak{Re}(s) < 0$ en vertu de l'équation fonctionnelle. On en déduit que chaque entier strictement négatif pair est un zéro *simple* de $\zeta$ (ce serait sinon un zéro de $\Lambda$), et que $\zeta$ ne s'annule nulle part ailleurs sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) < 0$. Comme $\Gamma$ ne s'annule pas, les zéros non triviaux de $\zeta$, c'est-à-dire de partie réelle dans $[0,1]$, sont précisément les zéros de $\Lambda$; il sont donc invariants par la transformation $s \mapsto 1-s$ (symétrie de centre $\frac{1}{2}$). On a par ailleurs

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque les fonctions $\zeta$ et $s \mapsto \overline{\zeta(\bar{s})}$ sont holomorphes sur cet ouvert connexe et coïncident sur l'intervalle réel $]1,+\infty[$, qui contient des points d'accumulations.

9. Rappelons que son inverse est holomorphe sur $\mathbf{C}$...

On en déduit immédiatement que l'ensemble des zéros de $\zeta$ est stable par conjugaison complexe. Tout zéro non trivial $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ de $\zeta$ dans la bande critique $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$ vient donc accompagnés des zéros $\overline{s_0}, 1 - s_0$ et $1 - \overline{s_0}$. □

Pour aller plus loin, observons que la fonction zêta ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 1$ en vertu de l'identité

$$\zeta(s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

sur ce demi-plan (rappelons qu'il s'agit d'une reformulation de l'identité de convolution $\delta_1 = 1 * \mu$). Comme la fonction $\Gamma$ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ [10], on en déduit que

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

ne s'annule pas davantage pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, et donc également pour $\mathfrak{Re}(s) < 0$ en vertu de l'équation fonctionnelle. On en déduit que chaque entier strictement négatif pair est un zéro *simple* de $\zeta$ (ce serait sinon un zéro de $\Lambda$), et que $\zeta$ ne s'annule nulle part ailleurs sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) < 0$. Comme $\Gamma$ ne s'annule pas, les zéros non triviaux de $\zeta$, c'est-à-dire de partie réelle dans $[0,1]$, sont précisément les zéros de $\Lambda$ ; il sont donc invariants par la transformation $s \mapsto 1 - s$ (symétrie de centre $\frac{1}{2}$). On a par ailleurs

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ puisque les fonctions $\zeta$ et $s \mapsto \overline{\zeta(\overline{s})}$ sont holomorphes sur cet ouvert connexe et coïncident sur l'intervalle réel $]1, +\infty[$, qui contient des points d'accumulations. On en déduit immédiatement que l'ensemble des zéros de $\zeta$ est stable par conjugaison complexe. Tout zéro non trivial $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ de $\zeta$ dans la bande critique $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$ vient donc accompagnés des zéros $\overline{s_0}, 1 - s_0$ et $1 - \overline{s_0}$. □

## 4.4. Non-annulation de $\zeta(s)$ pour $\mathfrak{Re}(s) \geqslant 1$.

Rappelons que, si $f$ est une fonction méromorphe non identiquement nulle au voisinage d'un point $z_0$ de $\mathbf{C}$, alors $f$ s'écrit localement

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

où $m \in \mathbf{Z}$ est l'*ordre* de $f$ en $z_0$, noté $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$, et $g$ est une fonction holomorphe inversible définie au voisinage de $z_0$. On en déduit [11]

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'}{g}(z),$$

et $g'/g$ est une fonction holomorphe au voisinage de $z_0$. Ainsi, si $f$ est définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{C}$, alors $\frac{f'}{f}$ est une fonction méromorphe sur $\Omega$ ayant un pôle simple en tout zéro ou pôle $z_0$ de $f$, de résidu $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$, et

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'}{f}(z) = \mathrm{ord}_{z_0}(f).$$

10. Rappelons que son inverse est holomorphe sur $\mathbf{C}$...

11. En utilisant le fait que la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques des facteurs :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

THÉORÈME 4.19. — *La fonction zêta ne s'annule en aucun point du demi-plan* $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \geqslant 1\}$.

*Démonstration.* La non-annulation de $\zeta(s)$ lorsque $\mathfrak{Re}(s) > 1$ découle directement de l'identité

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

qui vaut sous cette condition et, rappelons-le, traduit l'identité de convolution $1 * \mu = \delta_1$ (cf. Chapitre 2).

Pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ toujours, la formule du produit

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

permet d'exprimer la dérivée logarithmique de la fonction zêta sous la forme

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_p \frac{(\log p)p^{-s}}{1 - p^{-s}} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s} - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}.$$

La série

$$-\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

est normalement convergente sur le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$ pour tout $c > \frac{1}{2}$, donc sa somme $\Psi$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\Omega_{\frac{1}{2}} = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$. En posant

$$\Phi(s) = -\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

et en écrivant

$$\Phi(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \Psi(s),$$

on obtient une fonction méromorphe $\Phi$ sur sur le demi-plan $\Omega_1 = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ admettant un prolongement méromorphe au demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$ ayant les mêmes pôles que $\zeta'/\zeta$, avec les mêmes résidus.

Considérons maintenant un nombre complexe $s_0 = 1 + it_0$, avec $t_0 \in \mathbf{R}^*$, ainsi que le nombre complexe $s_1 = 1 + 2it_0$. Introduisons les entiers naturels

$$m = \mathrm{ord}_{s_0} \zeta, \quad n = \mathrm{ord}_{s_1}(\zeta)$$

et rappelons que l'on a

$$\mathrm{ord}_1(\zeta) = -1.$$

En vertu de l'identité $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ pour tout nombre complexe $z \neq 1$, il vient

$$\mathrm{ord}_{\overline{s_0}}(\zeta) = m \ \text{ et } \ \mathrm{ord}_{\overline{s_1}}(\zeta) = n.$$

La fin de la démonstration est astucieuse. Elle consiste à considérer l'expression

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \Phi(1 + \varepsilon - 2it_0) + 4\Phi(1 + \varepsilon - it_0) + 6\Phi(1 + \varepsilon) + 4\Phi(1 + \varepsilon + it_0) + \Phi(1 + \varepsilon + 2it_0) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \binom{4}{k+2} \Phi(1 + \varepsilon + 2ikt_0) \end{aligned}$$

pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ suffisamment petit et à calculer la limite de $\varepsilon A(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0. D'une part, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon A(\varepsilon) = 2n + 4m - 6$$

puisque

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\Phi(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\zeta'}{\zeta}(z)=\mathrm{ord}_{z_0}(\zeta)$$

pour tout $z_0\in\Omega_{\frac{1}{2}}$ en vertu du rappel effectué avant l'énoncé du théorème. D'autre part,

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) &= \sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}\Phi(1+\varepsilon+2ikt_0)\\
&= -\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+2ikt_0}}\\
&= -\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}p^{-2ikt_0}\\
&= -\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{-it_0/2}+p^{it_0/2}\right)^4\\
&= -\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(2\cos\left(\frac{t_0}{2}\log p\right)\right)^4
\end{aligned}$$

donc $A(\varepsilon)\leqslant 0$ pour tout $\varepsilon$. On en déduit l'inégalité

$$2n+8m-6\leqslant 0,$$

puis

$$m=0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

COROLLAIRE 4.20. — *La fonction*

$$s\mapsto\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{1}{s-1}$$

*admet un prolongment holomorphe sur un voisinage du demi-plan fermé* $\{s\in\mathbf{C}\mid\mathfrak{Re}(s)\geqslant 1\}$.

