Correction feuille de TD 4

Exercice 4 f est bien une densité car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\pi(1+u^2)} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan u\right]_{u=-\infty}^{\infty} = 1,$$

où on a fait le changement de variable $u = \frac{x}{a}$. Ensuite, $|X|^\alpha$ est intégrable si, et seulement si l'intégrale

$$E[|X|^\alpha] = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx$$

est convergente. Par parité, il suffit de considérer l'intégrale sur $[0, +\infty[$. Du fait de l'équivalent

$$|x|^\alpha \frac{a}{a^2+x^2} \sim_{x\to\infty} \frac{a}{x^{2-\alpha}},$$

on conclut (intégrale de Riemann...) que $E[|X|^\alpha] < \infty$ si, et seulement si $2-\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. En particulier, X n'est pas intégrable (c'est le cas $\alpha = 1$).

Exercice 5 Posons $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t)$. En remarquant que, pour $s, t > 0$,

$$P(X > t+s | X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$$

(ceci car $\{X > t+s\} \subset \{X > t\}$), la propriété d'absence de mémoire fournit l'équation fonctionnelle :

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(t)\bar{F}(s).$$

L'hypothèse donnée dans l'énoncé, à savoir que la loi de X admet une densité f, invite à dériver cette relation par rapport à t en utilisant $\bar{F}'(t) = -F'(t) = -f(t)$. En prenant $t = 0$, ceci conduit à l'équation différentielle $\bar{F}'(s) = -f(0)\bar{F}(s)$, qui a comme solution générale $\bar{F}(s) = Ce^{-f(0)s}$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$, d'où l'on déduit f en dérivant.
Cependant, pour une raison donnée dans la correction de l'exercice 6, cette méthode est inexacte (à moins de supposer la densité continue, par exemple). Voici donc une autre façon de résoudre l'équation fonctionnelle qui ne fait aucune hypothèse sur la loi de X (hormis $X \geq 0$). Posons $C = F(1) \leq 1$. En itérant l'équation, on trouve, pour tout entier $n \geq 1$, $\bar{F}(n) = \bar{F}(1 + \cdots + 1) = \bar{F}(1)^n = C^n$. Puis, pour tout rationnel strictement positif $r = \frac{p}{q}$, $\bar{F}(p) = \bar{F}(q\frac{p}{q}) = \bar{F}(\frac{p}{q})^q$ d'où $\bar{F}(\frac{p}{q}) = \bar{F}(p)^{1/q} = C^{p/q}$, c'est-à-dire $\bar{F}(r) = C^r$. Notons $\widetilde{F}(x) = C^x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. $\bar{F}$ et $\widetilde{F}$ coïncident sur les rationnels strictement positifs. De plus, ces deux fonctions sont décroissantes. Si x est un réel strictement positifs, il existe une suite $(r_n)_n$ de rationnels positifs qui croît vers x, une suite $(s_n)_n$ de rationnels qui décroît vers x. Comme, pour tout n, $r_n \leq x \leq s_n$, on a $\widetilde{F}(r_n) = \bar{F}(r_n) \leq \bar{F}(x) \leq \bar{F}(s_n) = \widetilde{F}(s_n)$. Par continuité de $\widetilde{F}$, on en déduit, en passant à la limite, $\widetilde{F}(x) = \bar{F}(x)$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\bar{F}(x) = C^x = e^{-\lambda x}$, où $\lambda = -\ln C > 0$ (on doit avoir $\bar{F}(x) \to_{x\to\infty} 0$ donc $C < 1$). De plus $\bar{F}(x) = 1$ pour $x < 0$ car $X \geq 0$. Finalement, F est la fonction de répartition d'une loi exponentielle, donc X suit une loi exponentielle.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle. On note $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ sa fonction de répartition.
1. Supposons que X a pour densité f. **Erratum :** contrairement à ce qui a été dit et écrit en TD, f n'est pas nécessairement la dérivée de F, et F n'est d'ailleurs pas nécessairement dérivable. En revanche, le résultat usuel dit que *si* f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. On a aussi le résultat suivant (beaucoup plus difficile, conséquence du Théorème de Lebesgue) qui montre que la propriété énoncée en TD est néanmoins «presque vraie» : quelle que soit la densité f, F est dérivable presque partout de dérivée f.
2. En revanche, c'est à juste titre que l'on a dit que si F est dérivable alors X admet une densité donnée par $f = F'$. Mais ce n'est pas évident. On a en effet utilisé la formule $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$. Celle-ci est vraie classiquement si F est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle reste vraie si F est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (découper aux points de discontinuité de F'). En pratique, ceci suffit amplement pour déduire

