CAPES DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS EXTERNE - SESSION DE 1988

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Notations et objectifs du problème

On désigne par $\mathscr{C}_n$ l'espace des configurations $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ constituées de n points, distincts ou non, du plan euclidien orienté. Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 3. Lorsque les points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$ ne sont pas alignés on dit que $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ est un *polygone* ; dans le cas contraire, on dit que la configuration P est *aplatie*. L'ensemble des polygones, éléments de $\mathscr{C}_n$, est noté $\mathscr{P}_n$; en particulier l'ensemble des *triangles* est noté $\mathscr{P}_3$, l'ensemble des *quadrilatères* est noté $\mathscr{P}_4$. On dit qu'un polygone $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ est *régulier* s'il existe une rotation r telle que $r(\mathrm{A}_j) = \mathrm{A}_{j+1}$ si $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $r(\mathrm{A}_n) = \mathrm{A}_1$. On sait qu'une telle rotation est unique, qu'une mesure de son angle est de la forme $\frac{2k\pi}{n}$ où $1 \leqslant k \leqslant n-1$; son centre est appelé centre de P.

Le choix d'une origine O et d'une base orthonormée directe permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes en associant à tout point A de coordonnées (x, y) son affixe $z = x + iy$. À toute configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ est ainsi associé bijectivement un élément $u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qu'on appellera affixe de P ; inversement, on dira que P est l'image de u. On désigne par d l'opérateur de *décalage* qui, à toute configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ associe la configuration $d(\mathrm{P}) = (\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \dots, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}_1)$ et par m l'opérateur de *passage aux milieux* qui à $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ associe $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_n)$ où, pour tout élément k de $\{1, \dots, n-1\}$, B_k est le milieu du segment $[A_k, \mathrm{A}_{k+1}]$ et où B_n est le milieu du segment $[A_n, \mathrm{A}_1]$.

Dans toute la suite on note D et M les endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ définis par les relations :

$$\mathrm{D}(z_1, \dots, z_n) = (z_2, z_3, \dots, z_n, z_1), \qquad \mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathrm{D}),$$

où I désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$. Dans ces conditions, pour toute configuration P d'affixe u, les configurations $d(\mathrm{P})$ et $m(\mathrm{P})$ admettent pour affixes respectives $\mathrm{D}(u)$ et $\mathrm{M}(u)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'opération m de passage aux milieux. Dans la partie I, on examine l'effet du passage aux milieux sur la barycentration, ainsi que la comparatibilité avec les similitudes. La partie II est consacrée aux propriétés du passage aux milieux dans le cas des polygones réguliers, qui jouent un rôle fondamental pour l'ensemble du problème. Dans la partie III, on étudie la bijectivité du passage aux milieux. Enfin, dans la partie IV, on caractérise les polygones dont la forme est stable par passage aux milieux.

I. Effet de la barycentration et compatibilité avec les similitudes du plan

Pour toute transformation affine (bijective) t du plan et pour toute configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ on note $t(\mathrm{P})$ la configuration $(\mathrm{A}'_1, \mathrm{A}'_2, \ldots, \mathrm{A}'_n)$ constituée des points $\mathrm{A}'_j = t(\mathrm{A}_j)$.

1. Isobarycentre de $m(\mathrm{P})$; compatibilité avec les translations.

Soient $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ une configuration et G l'isobarycentre de P, défini par la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \ldots + \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = 0.$$

a. Déterminer l'isobarycentre de $m(\mathrm{P})$.

b. Soit t une translation du plan. Comparer $m(t\mathrm{P})$ et $tm(\mathrm{P})$. Déterminer l'isobarycentre de $m(t\mathrm{P})$.

2. Interprétation dans $\mathbb{C}^n$

On note e_0 l'élément de $\mathbb{C}^n$ défini par la relation $e_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ et H l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation :

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0.$$

a. Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathrm{H}$ et expliciter les projecteurs associés à cette décomposition en somme directe. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}e_0$ et H sont stables par l'endomorphisme M.

b. Soit P une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Déterminer l'affixe λ de l'isobarycentre G de P. Caractériser géométriquement les configurations P telles que $u \in \mathrm{H}$ et celles qui vérifient la relation $u = \alpha e_0$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Compatibilité avec les similitudes.

Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. On note $\overline{\mathrm{P}}$ la configuration d'affixe $\overline{u} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})$ et, pour tout nombre complexe a, on note $a\mathrm{P}$ la configuration d'affixe $au = (az_1, az_2, \ldots, az_n)$.

a. Par quelles transformations géométriques simples du plan $\overline{\mathrm{P}}$ et $a\overline{\mathrm{P}}$ se déduisent-elles de P ?

b. Comparer $m(\overline{\mathrm{P}})$ et $\overline{m(\mathrm{P})}$, ainsi que $m(a\mathrm{P})$ et $am(\mathrm{P})$.

II. Polygone des milieux d'un polygone régulier et simlitudes directes

Dans toute la suite du problème, on note ω la racine n-ième de l'unité définie par la relation $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on note R_k la configuration ayant pour affixe :

$$e_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k}).$$

1. Interprétation dans $\mathbb{C}^n$ des polygones réguliers.

a. Prouver que, si $k \neq 0$ et $2k \neq n$, R_k est un polygone régulier de centre O. Déterminer l'isobarycentre de R_k. Quelle est la nature de R_0, et de R_k lorsque $2k = n$?

b. Inversement, montrer que pour tout polygone régulier $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ de centre O, il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $2k \neq n$, et une similitude directe s, de centre O, tels que $\mathrm{P} = s\mathrm{R}_k$. Déterminer l'isobarycentre de P.

2. Polygone des milieux d'un polygone régulier.

a. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer $D(e_k)$ et $M(e_k)$.

b. En déduire que les endomorphismes D et M sont diagonalisables et déterminer leurs valeurs propres.

c. Prouver que, si $2k \neq n$, $m(\mathrm{R}_k)$ se déduit de R_k par une similitude directe de centre O dont on précisera la rapport ρ_k et une mesure ϑ_k de l'angle.

d. En déduire que la configuration des milieux $\mathrm{Q} = m(\mathrm{P})$ d'un polygone régulier P est encore un polygone régulier et indiquer comment Q se déduit de P.

3. CARACTÉRISATION DES POLYGONES P DONT LE POLYGONE DES MILIEUX EST DIRECTEMENT SEMBLABLE À P.

a. Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ un polygone dont l'isobarycentre est O, d'affixe u. Montrer que $m(\mathrm{P})$ est directement semblable à P si et seulement si u est vecteur propre de M. En déduire que P est de la forme $\mathrm{P} = a\mathrm{R}_k$, où $0 < k \leqslant n-1$, $2k \neq n$, et où a est un nombre complexe non nul.

b. Déterminer les polygones P tels que $m(\mathrm{P})$ soit directement semblable à P.

III. Bijectivité du passage aux milieux.

1. CAS DES TRIANGLES.

a. Soient $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ un triangle et G son isobarycentre. Construire un triangle $m(\mathrm{P}) = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3)$. Prouver que $dm(\mathrm{P})$ se déduit de P par une homothétie h de centre G dont on indiquera le rapport λ.

b. En déduire que m induit une bijection de $\mathscr{P}_3$. Étant donné un triangle $\mathrm{Q} = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3)$ indiquer une construction géométrique de l'unique triangle $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ tel que $m(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.