*Démonstration.* En effet, $\zeta'/\zeta$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant un unique pôle, simple, en $s=1$, de résidu $-1$. □

Nous verrons au dernier chapitre que le théorème des nombres premiers découle « directement » de cet énoncé ; plus exactement, il s'agit de la seule information requise sur la fonction zêta pour établir le TNP.

# 5. CARACTÈRES ET FONCTIONS L DE DIRICHLET

## 5.1. Caractères de Dirichlet

DÉFINITION 5.1. — *Soit $N \geqslant 1$ un nombre entier. Un* caractère de Dirichlet modulo $N$ *est une fonction $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ induite par un morphisme de groupes $\overline{\chi} : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$. Plus précisément :*

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{pgcd}(n,N) \neq 1 \\ \overline{\chi}(n \pmod N) & \text{si } \operatorname{pgcd}(n,N) = 1. \end{cases}$$

Le caractère de Dirichlet modulo $N$ tel que $\chi(n) = 1$ pour tout entier $n$ premier à $N$ est dit *principal* (ou *trivial*).

Il peut arriver qu'un caractère de Dirichlet modulo $N$ se factorise par $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$ avec $M|N$ et $M \neq N$, c'est-à-dire que $\chi$ provienne d'un caractère de Dirichlet modulo $M$ via la projection canonique

$$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times .$$

Cette observation motive la définition suivante.

DÉFINITION 5.2. — *Le* conducteur *d'un caractère de Dirichlet $\chi$ est le plus petit entier $M$ (au sens de la divisibilité) tel que $\chi$ se factorise à travers $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$. On dit qu'un caractère de Dirichlet modulo $N$ est* primitif *si son conducteur est égal à $N$.*

De façon évidente, le conducteur du caractère principal modulo $N$ est égal à 1.

EXEMPLE 5.3. — *1. Les caractères de Dirichlet modulo* 4.

Le groupe $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ est cyclique d'ordre 2, engendré par la classe de $-1$. Il y a deux caractères de Dirichlet modulo 4 : le caractère principal $\chi_1$, défini par $\chi_1(-1) = \chi_1(1) = 1$, et le caractère $\chi_2$, défini par $\chi_2(1) = 1$ et $\chi_2(-1) = -1$.

*2. Les caractères de Dirichlet modulo* 8.

Le groupe $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ est abélien d'ordre 4. Tous ses éléments sont de carré trivial, donc il est à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Plus précisément :

$$(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \simeq \langle \overline{-1} \rangle \times \langle \overline{3} \rangle.$$

Un caractère de Dirichlet modulo 8 envoie tout élément de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ sur un élément d'ordre (au plus) 2 dans $\mathbf{C}^\times$, donc sur 1 ou $-1$, et il est entièrement déterminé par la connaissance des images de $-1$ et de 3. Ces observations permettent de dresser aisément la liste de tous les caractères de Dirichlet modulo 8 *:*

| | 1 | $-1$ | 3 | $-3$ | conducteur |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 4 |
| $\chi_3$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 8 |
| $\chi_4$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 8 |

Les caractères qui se factorisent à travers $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ sont ceux qui sont triviaux sur le noyau $\{1, -3\}$ de la projection canonique $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$.

## 5.2. Fonctions $L$ de Dirichlet

On associe à tout caractère de Dirichlet $\chi$ modulo $N$ la série de Dirichlet
$$L(\chi,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$
Comme $|\chi(n)|\leqslant 1$, cette série de Dirichlet est absolument convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>1$ et
$$L(\chi,s)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$
sur ce demi-plan par multiplicativité complète de $\chi$.

Proposition 5.4. — *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $N$.*

1. *Si $\chi=1$ est le caractère principal, alors l'abscisse de convergence (absolue) de $L(1,s)$ est égale à $1$ et*
$$L(1,s)=\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\zeta(s)$$
*pour tout nombre complexe $s$ tel que $\mathfrak{Re}(s)>1$.*
2. *Si $\chi$ n'est pas principal, alors :*
   (i)
$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant\varphi(N)$$
   *pour tout nombre réel $x\geqslant 0$ ;*
   (ii) *l'abscisse de convergence (resp. de convergence absolue) de la série de Dirichlet $L(\chi,s)$ est égale à $0$ (resp. à $1$).*

*Démonstration.* 1. L'abscisse de convergence (absolue) de $L(1,\chi)$ est égale à 1 puisque la série $\sum_{p\nmid N}\frac{1}{p}$ diverge. On a immédiatement
$$L(1,s)=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^{-s}}\right)\zeta(s)$$
sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>1$.

2. Considérons maintenant un caractère $\chi$ non principal.

Pour établir (i), il suffit d'observer que la fonction sommatoire de $\chi$ est $N$-périodique, puisque
$$\sum_{n\in I}\chi(n)=0$$
pour tout intervalle $I$ de longueur $N$ par orthogonalité de $\chi$ et du caractère principal, et d'observer que l'on a trivialement
$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant\sum_{n\leqslant N}|\chi(n)|=\varphi(N)$$
pour tout $x\in[0,N]$.

Le fait que la fonction sommatoire de $\chi$ soit bornée entraîne que l'abscisse de convergence $\sigma_c$ de $L(\chi,s)$ vérifie $\sigma_c\leqslant 0$ (TD 3, exercice 2), et l'on obtient $\sigma_c=0$ en observant que la série $\sum_{n\geqslant 1}\chi(n)$ ne converge pas puisque $|\chi(n)|=1$ pour tout $n$ premier à $N$. On a par ailleurs $\sigma_a=1$ puisque $|\chi(n)|\leqslant 1$ pour tout $n$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1}|\chi(n)|n^{-1}=\sum_{n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(n,N)=1}n^{-1}$ diverge. □

### 5.3. Non-annulation de $L(\chi,s)$ pour $\mathfrak{Re}(s)\geqslant 1$.

PROPOSITION 5.5. — *Pour tout caractère de Dirichlet modulo $N$ non principal,*

$$L(\chi,1)\neq 0.$$

*Démonstration.* Pour $s$ de partie réelle $>1$, posons

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \prod_{\chi \bmod N} L(\chi,s)\\
&= \prod_{\chi \bmod N}\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\\
&= \prod_{p\nmid N}\prod_{\chi \bmod N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\\
&= \prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{-g(p)},
\end{aligned}$$

où $f(p)$ désigne l'ordre de $p$ dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ et $g(p)=\varphi(N)/f(p)$. En effet, $\chi(p)$ est toujours une racine $f(p)$-ième de l'unité, et chacune apparaît $g(p)$ fois (voir les rappels sur les caractères des groupes abéliens finis dans l'appendice). La dernière égalité découle de la factorisation

$$1-X^f=\prod_{\xi}(1-\xi X)$$

dans $\mathbf{C}[X]$, où $\xi$ parcourt l'ensemble des racines $f$-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.

On reconnaît à droite un produit des séries géométriques $\sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{p^{ms}}$, donc nous pouvons écrire

$$\prod_{\chi \bmod N} L(\chi,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s} \tag{10}$$

avec $a_n\geqslant 0$ pour tout $n$ ; c'est une propriété remarquable, puisque chacune des séries $L(\chi,s)$ est à coefficients complexes !

Désignons par $\sigma$ l'abscisse de convergence (absolue) de cette série de Dirichlet.