une densité d'une fonction de répartition. Néanmoins, à titre culturel, sachez que (moins simplement) la formule en question reste vraie si F' (définie partout) est intégrable, ce qui est automatique lorsque F est une fonction de répartition (car $F' \geq 0$ et le lemme de Fatou permet de montrer $\int_{\mathbb{R}} F'(x)dx \leq 1$).
La réponse la plus complète à la question (encore à titre culturel) serait qu'une fonction de répartition F est la fonction de répartition d'une loi à densité si, et seulement si elle est *absolument continue* (chercher la définition sur internet).
3. Supposons $X \geq 0$. Donnons une première preuve si on suppose que la loi de X admet une densité f *continue* et $E[X^r] < \infty$. Dans ce cadre, F est dérivable, et on a $f(x) = F'(x) = -\bar{F}(x)$ où $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^\infty rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^\infty rx^{r-1}\bar{F}(x)dx = [x^r\bar{F}(x)]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty x^r\bar{F}'(x)dx = \int_0^\infty x^r f(x)dx = E[X^r],$$

où il reste à justifier la limite dans le crochet : $x^r\mathbb{P}(X > x) \to 0$ quand $x \to \infty$. C'est une conséquence de l'inégalité suivante :

$$x^r\mathbb{P}(X > x) = x^r\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(X>x)}] = E[x^r\mathbf{1}_{(X>x)}] \leq \mathbb{E}[X^r\mathbf{1}_{(X>x)}],$$

et du théorème de convergence dominée : $X^r\mathbf{1}_{(X>x)} \to_{x\to\infty} 0$ et on a la domination $|X^r\mathbf{1}_{(X>x)}| \leq X^r$ (X^r est intégrable par hypothèse).
Autre preuve, complètement générale : remarquons que l'on a, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega)^r = \int_0^{X(\omega)} rx^{r-1}dx = \int_0^\infty rx^{r-1}\mathbf{1}_{(X(\omega)>x)}dx.$$

Prenons l'espérance des deux membres et appliquons le théorème de Fubini(-Tonelli), ce qui est licite car la fonction à intégrer est mesurable positive :

$$E[X^r] = \int_\Omega\int_0^\infty rx^{r-1}\mathbf{1}_{(X(\omega)>x)}dx\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_0^\infty\int_\Omega rx^{r-1}\mathbf{1}_{(X(\omega)>x)}d\mathbb{P}(\omega)dx = \int_0^\infty rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)dx.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli, et donc cette égalité, est vrai même si les deux membres sont infinis.

Exercice 7 Soit $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi exponentielle de même paramètre λ. On procède similairement à l'exercice 7 de la fiche précédente :
1. La fonction de répartition de X_1 (par exemple) est

$$F_{X_1}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Par suite, la loi de $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$ vérifie : pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(Z < 0) = 0$ (comme $X_i \geq 0$, on a $\max(X_1, \ldots, X_n) \geq 0$) et, si $x < 0$,

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\cdots\mathbb{P}(X_n \leq x) = F_{X_1}(x)^n = (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

Cette fonction de répartition suffit à caractériser la loi de Z. Ce n'est pas une loi exponentielle (F_Z n'a pas la même forme que F_{X_1}), mais c'est une loi à densité car F_Z est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (cf. exercice 6), de densité f_Z donnée par la dérivée de F_Z (qui existe partout sauf en 0) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. De même, si maintenant $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$, on a $Z \geq 0$ d'où $F_Z(x) = 0$ si $x \leq 0$. Et, si $x > 0$,

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x\} \cup \cdots \cup \{X_n \leq x\}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n = 1 - e^{-n\lambda x}$$

(en passant au complémentaire, on s'est ramené à une intersection d'événements, de façon à exploiter l'indépendance des variables). En comparant les expressions de F_Z et F_{X_1}, on constate que F_Z est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$ (on pourrait aussi le retrouver en dérivant F_Z). Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on conclut que Z suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.