2. CAS DES QUADRALITÈRES.

a. Soient $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ une configuration, G son isobarycentre et $m(\mathrm{P}) = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$. Prouver que $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = 2\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} = 2\overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{B}_3}$; ainsi $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) dont on indiquera le centre de symétrie. Placer P et $m(\mathrm{P})$ sur une même figure.

b. Inversement, soient $\mathrm{Q} = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$ un parallélogramme et s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries centrales par rapport à chacun des sommets. Calculer $s_2 \circ s_1$ et $s_4 \circ s_3$ et montrer que $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est l'identité du plan. En déduire que pour tout point A_1 du plan il existe une configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$ et une seule telle que $m(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ et indiquer une construction géométrique des points $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$.

c. *Exemple où* Q *est aplati et où* P *ne l'est pas*. On se donne les points $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4$ par leurs coordonnées $(-3,0), (1,0), (3,0), (-1,0)$. Construire P sachant que A_1 a pour coordonnées $(-4,1)$.

d. *Exemple où* Q *est non aplati et où les sommets de* P *ne sont pas distincts deux à deux*. Étant donné un parallélogramme non aplati Q, déterminer une configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$ telle que $m(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ et que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$. Peut-il arriver que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_3$?

e. Prouver que m induit une bijection de l'ensemble des parallélogrammes sur lui-même. À cet effet, on pourra d'abord montrer qu'étant donné un parallélogramme $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$ d'isobarycentre G et $m(\mathrm{P}) = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} = \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_1}$.

3. Bijectivité du passage au milieu dans le cas où n est impair.

On écrit n sous la forme $n = 2p+1$ où $p \geqslant 1$.

a. Déterminer le noyau de l'endomorphisme M_0 de H induit par M.

b. En déduire que m est une bijection de $\mathscr{C}_n$. Prouver que m induit une bijection de $\mathscr{P}_n$.

c. Soient $Q = (B_1, B_2, \ldots, B_{2p+1})$ une configuration d'affixe $v = (b_1, b_2, \ldots, b_{2p+1})$ et d'isobarycentre O, $P = (A_1, A_2, \ldots, A_{2p+1})$ l'unique configuration telle que $m(P) = Q$ et $u = (z_1, z_2, \ldots, z_{2p+1})$ l'affixe de P. Écrire le système linéaire traduisant l'équation $m(P) = Q$. Prouver que

$$z_1 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + b_{2p+1}. \tag{1}$$

Indiquer un algorithme permettant de construire géométriquement A_1, puis P, connaissant Q.

d. *Expression de l'inverse de* M. Soit D_0 l'endomorphisme de H induit par D. Calculer $(I + D_0)(I - D_0 + D_0^2 + \ldots + D_0^{2p})$. En déduire M_0^{-1} en fonction de D_0. Retrouver ainsi la formule (1).

4. Bijectivité du passage aux milieux dans le cas où n est pair.

On écrit n sous la forme $n = 2p$ où $p \geqslant 2$; dans ces conditions $e_p = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$. On note F l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation :

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + \ldots + z_{2p-1} - z_{2p} = 0.$$

a. Déterminer le noyau de l'endomorphisme M_0 induit par M sur H. Montrer que M_0 stabilise $F \cap H$ et induit un automorphisme M_{00} de $F \cap H$; en déduire l'image de M_0.

b. Soit $Q = (B_1, B_2, \ldots, B_{2p})$ une configuration d'affixe $v = (b_1, b_2, \ldots, b_{2p})$ et d'isobarycentre G. Montrer que r appartient à F si et seulement si les isobarycentres de $(B_1, B_3, \ldots, B_{2p-1})$ et de $(B_2, B_4, \ldots, B_{2p})$ coïncident avec G. On note $\mathscr{E}_{2p}$ l'ensemble des configurations satisfaisant à cette propriété.

c. Prouver que, pour toute configuration $Q = (B_1, B_2, \ldots, B_{2p})$ de $\mathscr{E}_{2p}$ et pour tout point A_1 du plan, il existe une configuration $P = (A_1, A_2, \ldots, A_{2p})$ et une seule telle que $m(P) = Q$. Montrer que m induit une bijection de $\mathscr{E}_{2p}$ sur lui-même et que si P est un polygone appartenant à $\mathscr{E}_{2p}$, $m(P)$ en est encore un.

d. *Expression de l'inverse de* M_{00}. Montrer que le polynôme $X^{2p} - 1$ est divisible par $X^2 - 1$. Soit V le quotient. Montrer qu'il existe un polynôme A de degré $2p - 3$ et une constante B tels que $A(1 - X) - BV = 1$. Calculer B puis A. Soit D_{00} l'endomorphisme de $F \cap H$ induit par D. Prouver que $V(D_{00}) = 0$; en déduire M_{00}^{-1} en fonction de D_{00}.

