Université Lyon 1 – 2013-2014
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 4 — Espaces homogènes. Réduction de Jordan

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ un corps commutatif.

Exercice 1 (Formes normales des endomorphismes orthogonaux, symétriques et antisymétriques) — Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace invariant $\mathrm{W} \subset \mathrm{E}$ avec $\dim \mathrm{W} \leq 2$. (On pourra raisonner matriciellement et considérer les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre sur $\mathbf{C}$.)
2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout sous-espace V de E,
$$f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V} \Longrightarrow f(\mathrm{V}^{\perp}) \subset \mathrm{V}^{\perp}.$$
Démontrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{E} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathrm{W}_i$ en sous-espaces f-invariants W_i avec $\dim \mathrm{W}_i \leq 2$. (Raisonner par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$.)
3. En déduire que
   (a) tout endomorphisme symétrique est $\mathrm{O}(n)$-diagonalisable,
   (b) la matrice de tout endomorphisme orthogonal est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_+} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_-} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathrm{R}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{R}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathrm{R}_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R},$$
   (c) la matrice de tout endomorphisme antisymétrique est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_i \\ -\vartheta_i & 0 \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 (Le demi-plan de Poincaré) — Soit
$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
le demi-plan de Poincaré.

1. Vérifier que l'application
$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \quad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
est bien définie.
2. Démontrer que φ est une action continue de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathfrak{H}$. Calculer le groupe d'isotropie de i.
3. Démontrer que $\mathfrak{H}$ est homéomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(2)$.

Exercice 3 (Grassmaniennes) — Dans cet exercice, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit n un entier strictement positif et soit $d \in \{1, \ldots, n\}$. On désigne par P_d le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ consitué des matrices triangulaires par blocs $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, où le bloc 0 est de taille $(n-d) \times d$.

1. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/\mathrm{P}_d$ est naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathbf{Gr}_{n,d}(\mathbf{K})$ des sous-espace de $\mathbf{K}$ de dimension d. Muni de cette topologie d'espace homogène, l'ensemble $\mathbf{Gr}_{n,d}(\mathbf{K})$ est appelé *Grassmanienne des d-plans* de $\mathbf{K}^n$.
2. Démontrer que $\mathbf{Gr}_{n,d}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{Gr}_{n,d}(\mathbf{C})$) est également homéomorphe à un espace homogène sous $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{U}(n)$). En déduire que $\mathbf{Gr}_{n,d}(\mathbf{K})$ est compact.

Exercice 4 (Variétés de drapeaux) — Dans cet exercice, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit n un entier strictement positif et soit $\lambda = (p_1, \ldots, p_r)$ une partition de n. On appelle *drapeau de type* λ toute famille $\mathrm{F}_\bullet = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_r)$ de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$ vérifiant :

$$\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_r \quad \text{et} \quad \dim\ \mathrm{F}_i = p_1 + \ldots + p_i,\ 1 \leq i \leq r.$$

On désigne par $\mathcal{F}_\lambda$ l'ensemble des drapeaux de type λ.

1. Reconnaître l'espace $\mathcal{F}_{(1,n-1)}$.
2. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ opère de façon transitive sur $\mathcal{F}_\lambda$.
3. Le *drapeau standard* de type λ est le drapeau tel que chaque F_i soit le sous-espace engendré par les $p_1 + \ldots + p_i$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Déterminer le stabilisateur du drapeau standard de type λ.
4. En déduire une topologie sur $\mathcal{F}_\lambda$.
5. Démontrer que $\mathcal{F}_\lambda$ est également un espace homogène sous $\mathrm{U}(n)$. En déduire qu'il s'agit d'un espace compact.

Exercice 5 (Noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent) — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit

$$0 = \mathrm{F}_0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_r = \mathrm{E}$$

un drapeau de sous-espaces vectoriels tels que

$$\dim\ \mathrm{F}_{i+1}/\mathrm{F}_i \leqslant \dim\ \mathrm{F}_i/\mathrm{F}_{i-1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Démontrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent N de E tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, r\}, \quad \mathrm{F}_i = \mathrm{Ker}\ \mathrm{N}^i.$$

Exercice 6 (Similitude : de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$) — Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que A et B sont semblables sur $\mathbf{C}$ si et seulement si elles le sont sur $\mathbf{R}$. La condition est évidemment suffisante.

Supposons que A et B soient semblables sur $\mathbf{C}$: il existe donc une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

1. Écrivons $\mathrm{P} = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que la matrice réelle $\mathrm{Q}_t = \mathrm{U} + t\mathrm{V}$ soit inversible. (Considérer le polynôme $\det(\mathrm{U} + z\mathrm{V})$)
2. Si t est comme précédemment, vérifier que l'on a alors $\mathrm{B} = \mathrm{Q}_t \mathrm{A} \mathrm{Q}_t^{-1}$.

Exercice 7 (Classes de similitude) — 1. Démontrer que deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sont sembables si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{rg}\ (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^k = \mathrm{rg}\ (\mathrm{B} - \lambda)^k.$$

(Utiliser le lemme des noyaux et la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents.)

2. Fixons maintenant un polynôme $\chi \in \mathrm{C}[\mathrm{T}]$ unitaire et de degré n. On désigne par $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\chi}$ l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique $(-1)^n\chi$.

(i) Décrire les orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sur M_n^{χ}. Combien y en a-t-il ?

(ii) Décrire l'adhérence de l'orbite $\mathcal{O}_{\mathrm{A}}$ d'une matrice quelconque $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n^{\chi}$. (À l'aide du lemme des noyaux, on se ramènera au cas où le spectre de A est réduit à un seul élément)

(iii) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_{\mathrm{A}}$ est fermée.