En observant que l'on a

$$1-\frac{1}{p^{f(p)/\varphi(N)}}=1-\frac{1}{p^{1/g(p)}}\leqslant 1-\frac{1}{p},$$

il vient

$$\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{f(p)/\varphi(N)}}\right)^{-g(p)}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{1/g(p)}}\right)^{-g(p)}\geqslant\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-g(p)}\geqslant\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Comme le produit de droite est divergent [12], on obtient déjà

$$\sigma\geqslant\frac{1}{\varphi(N)}.$$

12. Cela équivaut à la divergence de la série des inverse des nombres premiers.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant qu'il existe un caractère non principal $\chi_0$ tel que $L(\chi_0, 1) = 0$. La fonction

$$L(1,s)L(\chi_0,s) = \prod_{p|N}(1-p^{-s})\zeta(s)L(\chi_0,s)$$

se prolonge alors en une fonction *holomorphe* sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ puisque, comme nous l'avons établi précédemment, $\zeta(s)$ admet un prolongement méromorphe sur ce demi-plan ayant un unique pôle, simple, en $s = 1$. La série de Dirichlet $Z(s)$ admet donc un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$, ce qui impose $\sigma \leqslant 0$ pour son abscisse de convergence (absolue) $\sigma$ en vertu de la proposition suivante. Nous avons abouti à une contradiction, ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION 5.6 (Lemme de Landau) — *Soit* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de nombres réels* positifs *telle que la série de Dirichlet* $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ *ait une abscisse de convergence* $\sigma < +\infty$*. La fonction* $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$*, définie sur le demi-plan* $\mathfrak{Re}(s) > \sigma$*, n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de* $\sigma$*.*

*Démonstration.* Si l'on pose $b_n = a_n n^{-\sigma}$, de sorte que $a_n n^{-s} = b_n n^{-(s-\sigma)}$, la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-t}$ est encore à coefficients positifs, a pour abscisse de convergence 0 et se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0 si et seulement si $f$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $\sigma$. Cette observation montre qu'il suffit donc de considérer le cas $\sigma = 0$.

Supposons que $f$ admette un prolongement holomorphe sur un disque ouvert $D$ de centre 0. En observant que $a_n n^{-s}$ croît vers $a_n$ lorsque $s$ tend vers 0 dans $]0, +\infty[$, nous pouvons écrire

$$f(0) = \lim_{s\to 0,\ s>0} f(s) = \sup_{s>0} f(s) \geqslant \sup_{s>0} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

pour tout $N \geqslant 1$, donc la série numérique de terme général $a_n \geqslant 0$ est convergente. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui fournit l'égalité

$$f(0) = \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

Nous pouvons reproduire ce raisonnement avec la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n)n^{-s}$, de somme $-f'(s)$ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ et à coefficients tous positifs ; nous obtenons

$$f'(0) = -\sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n).$$

Plus généralement, en itérant ce raisonnement,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n)^k$$

pour tout $k \geqslant 0$.

Par hypothèse, la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} (-1)^k a_n (\log n)^k z^k$$

converge sur le disque $D$. En l'évaluant en un nombre réel $t < 0$ dans $D$, nous obtenons une série double convergente à termes positifs ; il est donc licite d'intervertir les deux sommes et de conclure à la convergence de la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}(-t\log n)^k = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-t\log n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^t}.$$

Il en découle que l'abscisse de convergence $\sigma$ de notre série de Dirichlet est inférieure à $t$, et donc strictement négative. Comme $\sigma = 0$, c'est une contradiction et $f$ ne peut donc pas avoir de prolongement hololomorphe au voisinage de $\sigma$. □

REMARQUE 5.7. — Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet et soit $\mathfrak{Re}(s) > 1$. La formule du produit

$$L(\chi,s) = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

implique

$$\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} = -\sum_p \frac{\chi(p)(\log p)p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} = -\sum_p \frac{\chi(p)(\log p)}{p^s-\chi(p)},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} = \Phi_\chi(s) + \Psi_\chi(s) \tag{11}$$

où

$$\Phi_\chi(s) = \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s}$$

et

$$\Psi_\chi(s) = \sum_p \frac{\chi(p)^2 \log p}{p^s(p^s-\chi(p))}$$

est holomorphe pour $\mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

COROLLAIRE 5.8 (Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet) — *Soit $a$ et $N$ deux entiers strictement positifs tels que* $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$. *L'ensemble*

$$\mathscr{P} \cap (a + \mathbf{Z}N)$$

*des nombres premiers congrus à $a$ modulo $N$ est infini.*

*Démonstration.* Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$, posons

$$\Phi_a(s) = \sum_{p \equiv a \pmod N} \frac{\log p}{p^s} = \sum_p \frac{\mathbf{1}_{\overline{a}}(\overline{p})}{p^s}.$$

Cette série est normalement convergente sur tout demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c > 1$, donc $\Phi_a$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\Omega_1 = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 1\}$. La théorème de la progression arithmétique va simplement découler du fait que $\Phi_a(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque $s$ tend vers 1 dans $\mathbf{R}_{>1}$, ce que nous allons établir.

La fonction $\mathbf{1}_{\overline{a}} : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}$ se décompose dans la base des caractères de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ :

$$\mathbf{1}_{\overline{a}} = \sum_\chi (\chi|\mathbf{1}_{\overline{a}})\chi = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_\chi \overline{\chi(\overline{a})}\chi.$$

Nous pouvons donc réécrire $\Phi_a(s)$ sous la forme :

$$\Phi_a(s) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_p \sum_\chi \overline{\chi(a)} \frac{\chi(p)\log p}{p^s} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_\chi \overline{\chi(a)} \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s}, \tag{12}$$

où $\chi$ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo $N$. Grâce au calcul effectué à la remarque 5.7, nous obtenons, toujours pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ :

$$\Phi_a(s) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_\chi \overline{\chi(a)}\Phi_\chi(s) = -\frac{1}{\varphi(N)} \sum_\chi \overline{\chi(a)} \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} - \frac{1}{\varphi(N)} \sum_\chi \overline{\chi(a)}\Psi_\chi(s)$$

Dans le membre de droite, le second terme est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}} = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$. Le premier terme est une fonction méromorphe sur le demi-plan $\Omega_0 = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 0\}$ qui :

- possède un pôle simple en $s = 1$, de résidu $\frac{1}{\varphi(N)}$, si $\chi$ est le caractètre trivial modulo $N$ ;
- est holomorphe au voisinage de 1 si $\chi$ est non trivial, en vertu de la proposition 5.5.

Ces observations montrent que $\Phi_a$ admet un pôle simple en $s = 1$, de résidu $\frac{1}{\varphi(N)}$ ; on a donc

$$\lim_{s\to 1} |\Phi_a(s)| = +\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

THÉORÈME 5.9. — *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $N$.*

*(i) Si $\chi$ est non trivial, alors $L(\chi,s)$ ne s'annule pas pour $\mathfrak{Re}(s) \geqslant 1$.*

*(ii) Si $\chi = 1$, alors $L(\chi,s)$ ne s'annule pas pour $\mathfrak{Re}(s) \geqslant 1$ et $s \neq 1$.*

*Démonstration.* Pour $c \in \mathbf{R}$, désignons par $\Omega_c$ le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > c\}$. Considérons de nouveau la fonction $Z$ définie pour $s \in \Omega_1$ par

$$Z(s) = \prod_{\chi} L(\chi,s),$$

où $\chi$ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo $N$ (cette fonction a été introduite dans la démonstration de la proposition 5.5). Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\Omega_1$ admettant un prolongement méromorphe sur $\Omega_0$, et le théorème a démontrer équivaut au fait que $Z$ possède un pôle en $s = 1$ et ne s'annule pas sur $\overline{\Omega_1} \setminus \{1\}$. La première assertion est acquise en vertu de la proposition 5.5 et $Z(s) \neq 0$ pour tout $s \in \Omega_1$ en vertu de la formule du produit

$$Z(s) = \prod_{\chi} \prod_{p} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Il reste donc à démontrer que $Z$ ne s'annule en aucun nombre complexe $s \neq 1$ tel que $\mathfrak{Re}(s) = 1$. On reprend pour cela la stratégie de démonstration du théorème 4.19, en étudiant la dérivée logarithmique de $Z$.

