

IV — EXEMPLE D'UN ANNEAU NON NOËTHÉRIEN

Exercice 1 Un exemple non noëthérien

Soit $A = \{a_0 + \dots + a_n \frac{X^n}{n!} : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$

- a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.
- b) Montrer l'inclusion stricte des idéaux :

$$(X) < (X, \frac{X^2}{2}) .$$

- c) Montrer l'égalité des idéaux $(X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^5}{5!}) = (X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^5}{5!}, \frac{X^6}{6!})$.
- d) Montrer que l'idéal $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} (X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^n}{n!})$ n'est pas de type fini.

Exercice 2 Idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X, Y]$

- a) Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$.
- b) Montrer que l'idéal (X, Y) est maximal dans $\mathbb{C}[X, Y]$.
- c) Montrer que l'idéal $(X, Y)^n$ peut être engendré par $n + 1$ éléments mais non moins. *Indication. Considérer le quotient $(X, Y)^n / (X, Y)^{n+1}$ comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.*
- d) Soit $I \leq \mathbb{C}[X, Y]$ un idéal premier non nul. Montrer que I contient un polynôme irréductible.
- e) En déduire que les idéaux premiers non nuls de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont les idéaux principaux (P) , où $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ est irréductible, et les idéaux de la forme $(X - x, Y - y)$, $(x, y \in \mathbb{C})$ (qui sont maximaux et ne sont pas principaux). *Indication. Si $P \in I$ est un polynôme irréductible et si $I \neq (P)$, alors $I \cap \mathbb{C}[X] \neq 0$.*