Exercice 8 (Matrices nilpotentes) — 1. Démontrer que toutes les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_8(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ sont semblables. (Observer que ces matrices sont nilpotentes...)

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente.
   (i) Décrire la forme normale de Jordan de N^2 à partir de celle de N.
   (ii) En déduire une caractérisation des classes de conjugaison de matrices nilpotentes admettant une « racine carrée ».
3. Considérons les matrices diagonales par blocs suivantes dans $\mathrm{M}_6(\mathbf{R})$:

$$\mathrm{N} = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_4, \mathrm{J}_2), \quad \mathrm{N}' = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_4, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}'' = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_3, \mathrm{J}_3),$$

   où J_p désigne la matrice de Jordan de taille $(p+1) \times (p+1)$ standard.
   Construire des applications continues γ' et γ'' de $[0,1]$ dans $\mathrm{M}_6(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall t \in]0,1], \quad \gamma'(t) \sim \gamma''(t) \sim \mathrm{N}, \quad \gamma'(0) \sim \mathrm{N}' \quad \text{et} \quad \gamma''(0) \sim \mathrm{N}''.$$

Exercice 9 (Adhérences des orbites nilpotentes) — Le corps $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On désigne par $\mathrm{Nilp}_n(\mathbf{K})$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ formé des matrices nilpotentes et l'on considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{Nilp}_n(\mathbf{K})$ par conjugaison.

1. Démontrer que chaque orbite $\mathcal{O}$ est ouverte dans son adhérence $\overline{\mathcal{O}}$. (Décrire $\mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ par des conditions polynomiales et utiliser l'exercice 4 de la fiche 2.)
2. En déduire que l'on définit bien un ordre partiel sur l'ensemble des orbites en posant :

$$\mathcal{O}' \leqslant \mathcal{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}}.$$

Exercice 10* (Relation d'ordre sur les diagrammes de Young) — Pour tout diagramme de Young Y et tout entier $i \geqslant 1$, on désigne par $d_i(\mathrm{Y})$ le nombre de cases sur la i-ème ligne de Y. Étant donné deux diagrammes de Young Y et Y′ de même taille, on dit que Y *domine* Y′ si

$$d_1(\mathrm{Y}') + \ldots + d_k(\mathrm{Y}') \geqslant d_1(\mathrm{Y}) + \ldots + d_k(\mathrm{Y})$$

pour tout entier $k \geqslant 1$; on note alors $\mathrm{Y}' \leqslant \mathrm{Y}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation $\leqslant$ est un ordre partiel sur l'ensemble des tableaux de Young de taille n.

On dit que Y′ est une *dégradation élémentaire* de Y s'il existe des entiers $i_0 < j_0$ tels que

$$d_i(\mathrm{Y}') = \begin{cases} d_i(\mathrm{Y}) & \text{si } i \neq i_0, j_0 \\ d_{i_0}(\mathrm{Y}) + 1 & \text{si } i = i_0 \\ d_{j_0}(\mathrm{Y}) - 1 & \text{si } i = j_0 \end{cases}$$

Graphiquement, cela signifie que l'on passe de Y à Y′ en déplaçant la dernière case de la ligne j_0 à la ligne i_0.

1. Vérifier que, si Y′ est une dégradation élémentaire de Y, alors Y domine Y′.

2. Réciproquement, considérons deux diagrammes de Young tels que $Y' \leqslant Y$. Nous allons démontrer que l'on peut obtenir Y' par un nombre fini de dégradations élémentaires de Y.
   (i) Supposons $Y' \leqslant Y$ et $Y' \neq Y$. Justifier l'existence d'un plus petit entier i_0 tel que $d_{i_0}(Y') > d_{i_0}(Y)$ et d'un plus grand entier j_0 tel que $d_{j_0}(Y') < d_{j_0}(Y)$. En déduire qu'il existe une dégradation élémentaire Y'' de Y telle que $Y' \leqslant Y'' \leqslant Y$.
   (ii) Conclure.

On peut raffiner le résultat précédent. Nous dirons qu'un diagramme Y' est une dégradation *minimale* du diagramme Y si, pour tout diagramme Y'',

$$Y' \leqslant Y'' \leqslant Y \quad \Longrightarrow \quad (Y'' = Y \text{ ou } Y'' = Y').$$

3. Vérifier que toute dégradation minimale est une dégradation élémentaire.

Nous allons reformuler la condition de minimalité. Soit Y' une dégradation élémentaire de Y, avec $d_{i_0}(Y') = d_{i_0}(Y) + 1$ et $d_{j_0}(Y') = d_{j_0}(Y) - 1$. Considérons un diagramme Y'' tel que $Y' \leqslant Y'' \leqslant Y$.

4. Démontrer que $d_{i_0}(Y'')$ est égal à $d_{i_0}(Y)$ ou $d_{i_0}(Y) + 1$, puis que $Y'' = Y'$ dans le second cas de figure.
5. En déduire que, si Y' n'est pas une dégradation minimale de Y, alors il existe un entier i_1 tel que

$$i_0 < i_1 < j_0 \quad \text{et} \quad d_{i_1} < d_{i_0}.$$

6. Démontrer la réciproque de l'assertion précédente.
7. En déduire que les dégradations minimales d'un diagramme Y sont précisément les diagrammes obtenus en déplaçant une case du sommet d'une colonne sur la colonne située immédiatement à droite.
8. Dresser la liste de tous les diagrammes de Young de taille 6 et identifier les dégradations minimales.