Fixons $s_0 = 1 + it_0$, avec $t_0 \in \mathbf{R}^*$ et considérons également le point $s_1 = 1 + 2it_0$. Posons

$$m = \mathrm{ord}_{s_0}(Z) \quad \text{et} \quad n = \mathrm{ord}_{s_1}(Z).$$

La série de Dirichlet $Z$ étant à coefficients réels (voir le début de la démonstration du théorème 5.5), elle vérifie $Z(\overline{s}) = \overline{Z(s)}$ pour tout $s \in \Omega_1$, donc

$$\mathrm{ord}_{\overline{s_0}}(Z) = m \quad \text{et} \quad \mathrm{ord}_{\overline{s_1}}(Z) = n.$$

En reprenant le calcul effectué à la remarque 5.7, nous pouvons écrire, pour $s \in \Omega_1$,

$$-\frac{Z'(s)}{Z(s)} = -\sum_{\chi} \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} = \Phi_N(s) + \Psi_N(s),$$

où

$$\Psi_N(s) = -\sum_{\chi} \Psi_{\chi}(s)$$

est holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$ et

$$\begin{aligned}\Phi_N(s) &= -\sum_{\chi}\Phi_{\chi}(s)\\ &= -\sum_{p}\frac{\log p}{p^s}\sum_{\chi}\chi(p)\\ &= -\sum_{p\equiv 1 \pmod N}\frac{\log p}{p^s}\end{aligned}$$

en vertu des relations d'orthogonalité satisfaites par les caractères de Dirichlet. Les fonctions méromorphes $-\frac{Z'}{Z}$ et $\Phi_N$ ont les mêmes parties polaires sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$.

Considérons maintenant l'expression

$$\begin{aligned}A(\varepsilon) &= \sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}\Phi_N(1+\varepsilon+ikt_0)\\ &= -\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}p^{-ikt_0}\\ &= -\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(2\cos\left(\frac{t_0}{2}\log p\right)\right)^4\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$. Il s'agit d'un nombre réel *positif*. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon A(\varepsilon) &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{k+2}\varepsilon\frac{Z'}{Z}(1+\varepsilon+2ikt_0)\\ &= -\sum_{k=-2}^{4}\binom{4}{k+2}\mathrm{ord}_{1+ikt_0}(Z)\\ &= -2n-8m+6\end{aligned}$$

puisque $\Phi_N$ et $\frac{Z'}{Z}$ ont les mêmes parties polaires sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$. Nous en déduisons l'inégalité

$$2n+8m-6\leqslant 0,$$

d'où

$$m=0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous concluons ce chapitre en formulant le résultat d'analyse complexe qui nous permettra d'établir au chapitre suivant une version renforcée du théorème de la progression arithmétique.

COROLLAIRE 5.10. — *Soit $a$ et $N$ deux nombres entiers strictement positifs tels que* $\mathrm{pgcd}(a,N)=1$. *Posons*

$$\Phi_a(s)=\sum_{p\equiv a \pmod N}\frac{\log p}{p^s}.$$

*La fonction*

$$s\mapsto \Phi_a(s)-\frac{1}{\varphi(N)}\frac{1}{s-1}$$

*admet un prolongement holomorphe sur un voisinage du demi-plan fermé* $\overline{\Omega_1}=\{s\in \mathbf{C}\mid \mathfrak{Re}(s)\geqslant 1\}$.

*Démonstration.* Pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, nous avons établi dans la démonstration du corollaire 5.7 l'identité

$$\Phi_a(s) = -\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} - \Psi_a(s),$$

où $\chi$ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo $N$ et

$$\Psi_a(s) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_{p} \frac{\chi(p)^2 \log p}{p^s(p^s - \chi(p))}$$

est une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\Omega_{\frac{1}{2}} = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$. Il découle du théorème précédent que la fonction $L'(\chi,\cdot)/L(\chi,\cdot)$ est :

- holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega_1}$, si $\chi$ est non trivial ;
- méromorphe au voisinage de $\overline{\Omega_1}$, avec un unique pôle, simple et de résidu $-1$, en $s = 1$, si $\chi$ est trivial.

La conclusion s'en déduit immédiatement. $\square$

# 6. LE THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

Rappelons que l'on désigne par $\pi$ la fonction de comptage des nombres premiers :

$$\forall x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}, \quad \pi(x) = \mathrm{Card}\ (\{p \text{ premier et } p \leqslant x\}).$$

Nous allons voir dans ce chapitre une démonstration du *théorème des nombres premiers.*

THÉORÈME 6.1. — *Quand $x$ tend vers $+\infty$,*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

La première preuve a été obtenue (de façon indépendante) par Jacques Hadamard et Charles de la Vallée Poussin en 1896. Le cœur en est le prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ sur le demi-plan $\Omega_0 = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 0\}$ et sa non-annulation sur le demi-plan fermé $\overline{\Omega_1} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \geqslant 1\}$, mais elle requiert en fait une étude plus fine de $\zeta$ afin d'obtenir, en particulier, un voisinage *explicite* de $\overline{\Omega_1}$ dans $\Omega_0$ sur lequel $\zeta$ ne s'annule pas [13].

En 1909, Edmund Landau a donné une démonstration plus simple de ce théorème, qui ne requiert que la non-annulation de $\zeta$ sur $\overline{\Omega_1}$ et la croissance au plus polynomiale de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ lorsque $s$ tend vers $+\infty$ dans $\overline{\Omega_1}$. En 1931, finalement, Shikaro Ikehara est parvenu à déduire le théorème des nombres premiers de la seule non-annulation de $\zeta$ sur $\overline{\Omega_1}$, en utilisant pour cela les travaux fondamentaux et contemporains de Norbert Wiener (théorie taubérienne). Ceci est particulièrement satisfaisant car il est assez facile de montrer que, réciproquement, le théorème des nombres premiers entraîne la non-annulation de $\zeta$ sur $\overline{\Omega_1}$ (cf. section 6.4). C'est cette démonstration que nous allons présenter dans ce qui suit, avec une simplification apportée par Donald Newman en 1980.

En bonus, nous obtiendrons un renforcement du théorème de la progression arithmétique. Étant donné deux entiers naturels $a, N \geqslant 1$ tels que $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$, posons

$$\forall x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}, \quad \pi_{a,N}(x) = \mathrm{Card}\,(\{p \text{ premier}, \ p \equiv a \pmod N \text{ et } p \leqslant x\}).$$

THÉORÈME 6.2. — *Soit $a, N \in \mathbf{N}^*$ avec $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$. Quand $x$ tend vers $+\infty$,*

$$\pi_{a,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)}\pi(x).$$

*Autrement dit, les nombres premiers sont* équidistribués *parmi les suites arithmétiques de raison $N$.*

## 6.1. Une reformulation du théorème des nombres premiers

Pour tout $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, posons

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

PROPOSITION 6.3. — *Le théorème des nombres premiers équivaut à l'estimation asymptotique*

$$\theta(x) \sim x$$

*quand $x$ tend vers $+\infty$.*

13. Rappelons que l'hypothèse de Riemann affirme que le domaine optimal est le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$.

