

VI — SUR LE RÉSULTANT

Exercice 1. Résultant. Soit k un corps. Soit P et Q deux polynômes non constants dans $k[X]$. On veut un critère numérique pour décider si P et Q sont premiers entre eux.

1. Soit p et q les degrés de P et Q respectivement. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes non nuls A et B tels que
 - (a) $PA = QB$;
 - (b) $\deg(A) < \deg(Q)$;
 - (c) $\deg(B) < \deg(P)$.
2. En déduire que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : k_{q-1}[X] \times k_{p-1}[X] &\longrightarrow k_{p+q-1}[X] \\ (A, B) &\longmapsto AP + BQ \end{aligned}$$

est bijective.

3. Déterminer la matrice M de $\mathcal{R}$ dans les bases canoniques. Le résultant $\text{Res}(P, Q)$ est par définition le déterminant de M .
4. On suppose que $k = \mathbb{C}$ et on écrit $P = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)$, $Q = b(X - \beta_1) \dots (X - \beta_q) \in \mathbb{C}[X]$.
On se propose de montrer que

$$\text{Res}(f, g) = a^q b^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j).$$

- (a) Considérons la fonction

$$\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto \text{Res}(P(X+t), Q(X)).$$

Montrer que Γ est un polynôme de degré pq dont le coefficient directeur est $(-1)^{pq} b^q a^p$

- (b) Montrer que, pour tout i et j , $\Gamma(\alpha_i - \beta_j) = 0$.
- (c) En déduire que, si les $\alpha_i - \beta_j$ sont deux à deux distincts, on a

$$\text{Res}(P, Q) = a^q b^p \prod_{i,j} \alpha_i - \beta_j.$$

(d) Sous ces mêmes hypothèses en déduire que

$$\text{Res}(P, Q) = a^q \prod_i Q(\alpha_i).$$

(e) Montrer que cette formule est toujours valable sans hypothèse sur les racines.

Exercice 2. Discriminant. Soit P un polynôme de degré au moins 2 dans $k[X]$. On note P' sa dérivée. Le discriminant de P est par définition le résultant $\text{Disc}(P) = \text{Res}(P, P')$.

1. Calculer le discriminant de $P(X) = aX^2 + bX + c$.
2. Montrer que P est sans facteur carré si et seulement si $\text{Disc}(P) \neq 0$.
3. Calculer le discriminant de $X^n - 1$.

Exercice 3. Applications aux nombres algébriques. Soit α et β deux nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$. Notons P_α et P_β leurs polynômes minimaux unitaires.

1. Vérifier que les deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $P = P_\alpha(X)$ et $Q = P_\beta(\alpha + \beta - X)$ ont une racine commune.
2. Soit $\tilde{Q} = P_\beta(T - X) \in (\mathbb{Q}(T))[X]$ et $\tilde{P} = P_\alpha$ pensé comme un polynôme de $(\mathbb{Q}(T))[X]$. Montrer que $R(\tilde{P}, \tilde{Q})$ appartient à $\mathbb{Q}[T]$ et s'annule en $\alpha + \beta$.
3. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
4. Trouver un polynôme annulateur de $\pi = \alpha\beta$ en considérant $Q = X^q P_\beta(\frac{\pi}{X})$.

Exercice 4. Polynômes symétriques.

On pose pour tout $k : S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k$.

Exprimer $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ à l'aide des polynômes symétriques élémentaires σ_i .

Indication. Utiliser l'identité

$$(T - X_1) \cdots (T - X_3) = T^3 - \sigma_1 T^2 + \sigma_2 T - \sigma_3.$$