

2. FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Exercice 1 — Démontrer que l'anneau $(\mathcal{A}, +, *)$ est intègre.

Indications. Il s'agit de prouver que, si f et g sont deux fonctions arithmétiques non nulles, leur produit de Dirichlet $f * g$ ne l'est pas davantage. On pourra justifier, puis utiliser, l'observation suivante : étant donné $m, n \in \mathbf{N}^*$ et une factorisation non triviale

$$mn = dd', \quad d, d' \notin \{m, n\},$$

alors $d < m$ ou $d' < n$.

Exercice 2 — Soit f la fonction arithmétique définie par

$$f(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2 \mid \text{ppcm}(n_1, n_2) = n\}.$$

Démontrer que f est multiplicative, puis évaluer cette fonction sur les puissances des nombres premiers.

(Pour établir la multiplicativité, on pourra raisonner avec des valuations p -adiques.)

Exercice 3 — Soit \mathcal{P}' l'ensemble des nombres entiers de la forme p^α , où p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbf{N}^*$. Le but de cet exercice est de démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour toute fonction multiplicative $f \in \mathcal{A}$:

- (i) $f(m)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ dans \mathbf{N}^* ;
- (ii) $f(m)$ tend vers 0 quand m tend vers 0 dans \mathcal{P}' .

Il est clair que la première condition implique la seconde ; il s'agit donc d'établir l'implication réciproque. Considérons une fonction multiplicative $f \in \mathcal{A}$ vérifiant la condition (ii).

1. Démontrer que, pour tout réel $c > 0$, il existe une partie finie X_c de \mathcal{P}' telle que

$$|f(m)| \leq c$$

pour tout $m \in \mathcal{P}' \setminus X_c$.

2. En déduire que f est bornée sur \mathcal{P}' , puis qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|f(n)| \leq C\varepsilon$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ assez grand.

3. Conclure.

En guise d'application, considérons la fonction arithmétique f définie par

$$f(n) = \text{Card}\{(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid \text{ppcm}(a, b) = n\}.$$

4. Démontrer que f est une fonction multiplicative.

Indication : on pourra songer à utiliser les valuations p -adiques.

5. Établir l'estimation asymptotique

$$f(n) = o(n^\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 4 (Comportement asymptotique de la fonction « nombre de diviseurs ») — On rappelle que la fonction « nombre de diviseurs » est définie par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On a vu que la multiplicativité de d découle de l'identité $d = 1 * 1$. En donner une preuve directe.
2. Démontrer l'identité

$$d(n) = \prod_p (v_p(n) + 1)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Démontrer que l'on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(n) = 2.$$

4. Démontrer que l'on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(n)}{(\log n)^k} = +\infty$$

pour tout entier $k \geq 1$.

Indication : calculer $d(2^a)$, $d((2 \cdot 3)^a)$, ...

5. Démontrer que l'on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(n)}{n^\varepsilon} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 5 (La méthode de l'hyperbole de Dirichlet) — Le but de cet exercice est d'obtenir une estimation asymptotique de $\sum_{n \leq x} d(n)$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbf{N}^* \mid pq \leq x\}.$$

Indication : observer que l'ensemble figurant au membre de droite est l'ensemble des points du plan à coordonnées dans $\mathbf{N}^ \times \mathbf{N}^*$ situés sous l'hyperbole d'équation $uv = x$. Interpréter alors $d(n)$ comme le nombre de ces points appartenant à l'hyperbole d'équation $uv = n$.*

En déduire l'identité

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

2. En déduire l'estimation

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + O(x).$$

3. En considérant les bandes $u \leq \sqrt{x}$ et $v \leq \sqrt{x}$, établir l'estimation raffinée suivante :

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + 2(\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

où γ désigne la constante d'Euler.