*Démonstration.* Pour tout $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, la majoration

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p \leqslant (\ln x) \sum_{p \leqslant x} 1 = \pi(x) \ln x$$

est immédiate. Pour tous nombres réels $y < x$ dans $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$, on dispose par ailleurs de la minoration

$$\theta(x) \geqslant \sum_{y < p \leqslant x} \ln p \geqslant (\ln y)(\pi(x) - \pi(y)) \geqslant \pi(x) \ln y - y \ln y.$$

En fixant $\alpha$ dans $]0,1[$ et en posant $y = x^{\alpha}$, on en déduit

$$\theta(x) \geqslant \alpha \pi(x) \ln x - \alpha x^{\alpha} \ln x,$$

donc

$$\frac{\theta(x)}{x} \geqslant \alpha \frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \alpha x^{\alpha - 1} \ln x$$

et, en faisant tendre $x$ vers $+\infty$,

$$\alpha \liminf \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant \liminf \frac{\theta(x)}{x}, \quad \alpha \limsup \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant \limsup \frac{\theta(x)}{x}.$$

Puisque $\alpha$ a été choisi arbitrairement dans $]0,1[$, nous obtenons au final

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = \liminf_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x} \quad \text{et} \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x}$$

et donc la reformulation annoncée du théorème des nombres premiers. □

REMARQUE 6.4. — Le théorème de Tchébychev établi au premier chapitre (théorème 1.9) entraîne l'estimation

$$\theta(x) = \mathrm{O}(x)$$

quand $x$ tend vers $+\infty$, que nous allons utiliser au cours de la preuve du théorème des nombres premiers.

Considérons maintenant deux nombres entiers $a, N \in \mathbf{N}^*$ tels que $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$ et posons

$$\theta_{a,N}(x) = \sum_{p \leqslant x,\ p \equiv a \pmod N} \ln p.$$

La même démonstration permet d'établir une reformulation du théorème 6.2.

PROPOSITION 6.5. — *Quand $x$ tend vers $+\infty$ :*

$$\pi_{a,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{x}{\ln x} \iff \theta_{a,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} x.$$

## 6.2. Le théorème de Wiener-Ikehara

Considérons une série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

à coefficients complexes. Pour tout $x \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, on pose

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n.$$

THÉORÈME 6.6. — *Supposons* $a_n \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ *et* $A(x) = \mathrm{O}(x)$ *quand* $x$ *tend vers* $+\infty$*, ce qui garantit la convergence de* $f(s)$ *pour* $\mathfrak{Re}(s) > 1$*. S'il existe un nombre réel* $\alpha$ *tel que*

$$f(s) - \frac{\alpha}{s-1}$$

*se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage du demi-plan fermé* $\overline{\Omega_1} = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \geqslant 1\}$*, alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A(x)}{x} = \alpha.$$

L'essentiel de la preuve du théorème de Wiener-Ikaehara est contenu dans les deux lemmes suivants.

LEMME 6.7. — *Soit* $u : [1, +\infty[ \to \mathbf{R}$ *une fonction croissante et soit* $\alpha \in \mathbf{R}$*. Si l'intégrale généralisée*

$$\int_1^{+\infty} \frac{u(x) - \alpha x}{x^2}\, \mathrm{d}x$$

*converge, alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} = \alpha.$$

*Démonstration.* Nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons tout d'abord

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} > \lambda > \alpha.$$

Il existe alors une suite $(x_k)$ de nombres réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ et telle que $u(x_k) \geqslant \lambda x_k$ pour tout $k$.

Par croissance de $u$, nous obtenons la minoration

$$\int_{x_k}^{\frac{\lambda}{\alpha} x_k} \frac{u(x) - \alpha x}{x^2}\, \mathrm{d}x \geqslant \int_{x_k}^{\frac{\lambda}{\alpha} x_k} \frac{\lambda x_k - \alpha x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^{\frac{\lambda}{\alpha}} \frac{\lambda - \alpha t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Une contradiction en découle, puisque le membre de droite est un nombre réel strictement positif indépendant de $k$ tandis que le membre de gauche tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$, par convergence de l'intégrale généralisée.

Supposons maintenant

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} < \mu < \alpha$$

et considérons de nouveau une suite $(x_k)$ de nombres réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ et telle que $u(x_k) \leqslant \mu x_k$ pour tout $k$.

Par croissance de $u$, nous obtenons la majoration

$$\int_{\frac{\mu}{\alpha} x_k}^{x_k} \frac{u(x) - \alpha x}{x^2}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\mu}{\alpha} x_k}^{x_k} \frac{\lambda x_k - \alpha x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{\mu}{\alpha}}^1 \frac{\mu - \alpha t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Une contradiction en découle de nouveau, puisque le membre de droite est un nombre réel strictement négatif ne dépendant pas de $k$ tandis que le membre de gauche tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$ par convergence de l'intégrale généralisée.

Nous venons d'établir l'encadrement

$$\alpha \leqslant \liminf_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} \leqslant \limsup_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} \leqslant \alpha,$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = \alpha.$$

□

LEMME 6.8. — *Soit $h : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable bornée. Soit $g$ la fonction holomorphe définie sur le demi-plan $\Omega_0 = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 0\}$ par*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-zt}\, \mathrm{d}t.$$

*Si $g$ se prolonge holomorphiquement sur un voisinage du demi-plan fermé $\overline{\Omega_0}$, alors l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et*

$$\int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t = g(0).$$

*Démonstration.* Pour tout nombre réel $T > 0$ et tout nombre complexe $s$, posons $g_T(s) = \int_0^T h(t)e^{-st}\, \mathrm{d}t$. La fonction $g_T$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et nous devons prouver que $g_T(0)$ tend vers $g(0)$ quand $T$ tend vers $++\infty$.

Pour $R > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $g$ soit holomorphe au voisinage de l'adhérence de l'ouvert

$$\Omega = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > -\delta \text{ et } |z| < R\}.$$

En traitant la frontière de $\Omega$ comme un lacet $\gamma$ orienté positivement,le théorème des résidus fournit l'identité

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \mathrm{d}z.$$

(i) Si $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors $g(z) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ et donc

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^{+\infty} h(t)e^{-zt}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant ||h||_\infty \int_T^{+\infty} e^{-\mathfrak{Re}(z)t}\, \mathrm{d}t = \frac{||h||_\infty}{\mathfrak{Re}(z)} e^{-\mathfrak{Re}(z)T}.$$

(ii) Si $|z| = R$, alors

$$\left| e^{zT} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \right| = \frac{e^{\mathfrak{Re}(z)T}}{R} \left| \frac{\overline{z}}{|z|} + \frac{z}{|z|} \right| = \frac{2|\mathfrak{Re}(z)|e^{\mathfrak{Re}(z)T}}{R^2}.$$

En combinant les majorations (i) et (ii), on obtient que la contribution de l'intégrale sur le demi-arc de cercle $C_+$ formé des $z$ tels que $|z| = R$ et $\mathfrak{Re}(z) \geqslant 0$ est majorée par

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_+} (g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{2||h||_\infty}{2\pi R^2} \pi R = \frac{||h||_\infty}{R}.$$

Notons $\gamma_-$ la partie du lacet $\gamma$ contenu dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) \leqslant 0$ et soit $C_-$ le demi-arc de cercle formé des $z$ tels que $|z| = R$ et $\mathfrak{Re}(z) \leqslant 0$. La fonction $g_T$ étant holomorphe sur $\mathbf{C}$, on a

$$\int_{\gamma_-} g_T(z)e^{zT} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \mathrm{d}z = \int_{C_-} g_T(z)e^{zT} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \mathrm{d}z$$

car l'intégrande est holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) < 0$.