IV. Caractérisation des polygones dont la forme est stable par passage aux milieux.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien défini par :

$$(u|u') = \frac{1}{n}(\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2' + \ldots + \overline{z_n}z_n').$$

On note $u \mapsto ||u||$ la norme hermitienne associée.

1. Décomposition canonique de $\mathbb{C}^n$.

a. Montrer que la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est orthonormale.

b. Comparer e_{n-k} et $\overline{e_k}$; calculer $D(\overline{e_k})$ et $M(\overline{e_k})$.

c. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, on note E_k le plan vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par e_k et $\overline{e_k}$, on note E la somme des sous-espaces E_k. Montrer que E est somme directe orthogonale des plans E_k. Prouver enfin que $E = H$ si n est impair et $E = F \cap H$ si n est pair.

d. Prouver que, pour tout k, les endomorphismes D et M stabilisent E_k, et que, pour tout élément v de E_k,
$$||M(v)|| = \rho_k ||v||.$$

2. INTERPRÉTATION COMPLEXE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DU PLAN FIXANT O.

Soit t une application du plan dans lui-même fixant O, et T l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout nombre complexe $z = x + iy$ d'image A associe l'affixe $z' = x' + iy'$ de $A' = t(A)$.

a. Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   - l'application T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (autrement dit t est affine) ;
   - il existe des nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z,
$$T(z) = az + b\overline{z}.$$

   On explicitera a et b en fonction des coefficients de la matrice associée à T dans la base $(1, i)$.

b. Dans ces conditions, montrer que T est un automorphisme si et seulement si $|a| \neq |b|$.

3. STABILITÉ DES POLYGONES AFFINES DES POLYGONES RÉGULIERS.

On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des éléments P de $\mathscr{P}_n$ de la forme $P = \tau R$ où R est un polygone régulier et τ est une transformation affine du plan. Étant donnés un endomorphisme T du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et un élément $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on pose $T(u) = (T(z_1), T(z_2), \ldots, T(z_n))$. Enfin, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, on note S_k la similitude directe du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ telle que $S(e_k) = M(e_k)$.

a. Soit $P = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et d'isobarycentre O. Montrer qu'il est équivalent de dire :
   - P est un élément de $\mathscr{A}_n$;
   - il existe un entier k, où $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, et des nombres complexes α et β tels que :
$$u = \alpha e_k + \beta \overline{e_k} \quad \text{et} \quad |\alpha| \neq |\beta|.$$

b. Étant donné un entier k tel que $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, montrer que pour tout élément u_k de E_k, il existe un endomorphisme W_k de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ *et un seul* tel que $u_k = W_k(e_k)$.

c. Prouver que pour tout élément P de $\mathscr{A}_n$, $Q = m(P)$ appartient encore à $\mathscr{A}_n$, et qu'il existe une transformation affine t du plan et une seule telle que $tP = m(P)$.

d. Inversement, soit P un polygone d'affixe u admettant O pour isobarycentre et tel que $m(P) = tP$ où t est une transformation affine. Soit T l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ associé à t. Prouver d'abord que u appartient à E. Montrer qu'il existe un entier k tel que u appartienne à E_k. À cet effet, on écrira u sous la forme $u = \Sigma W_k(e_k)$, où $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, et on montrera que, pour tout k, $W_k S_k = T W_k$. On en déduira que si $W_j \neq 0$, W_j est un automorphisme et on comparera les déterminants de T et de S_j.

e. Prouver finalement que les éléments de $\mathscr{A}_n$ sont les seuls polygones P dont le polygone des milieux se déduit de P par une transformation affine.