Pour tout $z \in C_-$,

$$|g_T(z)| \leqslant ||h||_\infty \int_0^T e^{-\mathfrak{Re}(z)t}\, \mathrm{d}t = \frac{||h||_\infty}{|\mathfrak{Re}(z)|} \left(e^{-\mathfrak{Re}(z)T} - 1\right) \leqslant \frac{||h||_\infty}{|\mathfrak{Re}(z)|} e^{-\mathfrak{Re}(z)T}.$$

En combinant cette majoration avec (ii), on en déduit

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-} g_T(z)e^{zT}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{2||h||_\infty}{2\pi R^2}\pi R = \frac{||h||_\infty}{R}.$$

Considérons enfin l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-} g(z)e^{zT}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z.$$

La fonction $z \mapsto g(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)$ est holomorphe, donc bornée, au voisinage du support de $\gamma_-$. Comme

$$|e^{zT}| = e^{\mathfrak{Re}(z)T}$$

tend vers 0 quand $T$ tend vers $+\infty$ pour tout $z$ tel que $\mathfrak{Re}(z) < 0$, on a immédiatement

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-} g(z)e^{zT}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

par application du théorème de convergence dominée.

En mettant bout à bout les trois estimations ci-dessus, nous obtenons

$$|g(0)-g_T(0)| \leqslant 2\frac{||h||_\infty}{R} + I(R,T),$$

où $I(R,T)$ tend vers 0 quand $T$ tend vers $+\infty$ à $R$ fixé. Étant donné $\varepsilon > 0$, on pose $R_0 = \frac{4||h||_\infty}{\varepsilon}$ puis l'on considère $T_0 > 0$ tel que $|I(R_0,T)| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $T \geqslant T_0$ ; on a alors

$$|g(0)-g_T(0)| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $T \geqslant T_0$.

Cela démontre l'assertion souhaitée :

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(0) = g(0).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de Wiener-Ikehara. Étant donné $s \in \mathbf{C}$ et $N \in \mathbf{N}^*$, la formule sommatoire d'Abel (TD3, exercice 1) permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s} = \frac{A(N)}{N^s} + s\int_1^N \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Si $\mathfrak{Re}(s) > 1$, l'hypothèse $A(x) = \mathrm{O}(x)$ montre que les deux membres convergent et l'on aboutit à l'identité

$$f(s) = s\int_1^{+\infty}\frac{A(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Puisque

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1},$$

$$f(s) - \frac{\alpha}{s-1} = f(s) - \frac{\alpha s}{s-1} + \alpha = s\int_1^{+\infty}\frac{A(x)-\alpha x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x + \alpha.$$

En posant $s = 1+z$ et en effectuant le changement de variable $x = e^t$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(s)-\frac{\alpha}{s-1}-\alpha &= f(z+1)-\frac{\alpha}{z}-\alpha \\
&= (z+1)\int_1^{+\infty}\frac{A(x)-\alpha x}{x^{2+z}}\,\mathrm{d}x \\
&= (z+1)\int_0^{+\infty}\frac{A(e^t)-\alpha e^t}{e^{(2+z)t}}e^t\,\mathrm{d}t \\
&= (z+1)\int_0^{+\infty}\big(A(e^t)e^{-t}-\alpha\big)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, le membre de droite se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage du demi-plan fermé $\overline{\Omega_0}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathfrak{Re}(z)\geqslant 0\}$. La fonction $h$ définie sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ par

$$h(t)=A(e^t)e^{-t}-1$$

est continue par morceaux et bornée, puisque $A(x)=\mathrm{O}(x)$. Nous pouvons ainsi appliquer le lemme 6.8 et en déduire la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{A(x)-\alpha x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

puis conclure grâce au lemme 6.7 puisque l'hypothèse $a_n\geqslant 0$ fournit la croissance de la fonction $A$.

## 6.3. Démonstration du théorème des nombres premiers

Grâce à la reformulation établie en 6.1, le théorème de Wiener-Ikehara permet de déduire très facilement le théorème des nombres premiers de la non-annulation de $\zeta$ sur le demi-plan fermé $\overline{\Omega_1}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathfrak{Re}(z)\geqslant 1\}$ (Théorème 4.19).

*Démonstration du théorème 6.1.* Considérons en effet la série de Dirichlet à coefficients positifs définie par

$$a_n=\begin{cases}\ln p & \text{si } n=p \text{ est un nombre premier}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a

$$A(x)=\theta(x)=\mathrm{O}(x)$$

et

$$f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}=\sum_p\frac{\log p}{p^s}=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\Psi(s),$$

où $\Psi$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$ (voir la démonstration du théorème 4.19). La non-annulation de $\zeta$ sur $\overline{\Omega_1}$ et son pôle simple en $s=1$ garantissent que

$$f(s)-\frac{1}{s-1}=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}+\Psi(s)$$

se prolonge holomorphiquement sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$, donc

$$\theta(x)\sim x$$

quand $x$ tend vers $+\infty$ en vertu du théorème de Wiener-Ikehara. Grâce à la proposition 6.3, le théorème des nombres premiers est donc démontré. □

*Démonstration du théorème 6.2.* Considérons maintenant deux nombres entiers $a, N \in \mathbf{N}^*$ tels que $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$ et introduisons la série de Dirichlet à coefficients positifs définis par

$$a_n = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p \text{ est un nombre premier et} p \equiv a \pmod N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$A(x) = \theta_{a,N}(x) = \mathrm{O}(x)$$

et

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{p \equiv a \pmod N,\ p \leqslant x} \frac{\log p}{p^s} \\ &= -\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \bmod N} \overline{\chi(a)} \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} + \Psi_{a,N}(s) \end{aligned}$$

où $\Psi_{a,N}$ désigne de nouveau une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$ (voir la démonstration du corollaire 5.8). On a démontré que les fonctions $L(\chi,\cdot)$ sont holomorphes sur $\Omega_0$ et ne s'annulent pas sur $\overline{\Omega_1}$ si $\chi$ est non trivial, tandis que $L(1,\cdot)$ est méromorphe sur $\Omega_0$ avec un unique pôle, simple, en $s = 1$, et ne s'annule pas ailleurs sur $\overline{\Omega_1}$ (Théorème 5.9). On en déduit que

$$f(s) - \frac{1}{\varphi(N)} \frac{1}{s-1}$$

se prolonge holomorphiquement au voisinage de $\overline{\Omega_1}$, donc

$$\theta_{a,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} x$$

quand $x$ tend vers $+\infty$ en vertu du théorème de Wiener-Ikehara. Grâce à la proposition 6.4, la forme renforcée du théorème de la progression arithmétique est donc démontrée. □

## 6.4. Complément

Nous venons de déduire le théorème des nombres premiers de la non-annulation de $\zeta$ sur le demi-plan fermé $\overline{\Omega_1}$. Il est assez facile de prouver que, réciproquement, cette non-annulation peut se déduire du théorème des nombres premiers.

PROPOSITION 6.9. — *Considérons une fonction mesurable localement bornée* $u : [1, +\infty[ \to \mathbf{R}$ *telle que* $u(x) = \mathrm{O}(x)$ *quand* $x$ *tend vers* $+\infty$. *Posons*

$$\forall s \in \Omega_1, \quad g(s) = \int_1^{+\infty} \frac{u(x)}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x.$$

*S'il existe* $\alpha \in \mathbf{R}$ *tel que* $\frac{u(x)}{x}$ *tende vers* $\alpha$ *quand* $x$ *tend vers* $+\infty$, *alors :*

(i) $(s-1)g(s)$ *tend vers* $\alpha$ *quand* $s$ *tend vers* $1$ *dans un secteur angulaire de la forme*

$$|\mathfrak{Im}(s-1)| \leqslant C(\mathfrak{Re}(s) - 1);$$

(ii) *pour tout* $s_0 \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ *tel que* $\mathfrak{Re}(s) = 1$,

$$(s - s_0) g(s) = \mathrm{o}(1)$$

*quand* $s$ *tend vers* $s_0$ *dans un secteur angulaire de la forme*

$$|\mathfrak{Im}(s - s_0)| \leqslant C \mathfrak{Re}(s - s_0).$$

*En particulier, si l'on sait que* $g$ *admet un prolongement méromorphe sur un voisinage de* $\overline{\Omega_1}$, *alors celui-ci ne s'annule pas sur* $\overline{\Omega_1} \setminus \{1\}$ *et admet au plus un pôle, simple, en* $s = 1$ *si* $\alpha \neq 0$, *de résidu* $\alpha$.

**Démonstration**. Pour tout $s \in \Omega_1$,

$$g(s) - \frac{\alpha s}{s-1} = s\int_1^{+\infty} \frac{u(x)-\alpha x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Par hypothèse,

$$u(x) - \alpha x = \mathrm{o}(x).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $x_0 > 1$ tel que $|u(x) - \alpha x| \leqslant \varepsilon x$ pour tout $x \geqslant x_0$. En notant $M$ un majorant de $(u(x) - \alpha x)/x$ sur $[1, +\infty[$, on en déduit la majoration

$$\begin{aligned}
\left|\int_1^{+\infty} \frac{u(x)-\alpha x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{|u(x)-\alpha x|}{x^{\mathfrak{Re}(s)+1}}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon\int_{x_0}^{+}\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\mathfrak{Re}(s)}} + M\int_1^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\mathfrak{Re}(s)}} \\
&\leqslant \frac{1}{\mathfrak{Re}(s)-1}\left(\varepsilon + M(1 - x_0^{1-\mathfrak{Re}(s)-1})\right).
\end{aligned}$$

En écrivant

$$x_0^{1-\mathfrak{Re}(s)} = 1 + (1 - \mathfrak{Re}(s))\ln x_0 + \mathrm{o}_{x_0}(\mathfrak{Re}(s) - 1)$$

quand $\mathfrak{Re}(s)$ tend vers 1, on voit que le membre de droite de la dernière inégalité est majoré par

$$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{Re}(s)-1}$$

si $\mathfrak{Re}(s)$ est suffisamment proche de 1, donc

$$\left|g(s) - \frac{\alpha s}{s-1}\right| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathfrak{Re}(s)-1}\right)$$

quand $\mathfrak{Re}(s)$ tend vers 1.

Nous pouvons maintenant conclure.

(i) On a

$$(s-1)\left(g(s) - \frac{\alpha s}{s-1}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{|s-1|}{\mathfrak{Re}(s)-1}\right)$$

quand $s$ tend vers 1 dans $\Omega$, donc

$$(s-1)g(s) - \alpha = \mathrm{o}(1)$$

quand $s$ tend vers 1 dans un secteur angulaire de la forme

$$|\mathfrak{Im}(s)| \leqslant C(\mathfrak{Re}(s) - 1),$$

car alors

$$\frac{|s-1|}{\mathfrak{Re}(s)-1} \leqslant \sqrt{C^2+1}.$$

(ii) Fixons $s_0$ dans $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_0) = 1$. On a

$$(s-s_0)\left(g(s) - \frac{\alpha s}{s-1}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{|s-s_0|}{\mathfrak{Re}(s)-1}\right)$$

quand $s$ tend vers $s_0$ dans $\Omega$, donc

$$(s-s_0)g(s) = \mathrm{o}(1)$$

quand $s$ tend vers $s_0$ dans un secteur angulaire de la forme

$$|\mathfrak{Im}(s-s_0)| \leqslant C(\mathfrak{Re}(s) - 1),$$

car alors
$$\frac{|s-s_0|}{\mathfrak{Re}(s)-1} \leqslant \sqrt{C^2+1}.$$
□

Écrivons
$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s} = s\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$
On a
$$\theta(x) = \mathrm{O}(x)$$
quand $x$ tend vers $+\infty$ et
$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \Psi(s),$$
où $\Psi$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\frac{1}{2}}$. La proposition précédente affirme que $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ est une fonction méromorphe (sur $\Omega_{\frac{1}{2}}$) qui possède dans $\overline{\Omega_1}$ un unique pôle, simple, au point $s=1$, de résidu 1. La fonction $\zeta$ possède donc dans $\overline{\Omega_1}$ un unique pôle, simple, en $s=1$ et elle ne s'annule pas sur ce demi-plan fermé.

# Rappels d'analyse complexe

## 1. Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale

Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré. Il s'agit d'établir l'holomorphie d'une intégrale

$$\int_X f(z,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

en fonction du paramètre complexe $z$.

Commençons par rappeler l'énoncé bien connu permettant de traiter le problème analogue lorsque le paramètre est à valeurs réelles.

**Théorème (Dérivation sous l'intégrale) —** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et soit $f : I\times X \to \mathbf{C}$ une fonction satisfaisant aux trois conditions suivantes :*

*(i) pour tout $t\in I$, le fonction $f(t,\cdot)$ est mesurable;*

*(ii) pour presque tout $x\in X$, la fonction $f(\cdot,x)$ est dérivable sur $I$ ;*

*(iii) il existe une fonction intégrable $\varphi : X\to \mathbf{R}_{\geqslant O}$ telle que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant \varphi(x)$$

*pour tout $t\in I$ et presque tout $x\in X$.*

*La fonction $F : I\times \mathbf{C}$ définie par*

$$F(t)=\int_X f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

*est alors dérivable, et*

$$F'(t)=\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

*pour tout $t\in I$.*

*Démonstration.* Soit $t_0\in I$ et soit $h\in\mathbf{R}^*$ tel que $t_0+h\in I$. En vertu de l'inégalité des accroissements finis

$$|f(t_0+h,x)-f(t_0)|\leqslant \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\cdot|h|$$

l'hypothèse (iii) fournit la majoration

$$\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right|\leqslant\varphi(x)$$

pour presque tout $x\in X$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_X \frac{f(t_0+h,x)-f(t_0,x)}{h}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h,x)-f(t_0,x)}{h}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

□

Voici l'énoncé dans le cas complexe.

**Théorème (Holomorphie sous l'intégrale)** — *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et soit* $f : \Omega \times X \to \mathbf{C}$ *une fonction satisfaisant aux trois conditions suivantes :*

*(i) pour tout* $z \in \Omega$*, le fonction* $f(z,\cdot)$ *est mesurable ;*

*(ii) pour presque tout* $x \in X$*, la fonction* $f(\cdot,x)$ *est holomorphe sur* $\Omega$ *;*

*(iii) il existe une fonction intégrable* $\varphi : X \to \mathbf{R}_{\geqslant O}$ *telle que*

$$|f(z,x)| \leqslant \varphi(x)$$

*pour tout* $z \in \Omega$ *et presque tout* $x \in X$*.*

*La fonction* $F : \Omega \times \mathbf{C}$ *définie par*

$$F(t) = \int_X f(z,x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

*est alors holomorphe, et*

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

*pour tout* $z \in \Omega$*.*

Il convient de relever la différence de formulation de la condition de domination (iii) : alors qu'elle porte sur la *dérivée* dans le cas réel, il suffit de l'imposer sur la fonction elle-même dans le cas complexe. Il découle en effet de la formule intégrale de Cauchy que la domination de $f$ induit automatiquement une domination (locale) de $\frac{\partial f}{\partial z}$ : pour toute fonction holomorphe $g$ sur $\Omega$,

$$g'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{g(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\, \mathrm{d}\xi,$$

où $D$ désigne un disque fermé de centre $z_0$ contenu dans $\Omega$, donc, en fixant $r > 0$,

$$\sup_{\Omega'_r} |g'| \leqslant \frac{\sup_\Omega |g|}{r}$$

où

$$\Omega'_r = \{\omega \in \Omega\ |D(\omega,r) \subset \Omega\}.$$

*Première démonstration.* Il suffit de recopier la démonstration du théorème de dérivation sous l'intégrale, en exploitant la domination locale sur $\frac{\partial f}{\partial z}$ que l'on vient de déduire de la condition (iii). □

Rappelons que, si l'homomorphie est définie comme la dérivabilité par rapport à la variable complexe, on dispose d'une caractérisation équivalente ne faisant pas intervenir de dérivation.

**Théorème de Cauchy-Morera** — *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et soit* $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *une fonction continue. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $f$ *est holomorphe sur* $\Omega$ *;*

*(ii) pour tout triangle fermé* $T$ *contenu dans* $\Omega$*,*

$$\int_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

*Démonstration.* Voir par exemple [**3**, 10.17] pour une démonstration. □

Nous pouvons nous appuyer sur ce point de vue pour proposer une autre démonstration du théorème d'holomorphie sous l'intégrale.

*Seconde démonstration.* L'hypothèse de domination (iii) entraîne immédiatement la continuité de la fonction $F$ sur $\Omega$. Quel que soit le triangle plein $T$ contenu dans $\Omega$,

$$\int_{\partial T} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T}\int_X f(z,x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}z = \int_X\int_{\partial T} f(z,x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

donc l'holomorphie de $F$ en découle d'après le théorème de Cauchy-Morera, à condition que l'interversion des intégrales soit licite. C'est une application du théorème de Fubini-Tonelli puisque

$$\int_X\int_{\partial T} |f(z)\,\mathrm{d}z|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X\int_0^1 |f(\gamma(t),x)|\cdot|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \ell(\partial T)\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

où $\gamma\colon [0,1]\to\mathbf{C}$ désigne un paramétrage $C^1$ par morceaux de $\partial T$ et $\ell(\partial T) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$ est la longueur de $\partial T$. $\square$

## ANALYSE HARMONIQUE SUR UN GROUPE ABÉLIEN FINI.

Soit $G$ un groupe abélien fini.

1. Un *caractère* de $G$ est un morphisme de groupes $\chi : G \to \mathbf{C}^\times$. L'ensemble

$$\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, \mathbf{C}^\times)$$

des caractères de $G$ est un groupe pour la multiplication usuelle des fonctions (i.e. $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$), appelé *groupe dual* et non canoniquement isomorphe [14] à $G$. Son élément neutre est le caractère *trivial*, qui envoie $G$ sur $\{1\}$ ; on le note 1.

EXEMPLE — Si $G = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, alors on dispose d'un isomorphisme canonique $\widehat{\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \tilde{\to} \mu_N, \ \chi \mapsto \chi(1)$. Choisir un isomorphisme entre $\widehat{\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}$ et $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ revient à choisir une racine $N$-ième de l'unité primitive.

2. [Fonctorialité] Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes abéliens, alors l'application $f^* : \widehat{G'} \to \widehat{G}, \quad \chi \mapsto \chi \circ f$, est un morphisme de groupes. Étant donné un sous-groupe $H$ de $G$, la suite exacte naturelle

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 1$$

induit une suite *exacte* [15]

$$1 \longrightarrow \widehat{G/H} \xrightarrow{\pi^*} \widehat{G} \xrightarrow{\iota^*} \widehat{H} \longrightarrow 1 \ .$$

Autrement dit : tout caractère de $H$ se prolonge en un caractère de $G$, et les caractères du groupe quotient $G/H$ s'identifient aux caractères de $G$ qui sont triviaux sur $H$.

En particulier, si $a$ est un élément de $G$ d'ordre $f$, alors

(i) $\chi(a)$ est une racine $f$-ième de l'unité dans $\mathbf{C}$ pour tout caractère $\chi$ de $G$ ;

(ii) lorsque $\chi$ parcourt l'ensemble $\widehat{G}$, chaque racine $f$-ième de l'unité apparaît exactement $|G|/f$ fois parmi les $\chi(a)$.

Pour le vérifier, il suffit de considérer la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \langle a\rangle^\perp \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \widehat{\langle a\rangle} \longrightarrow 1$$

où $\langle a\rangle^\perp = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(a) = 1\}$, et de remarquer que l'application $\chi \mapsto \chi(a)$ réalise un isomorphisme entre $\widehat{\langle a\rangle}$ et $\mu_f(\mathbf{C})$.

3. Les caractères de $G$ forment une *base orthonormée* du $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes sur $G$ relativement au produit scalaire hermitien

$$(f|g) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} \overline{f(x)}g(x).$$

Nous pouvons donc écrire toute fonction complexe $f$ sur $G$ sous la forme

$$f = \sum_{\chi\in\widehat{G}} (\chi|f)\chi.$$

14. C'est facile à établir lorsque $G$ est cyclique, et le cas général s'en déduit en utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis.

15. Cela signifie que le noyau de chaque flèche et égal à l'image de la flèche précédente.

En particulier (*relations d'orthogonalité*) :

(i) pour tout $\chi \in \widehat{G}$,

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = |G|(1|\chi) = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) pour tout $x \in G$,

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} |G| & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut le justifier ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) &= \left( \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x)\chi \right)(1) \\ &= |G| \left( \sum_{\chi \in \widehat{G}} (\mathbf{1}_{\{x\}}|\chi)\chi \right)(1) \\ &= |G|\mathbf{1}_{\{x\}}(1) \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique du singleton $\{x\}$.

On peut aussi invoquer la *bidualité* : le morphisme de groupes canonique

$$G \to \widehat{\widehat{G}}, \ x \mapsto (\chi \mapsto \chi(x))$$

est un isomorphisme et (ii) est une reformulation de (i) en remplaçant $G$ par $\widehat{G}$.

## Bibliographie

[1] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, 1979.

[2] Marc HINDRY. *Arithmétique.* Calvage & Mounet.

[3] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 1998

[4] Gérald TENENBAUM. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Dunod, 2022

[5] Gérald TENENBAUM et Jie WU. *Théorie analytique et probabiliste des nombres : 307 exercices corrigés.* Belin, 2014

## Table des matières